Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 14. 10. 2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	5	2	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2 + \alpha u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und der Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$. Hierbei ist α ein konstanter Parameter.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE – Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$ in Abhängigkeit des Parameters α.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE – Transformation den Wert des Parameters α so, dass $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 10$ gilt. *Begründen* Sie, warum in diesem Fall der Grenzwertsatz angewendet werden darf!

c) Ermitteln Sie die zugehörigen Originalfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Aufgabe 2:

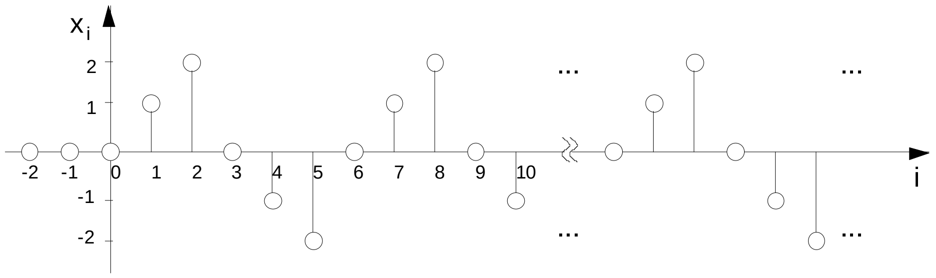
Gegeben sei die LAPLACE – Transformierte

$$F(s) = \frac{5s}{s^2 + 4s + 5}.$$

Ermitteln Sie die zugehörige Originalfunktion $f(t)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal x_i gemäß folgender Abbildung:



Zeigen Sie dass für die z-Transformierte der Folge x_i

$$X(z) = \frac{z(z+2)}{z^3+1} \text{ gilt.}$$

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 09. 12. 2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	3	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $$f(t)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\pi/2-t\right)-t\cos\left(t\right)\right].$$

a) Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $F(s)$.

b) Die Funktion $g(t)$ wird durch Ableiten der Funktion $f(t)$ nach der Zeit t gebildet:

$$g(t)=\frac{df}{dt}.$$

Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer Weise* die zugehörige LAPLACE-Transformierte $G(s)$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie für die gegebenen Funktionen $F_i(s)$ (mit $i=1,2,3$) im Bildbereich jeweils die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} f_i(t) \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to 0} f_i(t) \qquad \text{mit } i=1,2,3.$$

Geben Sie jeweils eine *mathematische Begründung* an, warum der Endwertsatz angewendet werden darf!

I. $$F_1(s)=\frac{5s^3+2s^2-3s+7}{(s^2+6s+8)(s^2+2s)}$$

II. $$F_2(s)=\frac{3s^2+1}{s^3+7s^2}$$

III. $$F_3(s)=\frac{4s^2+2s-7}{(s^2-3s+2)(s+5)}$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$x_{i+1}=3x_i-2u_i \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

mit $x_0=8/3$ und $u_i=\delta_i+2^i$. (δ_i entspricht hierbei dem zeitdiskreten Einheitsimpuls)

Ermitteln Sie den Wert x_{10} durch Anwendung der z – Transformation.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 25. 01. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	2	4	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:
Gegeben sei eine zeitdiskrete Funktion f_i (mit $i = 0,1,2,...$) und deren z-Transformierte $F(z)$. Ein „verrückter“ Professor behauptet, dass er die z-Transformierte der Funktion $g_i = \alpha^i f_i$ ganz einfach anhand $G(z) = F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ berechnen kann.
Beweisen Sie, dass der Professor doch nicht so verrückt ist und seine Aussage stimmt!

Aufgabe 2:
Gegeben sei die zeitdiskrete Funktion

$$f_i = \cos^2\left(i\omega T\right) \qquad (\text{mit } i = 0,1,2,...)$$

mit den konstanten reellen Parametern ω und T.

a) Bestimmen Sie die z-Transformierte $F(z)$ als Funktion der Parameter ω und T.
b) Zeigen Sie, dass für $\omega T = \frac{\pi}{4}$ die z-Transformierte $F(z)$ folgende Gestalt besitzt:

$$F(z) = \frac{z(2z^2 - z + 1)}{2(z-1)(z^2+1)}.$$

c) Bestimmen Sie die z-Transformierte $G(z)$ der zeitdiskreten Funktion

$$g_i = \alpha^i \cos^2\left(i\frac{\pi}{4}\right).$$

Hierbei sei α ein konstanter reeller Parameter.
d) Bestimmen Sie für $\alpha = 0.5$ den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} g_i$ mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation.

Aufgabe 3:
Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 0$ sowie der Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$. Mit $\sigma(t)$ symbolisieren wir hierbei den Einheitssprung.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE – Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Ermitteln Sie die Originalfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.
c) Stellen Sie die Verläufe $x_1(t)$ und $x_2(t)$ graphisch dar.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 02. 03. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	5	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie *mit Hilfe der LAPLACE - Transformation* das Integral $g(t)$

$$g(t) := \int_0^t \sin^2(2\tau) \cdot e^{-2(t-\tau)} d\tau .$$

HINWEIS: $\mathcal{L}\left\{\sin^2(2t)\right\} = \dfrac{8}{s(s^2+16)}$

Aufgabe 2:
Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2x_2 - 3u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 0$ und der Eingangsgröße u .

a) Ermitteln Sie die LAPLACE – Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ in Abhängigkeit der LAPLACE – Transformierten der Eingangsgröße $U(s)$.

b) Bestimmen Sie die Eingangsgröße $u(t)$, wenn $x_1(t)$ folgende Gestalt besitzt:

$$x_1(t) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{2}\sin\left(3t + \pi/4\right) - e^{-3t}\right].$$

Aufgabe 3:
Gegeben sei die z – Transformierte $F(z)$ der zeitdiskreten Folge f_i (mit $i = 0,1,2,...$):

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.7z + 0.7} .$$

a) Berechnen Sie *mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation* den Grenzwert $\lim_{i\to\infty} f_i$.
Geben Sie eine *mathematische Begründung* an, warum der Grenzwertsatz angewendet werden darf!

b) Bestimmen Sie die zeitdiskrete Folge f_i .

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 27. 04. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:
Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -6x_1 - 5x_2 + \beta u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und der Eingangsgröße $u(t) = 2 - e^{-3t}$. Hierbei ist β ein konstanter Parameter.

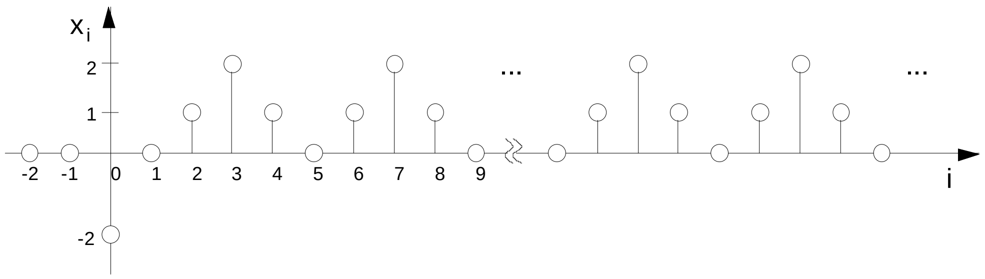
a) Bestimmen Sie die LAPLACE – Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ in Abhängigkeit des Parameters β.
b) Bestimmen Sie *mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE – Transformation* den Wert des Parameters β so, dass $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = 100$ gilt. *Begründen* Sie, warum in diesem Fall der Grenzwertsatz angewendet werden darf!
c) Ermitteln Sie die zugehörige Lösung $x_2(t)$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die z – Transformierte einer Folge f_i ($i = 0,1,2,\ldots$)

$$F(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 0.25)(z-1)}.$$

Bestimmen Sie in nachvollziehbarer Weise die Folge f_i.

Aufgabe 3:
Gegeben sei das zeitdiskrete Signal x_i gemäß folgender Abbildung:



Zeigen Sie, dass die z-Transformierte der Folge x_i durch

$$X(z) = -2 + \frac{(z+1)^2}{z^4 - 1}$$

gegeben wird.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 04. 07. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	2	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:
Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + u$$

mit den Anfangswerten

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$$

und der Eingangsgröße

$$u(t) = e^{-t}.$$

a) Bestimmen Sie die LAPLACE – Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)$. Benützen Sie dafür den *Grenzwertsatz* der LAPLACE – Transformation und *begründen* Sie, warum dieser angewendet werden darf!
c) Ermitteln Sie die zugehörige Lösung $x_1(t)$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \sin^2(3t)$$

Ermitteln Sie auf mathematisch nachvollziehbare Weise die zugehörige LAPLACE-Transformierte $F(s)$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$x_{i+1} = 0.75x_i - u_i \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

mit dem Anfangswert

$$x_0 = 0$$

und der Eingangsgröße

$$u_i = \sigma_i - 0.5^i \cos\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

(σ_i entspricht hierbei dem zeitdiskreten Einheitssprung).

a) Zeigen Sie, dass die z-Transformierte $U(z)$ der Eingangsgröße u_i folgende Gestalt besitzt:

$$U(z) = \frac{z(z+0.25)}{(z-1)(z^2+0.25)}.$$

b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ der Lösung der Differenzengleichung x_i.