Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 28. 10. 2016

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	4	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f(t) = \sin^2 \omega t$. Hierbei ist ω eine reelle Konstante.

a) Bestimmen Sie in mathematisch nachvollziehbarer Weise die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$.
b) Die Funktion $g(t)$ wird durch Differentiation der Funktion $f(t)$ nach dem Argument t gebildet:
$$g(t) = \frac{df}{dt}.$$
Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{g}(s)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = 0.75 x_i + u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 2$ und der Eingangsgröße $u_i = (-0.5)^i$.

a) Stellen Sie die Folge u_i für $i = 0,1,2,3$ graphisch dar.
b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $\bar{x}(z)$ der Lösung x_i obiger rekursiver Relation.
c) Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$, sofern dieser existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort *mathematisch*!
d) Ermitteln Sie die Lösung x_i.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$ der Funktion $f(t)$

$$\bar{f}(s) = \frac{(\alpha - 1)s^2 + 6\alpha s + 9\alpha}{s^3 + 6s^2 + 9s}$$

mit dem reellen Parameter α.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Wert des Parameters α so, dass $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = -2$ gilt. *Begründen* Sie, warum in diesem Fall der Grenzwertsatz angewendet werden darf!
b) Ermitteln Sie die zugehörige Originalfunktion $f(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 16.12.2016

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	3	2	2	3
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -2x + u$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 1$ und $u(t) = \sigma(t-2)e^{\alpha(t-2)}$. Hierbei sind $\sigma(t)$ die Sprungfunktion und α eine reelle Konstante.

a) Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die LAPLACE-Transformierte $\bar{x}(s)$.
b) Ermitteln Sie daraus in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Lösung $x(t)$ für $\alpha = 1$.
c) Ermitteln Sie für $t \gg$ die stationäre Lösung $x_{st}(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = 2x_i - 5\sigma_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 2$ und σ_i der diskreten Sprungfunktion. Ermitteln Sie den Wert x_5 durch Anwendung der z-Transformation.

Aufgabe 3:

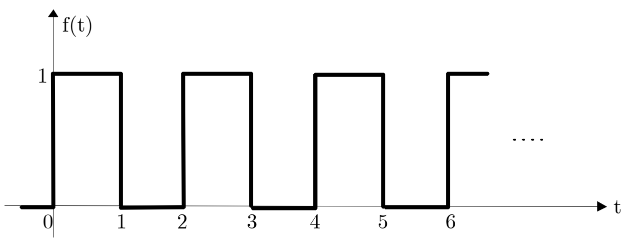
Gegeben sei die z-Transformierte der Folge (f):

$$\bar{f}(z) = \frac{16 - z^4}{2z^3 - z^4}$$

a) Ermitteln Sie die Folge (f) in *mathematisch nachvollziehbarer Weise*.
b) Skizzieren Sie die Werte f_i der Folge (f) für $0 \le i \le 10$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f(t)$ gemäß nachfolgender Abbildung.



a) Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $\bar{f}(s)$.
b) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} f(t)$ der Funktion $f(t)$, falls dieser existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 27.01.2017

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die z-Transformierte

$$F(z) = \frac{z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1}{(z^2 - z + 0.25)(z^2 + 1)} + 2 \ .$$

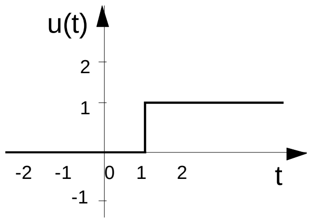
Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die zugehörige Originalfolge (f) mit den Elementen f_i für $i = 0,1,2,3,\ldots$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + 2u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2x_2$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Die Eingangsgröße $u(t)$ liegt in graphischer Form vor:



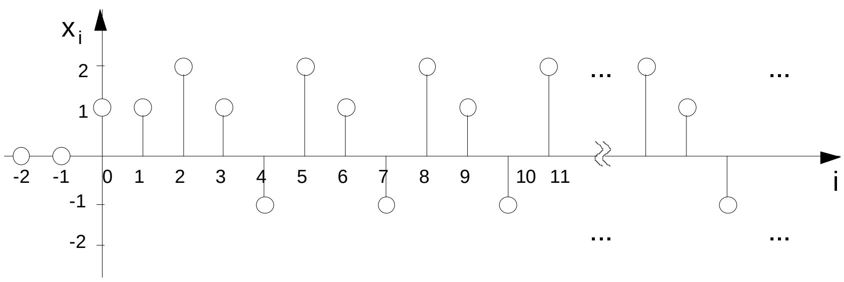
a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ der Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

b) Kann man mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ bestimmen? Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

c) Ermitteln Sie die zugehörigen Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal x_i gemäß folgender Abbildung:



Zeigen Sie, dass für die zugehörige z-Transformierte des obigen Signals gilt:

$$X(z) = \frac{z^4 + z^3 + 2z^2 - 2}{z^4 - z}$$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 17.3.2017

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und der Eingangsgröße $u(t) = e^{-2t} \cos t$.

Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise*:

a) die LAPLACE-Transformierte $U(s)$ der Eingangsfunktion,

b) die LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$,

c) die Lösung $x_2(t)$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} x_i + u_i \qquad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

mit $x_0 = 1$ und $u_i = \sigma_i + \left(\frac{1}{2}\right)^i$. Hierbei ist σ_i die diskrete Sprungfunktion.

Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise*:

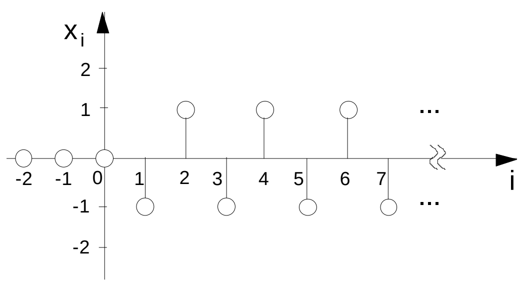
a) die z-Transformierte $U(z)$ der Eingangsfolge (u) mit den Elementen u_i ,

b) die z-Transformierte $X(z)$ der Folge (x) mit den Elementen x_i ,

c) die Lösung x_i durch Anwendung der z-Transformation.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal x_i gemäß folgender Abbildung:



Ermitteln Sie die z-Transformierte des Signals $f_i = \frac{1}{2} x_i - 1$ in *mathematisch nachvollziehbarer Weise*.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 05.05.2017

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	5	3	2
erreichte Punkte			

***Begründen* Sie Ihre Antworten *mathematisch*!**

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - x_2 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_2(0) = 0$ und der Eingangsfunktion $u(t) = \sigma(t) + e^{-3t}$.

a) Stellen Sie die Eingangsfunktion $u(t)$ für $t \geq 0$ graphisch dar.

b) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die zugehörige Lösung $x_1(t)$.

d) Die Eingangsfunktion lautet nun $u(t) = (1 + e^{-3t+3})\sigma(t-1)$. Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = 0.75x_i + u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 1$ und der Eingangsgröße $u_i = (-0.5)^i$.

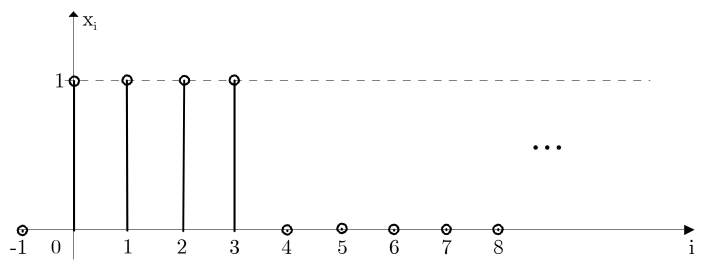
a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} x_i$, sofern er existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort *mathematisch*.

c) Ermitteln Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung x_i.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das diskrete Signal x_i gemäß nachfolgender Abbildung:



Zeigen Sie, dass die zugehörige z-Transformierte

$$X(z) = \frac{z^4 - 1}{z^3(z-1)}$$

lautet.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 07.07.2017

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	3	3
erreichte Punkte			

Begründen **Sie Ihre Antworten** ***mathematisch*****!**

Aufgabe 1:

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + 2x - 10\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

mit dem Anfangswert $x(t=0) = x_0$.

b) Zeigen Sie, dass für hinreichend große Werte des Parameters t die Lösung $x(t)$ durch die Funktion

$$x_{st}(t) := 2\left(2\sin t - \cos t\right)$$

gegeben ist.

c) Wählen Sie den Anfangswert x_0 derart, dass

$$x(t) = x_{st}(t)$$

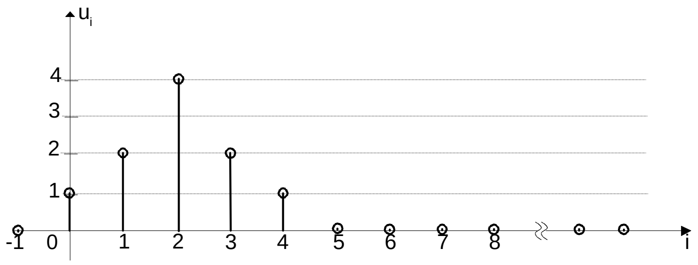
für <u>alle</u> Werte von $t \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} x_i + 2u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 1$ und der Eingangsgröße u_i gemäß folgender Abbildung:



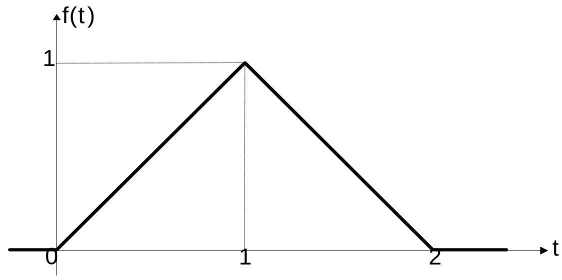
a) Ermitteln Sie die z-Transformierte der Eingangsfunktion u_i.

b) Bestimmen Sie durch Anwendung der z-Transformation die Funktion $\bar{x}(z)$.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$, sofern er existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort *mathematisch*.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f(t)$ gemäß nachfolgender Abbildung:



a) Zeigen Sie, dass für die LAPLACE-Transformierte von $f(t)$

$$\bar{f}(s) = \left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^2$$

gilt.

b) Betrachten Sie nun die LAPLACE-Transformierte der Funktion $g(t)$:

$$\bar{g}(s) = \left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^2 e^{-2s}$$

Stellen Sie die Funktion $g(t)$ graphisch dar.