Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 12. 11. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	3	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -3x + \alpha u$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ und der Eingangsfunktion

$$u(t) = 1 - e^{-3t}.$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie die LAPLACE - Transformierte $X(s)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE - Transformation den Parameter α so, dass für den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t) = 5$ gilt.

c) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Größe $x(t)$.
Geben Sie eine graphische Darstellung an. Hierbei soll vor allem der asymptotische Verlauf ($t \to 0$ und $t \to \infty$) erkennbar sein!

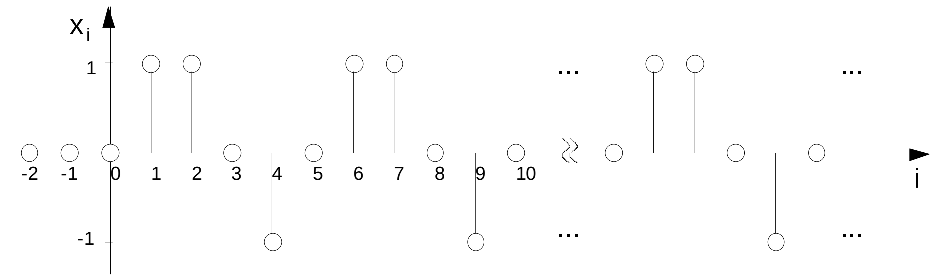
Aufgabe 2:

Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die LAPLACE - Inverse $f(t)$ von

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 10}.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal x_i gemäß folgender Abbildung:



a) Zeigen Sie dass für die z-Transformierte der Folge x_i

$$X(z) = \frac{z^4 + z^3 - z}{z^5 - 1}$$

gilt.

b) Betrachten Sie nun die z-Transformierte des Signals g_i:

$$G(z) = \frac{z^3 + z^2 - 1}{z^5 - 1}.$$

Stellen Sie das Signal g_i graphisch dar.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 17. 12. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	3	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \cos(\omega t)$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 0$. ω ist eine reelle und positive Konstante.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE – Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

b) Ermitteln Sie die Originalfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

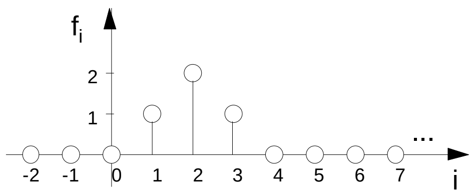
Aufgabe 2:

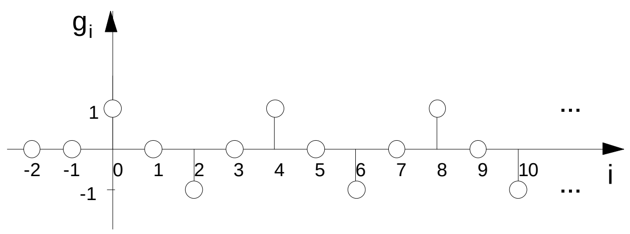
Bestimmen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die LAPLACE - Transformierte $Y(s)$ von

$$y(t) = \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \quad \text{mit } \omega > 0 .$$

Aufgabe 3:

Gegeben seien die zeitdiskreten Signale f_i und g_i gemäß folgender Abbildung:





a) Bestimmen Sie die z-Transformierten Größen $F(z)$ und $G(z)$.

b) Durch Faltung der Signale f_i und g_i entsteht das Signal $h_i = f_i * g_i$. Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die z-Transformierte des Signals h_i durch

$$H(z) = \frac{(z+1)^2}{z(z^2+1)}$$

gegeben ist.

c) Berechnen Sie die Originalfunktion h_i.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 19. 01. 2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei das zeitdiskrete Signal $f_i = i^2 \qquad (i = 0,1,2,...)$.

a) Zeigen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise, dass die z-Transformierte durch $F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ gegeben ist.

b) Berechnen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die z-Transformierte des Signals

$$g_i = 0.5^i \cdot i^2 \qquad (i = 0,1,2,...).$$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Wert g_∞.

Aufgabe 2:

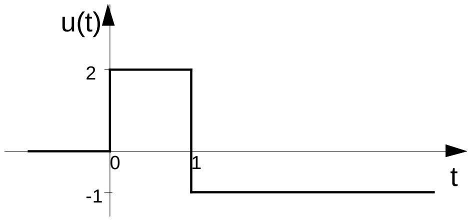
Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + u$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ und der allgemeinen Eingangsfunktion $u(t)$.

a) Bestimmen Sie durch Anwendung der LAPLACE – Transformation die Funktionen $X_1(s)$ und $X_2(s)$.

Als Eingangsfunktion $u(t)$ wird nun folgende Funktion gewählt:



$$u(t) = 2\sigma(t) - 3\sigma(t-1)$$

b) Berechnen Sie die LAPLACE – Transformierte $U(s)$.

c) Ermitteln Sie die Originalfunktion $x_1(t)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die z-Transformierte

$$F(z) = \frac{0.5}{z^2 - 1.5z + 0.5}.$$

Ermitteln Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise die Originalfolge f_i.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 04. 03. 2011

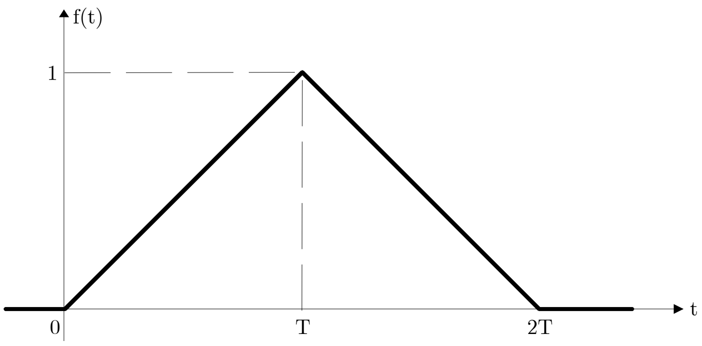
Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	3	4
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die zeitkontinuierliche Funktion $f(t)$ gemäß nachfolgender Abbildung:



a) Zeigen Sie, dass für die LAPLACE-Transformierte von $f(t)$

$$F(s)=\frac{1}{T}\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)^2$$

gilt.

b) Betrachten Sie nun die LAPLACE-Trasnsformierte der Funktion $g(t)$:

$$G(s)=\frac{1}{T}\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)^2 e^{-s}$$

Stellen Sie die Funktion $g(t)$ graphisch dar.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie auf mathematisch nachvollziehbare Weise die LAPLACE-Inverse $f(t)$ von

$$F(s)=\frac{s^2+s+2}{s^3+s^2+s+1}$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$x_{i+1}=2x_i-5\sigma_i \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

mit $x_0=3$ und σ_i der sogenannten diskreten Sprungfunktion.

Ermitteln Sie den Wert x_5 durch Anwendung der z – Transformation.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 08. 04. 2011

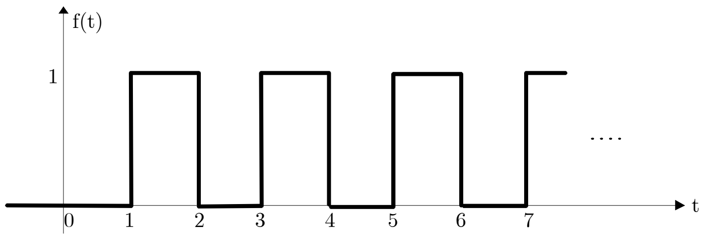
Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	3	2	5
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die für $t \geq 0$ periodische Funktion $f(t)$ gemäß nachfolgender Abbildung:



a) Zeigen Sie, dass für die LAPLACE-Transformierte von $f(t)$

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$$

gilt.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie auf mathematisch nachvollziehbare Weise die LAPLACE-Inverse $f(t)$ von

$$F(s) = \frac{2}{s^3}.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differenzengleichung (rekursive Relation)

$$6x_{i+2} - 5x_{i+1} + x_i = -u_{i+1} + 6u_i \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .$$

mit den Anfangswerten x_0 und x_1.

a) Ermitteln Sie die z-Transformierte $X(z)$ als Funktion von x_0, x_1 und der z-Transformierten $U(z)$.

b) Es sei nun $u_i = \delta_i = (1,0,0,0,\ldots)$ und $x_0 = 0$. Wie muss x_1 gewählt werden damit

$$x_i = 6\left[\delta_i + 3\left(\frac{1}{2}\right)^i - 4\left(\frac{1}{3}\right)^i\right]$$

gilt.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 04. 07. 2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	4	4	2
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

a) Beweisen Sie in *mathematisch nachvollziehbarer* Weise folgendes Gesetz der LAPLACE-Transformation:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = (-1)\frac{dF(s)}{ds}$$

b) Bestimmen Sie unter Anwendung des obigen Gesetzes die LAPLACE -Transformierte $F(s)$ von

$$f(t) = \frac{d}{dt}\left(t \cdot \sin(t)\right).$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgende Differenzengleichung

$$x_{i+1} = 2x_i - u_i, \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert $x_0 = 0$ und der Eingangsgröße

$$u_i = \sin^2\left(i\frac{\pi}{2}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass die z -Transformierte der Eingangsgröße u_i durch

$U(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-1)}$ gegeben ist.

b) Transformieren Sie die Differenzengleichung in den Bildbereich und bestimmen Sie die z -Transformierte $X(z)$.

c) Ermitteln Sie die Originalfolge x_i.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -2x + u$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ und der Eingangsfunktion

$$u(t) = e^{-3t}.$$

a) Bestimmen Sie die LAPLACE - Transformierte $X(s)$.

b) Bestimmen Sie die Originalfunktion $x(t)$.