Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 13. 11. 2009

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	2	5	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Überprüfen Sie die Richtigkeit folgender Relation mittels der LAPLACE-Transformation:

$$\frac{d}{dt}\left(A\sin(\omega t)+Be^{-\alpha t}\right)\equiv \omega A\cos(\omega t)-\alpha Be^{-\alpha t}.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}=-2x+u$$

mit dem Anfangswert $x(t=0)=\frac{3}{8}$ und der Eingangsgröße $u(t)=\cos^2 t$.

a) Zeigen Sie, dass die LAPLACE – Transformierte der *stationären* Lösung $x_{stat}(t)$ durch

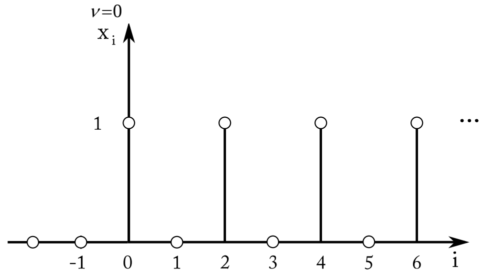
$$X(s)=\frac{1}{8}\left(\frac{s}{\left(s^2+4\right)}+\frac{2}{\left(s^2+4\right)}\right)+\frac{1}{4s}$$

gegeben ist.

b) Ermitteln Sie die *stationäre* Lösung $x_{stat}(t)$.

Aufgabe 3:

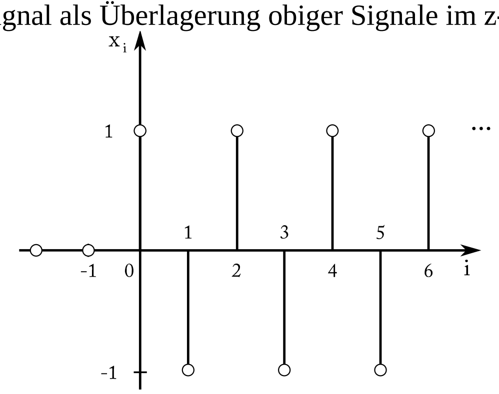
Gegeben sei das folgende Signal $x_i=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{i-\nu k}$ mit $k=2$:



a) Berechnen Sie auf mathematisch nachvollziehbare Weise die zugehörige z-Transformierte.

b) Ermitteln Sie die z-Transformierte für Signale der Form $x_i=\sum_{\nu=0}^{\infty}\delta_{i-\nu k}$. Hierbei sei k eine beliebige nichtnegative ganze Zahl.

c) Stellen Sie folgendes Signal als Überlagerung obiger Signale im z-Bereich dar.



Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 17. 12. 2009

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	4	5
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

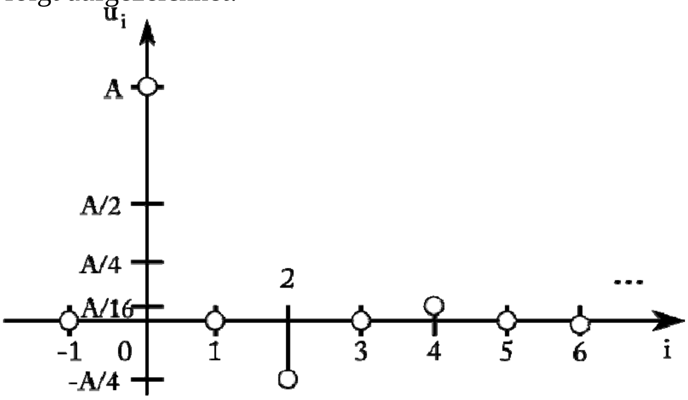
Die Position x_i eines simplen Roboters genüge der folgenden rekursiven Relation:

$$x_{i+1} = x_i + u_i, \qquad i = 0,1,\dots .$$

Das Steuersignal u_i besitzt die Form

$$u_i = \alpha^i A\cos(i\varphi) .$$

Hierbei sind α , A und φ reelle Parameter.
Das Signal wurde wie folgt aufgezeichnet:



a) Entnehmen Sie der Skizze die Werte der Parameter α und φ .

b) Ermitteln Sie die z-Transformierte $U(z)$ des Steuersignals.

c) Zeigen Sie, dass die z-Transformierte der Position x_i durch

$$X(z) = A\frac{z^2}{(z-1)(z^2+\alpha^2)}$$

gegeben ist, wenn die Anfangsposition $x_0 = 0$ ist.

d) Der Roboter erreichte nach hinreichend langer Zeit die Position $\lim_{i\to\infty} x_i = 10$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der z-Transformation den Wert von A .

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Inverse $x(t)$ von

$$X(s) = \frac{7s^2 + 5\alpha s + 18}{(s+\alpha)(s^2+9)}$$

b) Berechnen Sie die stationären Lösungen $x_{stat}(t)$ in Abhängigkeit vom reellen Parameter α .

c) Es sei nun folgende Funktion $x_2(t)$ gegeben:

$$x_2(t) = 2e^{-\alpha(t-\tau)} + 5\cos(3(t-\tau)) ,$$

wobei τ ein reeller Parameter ist. Ermitteln Sie die zugehörige LAPLACE-Transformierte.

d) Der Student D. weiß, dass der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-\alpha t}, \qquad \alpha > 0, n = 1,2$$

existiert, aber er kann ihn nicht berechnen. Ermitteln Sie für die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$ den jeweiligen Grenzwert mit Hilfe der LAPLACE-Transformation.

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 28. 01. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	6	6
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Die Dynamik eines Luftkissenfahrzeuges wird durch folgende Differentialgleichungen beschrieben:

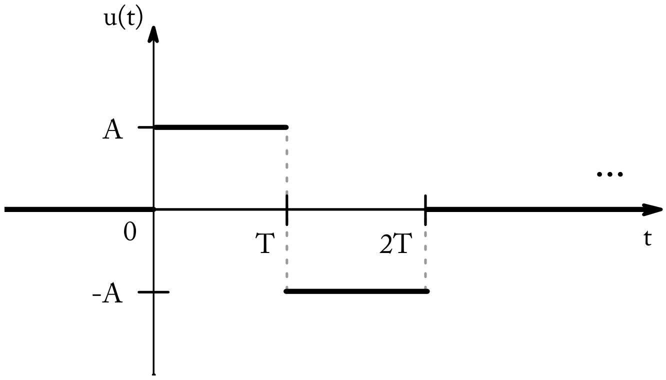
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad x_1(t=0) =: x_{1,0}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = u, \qquad x_2(t=0) =: x_{2,0}$$

Dabei symbolisiert x_1 die Position des Luftkissenfahrzeuges und x_2 dessen Geschwindigkeit. Als u wird die auf das Fahrzeug wirkende Beschleunigung bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ von $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ in Abhängigkeit von $U(s)$, der LAPLACE-Transformierten von $u(t)$.

Das Luftkissenfahrzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t=0$ an der Stelle $x_{1,0}=0$ und in Ruhe, also $x_{2,0}=0$.

Die Beschleunigung $u(t)$ entspreche nun einer stückweise konstanten Funktion der folgenden Form:



Hierbei seien *A* und *T* zwei positive reelle Parameter.

b) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierte $U(s)$. Zeigen Sie, dass die LAPLACE-Transformierte $X_1(s)$ als

$$X_1(s) = A\frac{\left(1-e^{-sT}\right)^2}{s^3}$$

angeschrieben werden kann.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation die konstante Endposition $x_{1,\infty}$ mit

$$x_{1,\infty} := \lim_{t\to\infty} x_1(t).$$

Hinweis: Benützen Sie die Regel von de l'Hôpital.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Formel von EULER, dass die z-Transformierte des Signals

$$x_i = a^i \cos\left(\frac{i\pi}{2}\right), \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

durch

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 + a^2}$$

gegeben ist ist. Hierbei sei *a* ein beliebiger reeller Parameter.

b) Gegeben sei nun die z-Transformierte

$$X(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z - 0.5)(z^2 + 1)}.$$

Berechnen Sie die zugehörige inverse z-Transformierte x_i .

Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 05. 03. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

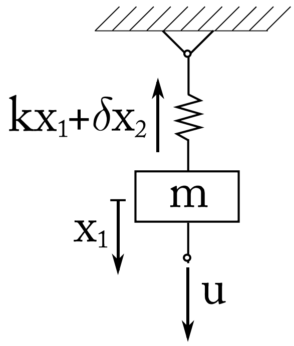
	1	2
erreichbare Punkte	8	3
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Ein Feder-Masse - System wird durch folgende Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad x_1(t=0) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -kx_1 - \delta x_2 + u, \qquad x_2(t=0) = 0$$



Dabei symbolisiert x_1 die Position der Masse m und x_2 deren Geschwindigkeit; k und δ seien positive reelle Parameter. Als u wird die auf die Masse wirkende normierte Beschleunigung bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$ von $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ in Abhängigkeit von $U(s)$, der LAPLACE-Transformierten von $u(t)$.

b) Es sei nun $u = \sigma(t)$. Zeigen Sie, dass die LAPLACE-Transformierte $X_1(s)$ als

$$X_1(s) = \frac{1}{s(s^2 + \delta s + k)}$$

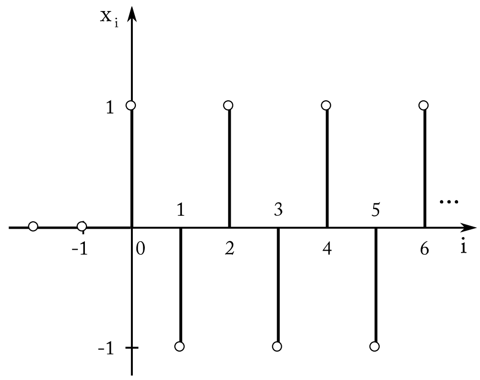
angegeben werden kann.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $x_{1,stat} := \lim_{t\to\infty} x_1(t)$ mittels des Grenzwertsatzes der LAPLACE-Transformation für den Fall $\delta > 0$.

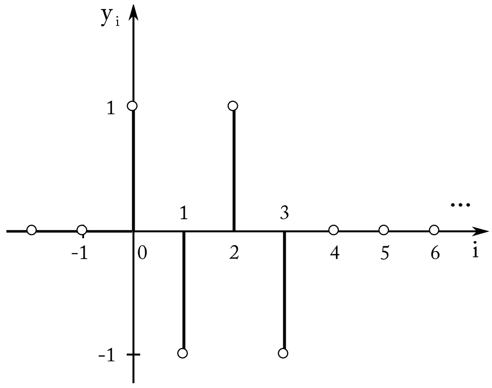
d) Berechnen Sie den Verlauf der Position $x_1(t)$ für den sogenannten aperiodischen Grenzfall $k = 1$, $\delta = 2$.

Aufgabe 2:

a) Ermitteln Sie die z-Transformierte $X(z)$ des im folgenden Bild gezeigten Signals x_i:



b) Stellen Sie die z-Transformierte $Y(z)$ des folgenden abgeschnittenen Signals y_i als Überlagerung zweier Signale x_i dar:



Schriftliche Prüfung aus **Signaltransformationen**
Teil: Dourdoumas
am 05. 07. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	5	2	3
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende Differenzengleichung

$$x_{i+1} = -0.5x_i - u_i\,, \qquad i = 0,1,2,...$$

mit dem Anfangswert x_0 und der Eingangsgröße

$$u_i = \cos\left(i\omega T + \varphi\right).$$

Hierbei sind ω, T und φ reelle Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die z-Transformierte der Eingangsgröße u_i durch

$U(z) = \dfrac{z^2 \cos\varphi - z\cos(\omega T - \varphi)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$ angegeben werden kann.

b) Für die Parameter der Eingangsgröße u_i gelte nun $\omega T = \dfrac{\pi}{2}$ und $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Zeigen Sie, dass für hinreichend große Werte i die stationäre Lösung von x_i durch die Funktion $x_{stat\,i} = \dfrac{2}{5}\left[\sin\left(i\dfrac{\pi}{2}\right) - 2\cos\left(i\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ gegeben ist.

c) Wählen Sie den Anfangswert x_0 derart, dass bei Aufgabe b)

$$x_i = x_{stat\,i}$$

für *alle* Werte von $i = 0,1,2,...$ gilt.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die LAPLACE - Transformierte $F(s)$ von

$$f(t) = t\cdot\sin(\omega t)\,.$$

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die LAPLACE - Inverse $x(t)$ von

$$X(s) = \frac{2s+1}{s\left(s+5\right)}\cdot e^{-sT}\,.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.