Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 06.12.2013

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	3	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_{10}$ und $x_2(0) = 0$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Kann im vorliegenden Fall der *Grenzwertsatz* der LAPLACE-Transformation zur Bestimmung von $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ angewendet werden? Geben Sie eine *mathematische Begründung* für Ihre Antwort an!
c) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die zugehörigen Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.
d) Stellen Sie $x_1(t)$ graphisch dar.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = (t-2)\cdot\cos(t-2)\,.$$

Ermitteln Sie auf *mathematisch nachvollziehbare Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $F(s)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$x_{i+1} = 0.5x_i + u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 1$ und der Eingangsgröße

$$u_i = 2^i\,.$$

a) Geben Sie den Konvergenzbereich der z-Transformierten $U(z)$ an und stellen Sie ihn in der komplexen z-Ebene graphisch dar.
b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$.
c) Bestimmen Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung x_i.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 24.01.2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	3	5
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -4x + u$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ und der Eingangsfunktion

$$u(t) = \sigma(t) - e^{-t}.$$

a) Stellen Sie die Eingangsfunktion $u(t)$ graphisch dar.
b) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktion $X(s)$.
c) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die zugehörige Lösung $x(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$x_{i+2} = 0.25x_i + 2u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit den Anfangswerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 0$ und der Eingangsgröße $u_i = \sigma_i$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Verschiebungssatzes der z-Transformation folgende Relation:

$$Z\{f_{i+2}\} = z^2\left[F(z) - f_0\right] - zf_1.$$

b) Zeigen Sie unter Anwendung obiger Relation, dass für die z-Transformierte $X(z)$ gilt:

$$X(z) = \frac{z^3 - z^2 + 2z}{(z^2 - 0.25)(z-1)}$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der z-Transformation den Grenzwert $x_\infty = \lim_{i\to\infty} x_i$, sofern er existiert. (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)
d) Bestimmen Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung x_i.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 14.03.2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	5	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Relation:

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\,f(t)\right\} = \frac{1}{2}\left[F(s-ja)+F(s+ja)\right]$$

Hierbei ist $F(s)$ die LAPLACE-Transformierte der Funktion $f(t)$.

b) Zeigen Sie, dass die LAPLACE-Transformierte $G(s)$ der Funktion

$$g(t)=\cos(2t)\sin(3t)$$

durch

$$G(s)=\frac{3s^2+15}{s^4+26s^2+25}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$x_{i+1} = -\frac{1}{2}x_i + \beta u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 0$ und der Eingangsgröße $u_i = \sigma_i$. Hierbei ist β ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ der Funktion x_i.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Parameter β so, dass für den Grenzwert

$$x_\infty := \lim_{i\to\infty} x_i = 4$$

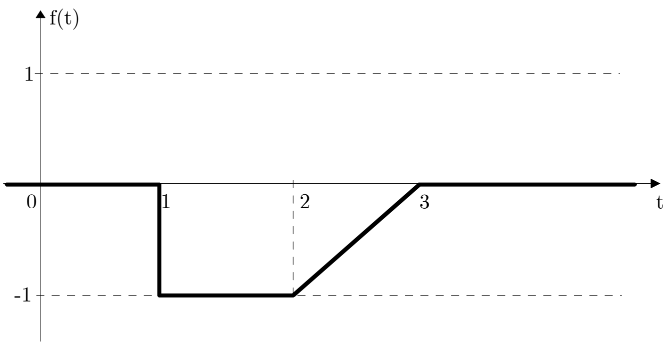
gilt. Begründen Sie *mathematisch*, warum der Grenzwertsatz angewendet werden darf.

c) Ermitteln Sie mit Hilfe der z-Transformation die Lösung x_i.

d) Stellen Sie die fünf Werte x_i $(i = 0,1,2,3,4)$ graphisch dar.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die zeitkontinuierliche Funktion $f(t)$ gemäß nachfolgender Abbildung:



Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $F(s)$ der Funktion $f(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 09.05.2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	4	6
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_1 + x_2 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - 2x_2$$

mit den Anfangswerten $x_1(t=0) = x_2(t=0) = 0$ und der Eingangsfunktion $u(t) = te^{-2t}$.

a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $U(s)$ der Eingangsfunktion $u(t)$.
b) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
c) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Lösung $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = \alpha x_i + u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 0$ und der Eingangsgröße $u_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \sin\left(\frac{3\pi}{2} i + \varphi_0\right)$. Hierbei sind α und φ_0 reelle Parameter.

a) Zeigen Sie in nachvollziehbarer Weise, dass die z-Transformierte $U(z)$ der Eingangsfolge u_i durch

$$U(z) = z\frac{z\sin(\varphi_0) - \frac{1}{2}\cos(\varphi_0)}{z^2 + \frac{1}{4}}$$

gegeben ist.
b) Bestimmen Sie durch Anwendung der z-Transformation die z-Transformierte $X(z)$ der Lösung x_i obiger Differenzengleichung.
c) Bestimmen Sie - unter Verwendung des Grenzwertsatzes der z-Transformation - den *größtmöglichen* Wertebereich der Parameter α und φ_0, damit der Grenzwert $x_\infty := \lim_{i\to\infty} x_i$ existiert.

Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 11.07.2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	5	2,5	2,5
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - x_2 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = x_2(0) = 0$ und der Eingangsfunktion $u(t) = \sigma(t) + e^{-3t}$.

a) Stellen Sie die Eingangsfunktion $u(t)$ für $t \geq 0$ graphisch dar.

b) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE-Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$, sofern er existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort *mathematisch*!

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die zugehörige Lösung $x_1(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die rekursive Relation (Differenzengleichung)

$$x_{i+1} = 0.75x_i + u_i \qquad i = 0,1,2,...$$

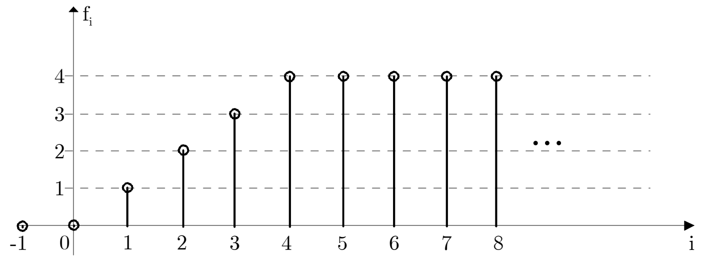
mit dem Anfangswert $x_0 = 1$ und der Eingangsgröße $u_i = (-0.5)^i$.

a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} x_i$, sofern er existiert. *Begründen* Sie Ihre Antwort *mathematisch*.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Folge f_i gemäß nachfolgender Abbildung:



Zeigen Sie, dass für die z-Transformierte $F(z)$ der Folge f_i gilt:

$$F(z) = \frac{(z^2+1)(z+1)}{z^3(z-1)}$$