Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 17. 10. 2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	3	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f(t) = \sin^2(\omega t)$. Hierbei ist ω eine reelle Konstante.

a) Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $F(s)$.
b) Die Funktion $g(t)$ wird durch Differentiation der Funktion $f(t)$ nach dem Argument t gebildet:
$$g(t) = \frac{df}{dt}.$$
Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $G(s)$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie für die gegebenen LAPLACE-Transformierten $F_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) jeweils den Grenzwert der Originalfunktion
$$\lim_{t\to\infty} f_i(t) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3,$$
falls er existiert. Geben Sie jeweils eine *mathematische Begründung* an, warum der Grenzwertsatz angewendet werden darf!

I. $F_1(s) = \dfrac{4s+3}{(s^4+3s^3+2s^2)(s+3)}$

II. $F_2(s) = \dfrac{s^2+2s+12}{(s^2+4s+3)(s^2+4)}$

III. $F_3(s) = \dfrac{3s^3+s^2-14s+36}{(s^3+7s^2+12s)(s+1)}$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Differenzengleichung (rekursive Relation)
$$x_{i+1} = 0.5x_i + 2u_i \qquad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$
mit $x_0 = -2$ und $u_i = \sigma_i + 3^i$.

a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $U(z)$ der Eingangsfolge u_i.
b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ der Lösung x_i obiger Differenzengleichung.
c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} x_i$, falls er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an.
d) Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die Lösung x_i.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 19. 12. 2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	4	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2 + 2u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 4u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ und der Eingangsfunktion $u(t)$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$ in Abhängigkeit von x_{10}, x_{20} und $U(s)$.
b) Für die Anfangswerte gelte nun $x_1(0) = x_2(0) = 0$, die Eingangsfunktion sei durch $u(t) = e^{-3t}$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die zugehörige Lösung $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Differenzengleichung (rekursive Relation)

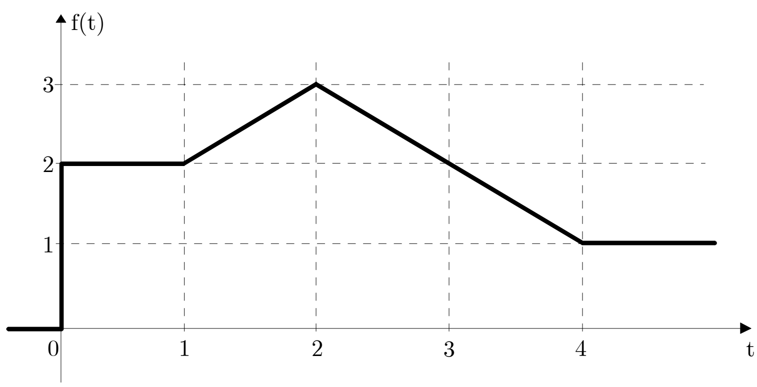
$$x_{i+1} = \frac{1}{2}x_i + u_i \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

mit $x_0 = 0$ und $u_i = \sigma_i + \left(\frac{1}{4}\right)^i$. Hierbei ist σ_i die diskrete Sprungfunktion.

a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $U(z)$ der Eingangsfolge u_i.
b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ der Lösung x_i obiger Differenzengleichung.
c) Berechnen Sie im Bildbereich (!) $\lim_{i\to\infty} x_i$, falls der Limes existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an.
d) Ermitteln Sie durch Anwendung der z-Transformation die Lösung x_i.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ der Funktion $f(t)$ gemäß nachfolgender Abbildung:



Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 30.01.2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	4	6
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_2 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und $u(t) = \sigma(t)$. Hierbei ist $\sigma(t)$ die Sprungfunktion.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Bestimmen Sie im Bildbereich den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x_2(t)$, sofern er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!
c) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.
d) Stellen Sie die Funktion $x_2(t)$ graphisch dar.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Folge

$$f_i = \sin^2(i\varphi) \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem konstanten reellen Parameter φ.

a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $F(z)$ der Folge f_i in Abhängigkeit des Parameters φ.
b) Zeigen Sie, dass für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ die z-Transformierte $F(z)$ folgende Gestalt besitzt:

$$F(z) = \frac{z(z+1)}{2(z-1)(z^2+1)}$$

c) Bestimmen Sie die z-Transformierte $G(z)$ der Folge

$$g_i = \alpha^i \sin^2(i\frac{\pi}{4}) \qquad i = 0,1,2,...$$

Hierbei ist α ein konstanter, reeller Parameter.

d) Bestimmen Sie für $\alpha = \frac{1}{2}$ den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} g_i$, falls dieser existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 30.03.2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 1$ und $x_2(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die zugehörigen LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Ermitteln Sie die zugehörigen Originalfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.
c) Ermitteln Sie die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ und $\lim_{t\to\infty} x_2(t)$, sofern sie existieren.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

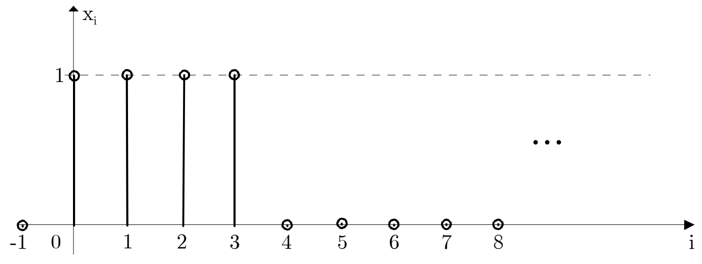
$$x_{i+1} = 2x_i - 5\sigma_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit $x_0 = 3$ und σ_i der sogenannten diskreten Sprungfunktion.

a) Ermitteln Sie den Wert x_5 durch Anwendung der z-Transformation.
b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} x_i$, sofern er existiert.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das diskrete Signal x_i gemäß nachfolgender Abbildung:



Zeigen Sie, dass die zugehörige z-Transformierte

$$X(z) = \frac{z^4 - 1}{z^3(z-1)}$$

lautet.

Begründen Sie Ihre Antworten!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 26.05.2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 + 3u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_2$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und $u(t) = \sigma(t)$. Hierbei ist $\sigma(t)$ die Sprungfunktion.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die zugehörigen LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

b) Bestimmen Sie im Bildbereich den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x_2(t)$, sofern dieser existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

c) Ermitteln Sie die zugehörig Originalfunktion $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Folge

$$f_i = i^2 \qquad i = 0,1,2,...$$

a) Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die zugehörige z-Transformierte durch

$$F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die z-Transformierte der Folge

$$g_i = \left(0.5\right)^i \cdot f_i \qquad i = 0,1,2,.... \; .$$

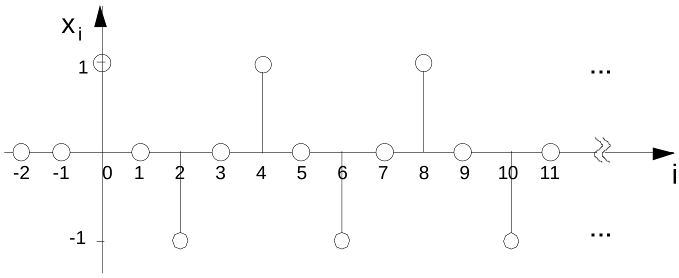
c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} g_i$, sofern dieser existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Folge

$$x_i = \begin{cases} 0 & i = 2n+1 \\ +1 & i = 4n \\ -1 & i = 4n+2 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

gemäß folgender Abbildung:



Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die zugehörige z-Transformierte

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$$

lautet.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 10.07.2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	3	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + 3x - 10\cos(t) = 0$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 1$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die zugehörige LAPLACE-Transformierte $X(s)$.

b) Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$, sofern er existiert. Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!

c) Ermitteln Sie die zugehörige Originalfunktion $x(t)$.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie in mathematisch nachvollziehbarer Weise folgende Eigenschaft der LAPLACE-Transformation:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = (-1)\frac{dF(s)}{ds}$$

Hierbei ist $F(s)$ die LAPLACE-Transformierte von $f(t)$.

b) Bestimmen Sie unter Anwendung der obigen Beziehung die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ von

$$f(t) = te^{-2t}.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = -0,5x_i + b\sigma_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit $x_0 = 10$ und σ_i der sogenannten diskreten Sprungfunktion. Hierbei ist b ein konstanter Parameter.

a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ der Funktion x_i.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Parameter b so, dass für den Grenzwert

$$x_\infty := \lim_{i\to\infty} x_i = 2$$

gilt. Begründen Sie *mathematisch*, warum der Grenzwertsatz angewendet werden darf.

c) Ermitteln Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung x_i.

d) Stellen Sie die fünf Werte x_i $(i = 0,1,2,3,4)$ graphisch dar.