Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 23.10.2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 4x_2 + 15u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ und $u(t) = e^{5t}$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die zugehörigen LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Bestimmen Sie im Bildbereich den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$, sofern dieser existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!
c) Ermitteln Sie die zugehörig Originalfunktion $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = 2x_i - u_i \qquad\qquad i = 0,1,2,...$$

mit $x_0 = 0$ und

$$u_i = \sin^2\left(i\,\tfrac{\pi}{2}\right).$$

a) Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die z-Transformierte der Folge u_i durch

$$U(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)}$$

gegeben ist.
b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$.
c) Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die Lösung x_i.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie für die gegebenen z-Transformierten $F(z)$ und $G(z)$ in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise jeweils den Grenzwert der Originalfunktion

$$\lim_{i\to\infty} f_i \text{ und } \lim_{i\to\infty} g_i,$$

falls er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

I. $$F(z) = \frac{2z+2}{z^2 - 0.5z - 0.5}$$

II. $$G(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1.5z + 0.5}$$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 18.12.2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	5	5
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + x + \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

mit dem Anfangswert $x(t=0) = x_0$.

b) Zeigen Sie, dass für hinreichend große Werte des Parameters t die Lösung $x(t)$ durch die Funktion

$$x_{st}(t) := \frac{1}{2}\left(\sin t + \cos t\right)$$

gegeben ist.

c) Wählen Sie den Anfangswert x_0 derart, dass

$$x(t) = x_{st}(t)$$

für <u>alle</u> Werte von $t \geq 0$ gilt.

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte $F(z)$ von

$$f_i = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\omega T_d\right) \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

mit ω und T_d konstant.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} f_i$, falls er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

c) Zeigen Sie, dass das diskrete Signal f_i

$$f_i = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i = 2k \\ 1 & \text{für} \quad i = 4k+1 \\ -1 & \text{für} \quad i = 4k+3 \end{cases}$$

mit $k = 0,1,2,\ldots$ die z-Transformierte

$$F(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

besitzt.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 26.01.2016

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	5	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2 + 2u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 4u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$ in Abhängigkeit von x_{10}, x_{20} und $U(s)$.

b) Für die Anfangswerte gelte nun $x_1(0) = x_2(0) = 0$, die Eingangsfunktion sei durch $u(t) = e^{-t}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die zugehörige Lösung $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$x_{i+1} = -\frac{1}{2}x_i + \beta u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 0$ und der Eingangsgröße $u_i = \sigma_i$. Hierbei ist β ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ der Funktion x_i.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Parameter β so, dass für den Grenzwert

$$x_\infty := \lim_{i\to\infty} x_i = 4$$

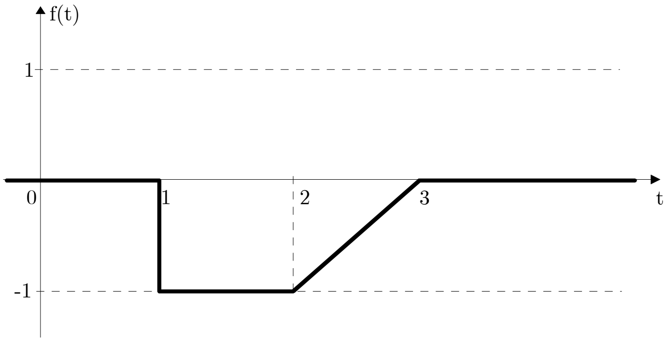
gilt. Begründen Sie *mathematisch*, warum der Grenzwertsatz angewendet werden darf.

c) Ermitteln Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung x_i.

d) Stellen Sie die fünf Werte $x_i \quad (i = 0,1,2,3,4)$ graphisch dar.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f(t)$ gemäß nachfolgender Abbildung:



Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ der Funktion $f(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 18.03.2016

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	2	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_2 + 10u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und $u(t) = e^{-t}$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

b) Bestimmen Sie im Bildbereich den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)$, sofern er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die LAPLACE-Transformierte der Funktion

$$f(t) = e^{-2t}(t^2 + 3t)$$

durch

$$F(s) = \frac{3s + 8}{(s+2)^3}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$x_{i+1} = \alpha x_i + \beta u_i \qquad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

mit den reellen Parametern α und β. Es ist bekannt, dass für den Anfangswert $x_0 = 0$ und die Eingangsgröße $u_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ die z-Transformierte $X(z)$ der Folge x_i durch

$$X(z) = \frac{24z}{6z^2 - 5z + 1}$$

gegeben ist.

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{i\to\infty} x_i$ mit Hilfe der z-Transformation, falls er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der z-Transformation die Folge x_i für obige Werte von x_0 und u_i.

c) Ermitteln Sie die Parameter α und β.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 20.05.2016

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	2	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

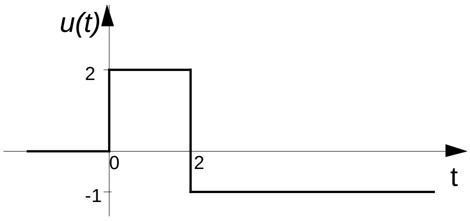
Betrachten Sie die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_2 + u,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_2(0) = 0$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $\bar{x}_1(s)$ und $\bar{x}_2(s)$ in Abhängigkeit von $\bar{u}(s)$.

Die Eingangsfunktion $u(t)$ wird nun gemäß nachfolgender Skizze gewählt:



b) Ermitteln Sie die LAPLACE-Transformierte $\bar{u}(s)$.

c) Ermitteln Sie die Funktion $x_2(t)$.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die LAPLACE-Transformierte $\bar{y}(s)$ der Funktion

$$y(t) = 4 \cdot \sin(1.5t) \cdot \cos(1.5t) \cdot \cos(3t).$$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die z-Transformierte der Folge (f) mit den Elementen $f_i = i^2 \quad (i = 0,1,2,...)$ durch

$$\bar{f}(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

gegeben ist.

b) Berechnen Sie die z-Transformierte der Folge (g) mit den Elementen
$g_i = (0.8)^i \cdot i^2 \quad (i = 0,1,2,...)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $g_\infty := \lim\limits_{i\to\infty} g_i$, falls dieser existiert. Begründen Sie Ihre Antwort!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 01.07.2016

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	5	5
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_2(0) = 0$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die LAPLACE-Transformierten $\overline{x}_1(s)$ und $\overline{x}_2(s)$ in Abhängigkeit der LAPLACE-Transformierten $\overline{u}(s)$.

b) Als Eingangsfunktion $u(t)$ dient jeweils eine der folgenden vier Funktionen:

b₁) $u_1(t) = 2\sin^2 t$

b₂) $u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für}\, t < 3,5 \\ 2\sin^2(t-3,5) & \text{für}\, t \geq 3,5 \end{cases}$

b₃) $u_3(t) = 2\sin 2t$

b₄) $u_4(t) = 1 - \cos^2 5t$

Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* für jeden Fall die zugehörige Lösung $x_2(t)$.

HINWEIS: Ermitteln Sie die Lösung $x_2(t)$ für den ersten Fall $u_1(t) = 2\sin^2 t$ und überlegen Sie, welcher mathematischer Zusammenhang zwischen den vier Eingangsfunktionen besteht!

Aufgabe 2:

Betrachten Sie zwei Folgen (f) bzw. (h) mit den zugehörigen z-Transformierten

$$\overline{f}(z) = \frac{1-z^9}{(1-z)z^8} \text{ bzw. } \overline{h}(z) = \frac{1+z^9}{(1+z)z^8}.$$

a) Ermitteln Sie durch Anwendung des Endwertsatzes der z-Transformation die Grenzwerte $f_\infty := \lim_{i\to\infty} f_i$ und $h_\infty := \lim_{i\to\infty} h_i$, *falls* diese existieren. Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!

b) Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die Originalfolgen (f) und (h).

c) Skizzieren Sie die Folgen (f) und (h) für $0 \leq i \leq 10$.

d) Ermitteln Sie die z-Transformierte der Folge $(g) = (f) + (h)$ mit den Elementen $g_i = f_i + h_i$.

e) Skizzieren Sie die Folge (g) für $0 \leq i \leq 10$.