

# Regelungstechnik 3



Institut für Regelungs- und  
Automatisierungstechnik





(c) Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

**Hinweis:** Dieses Skriptum dient als Lernbehelf und ersetzt den Besuch der Lehrveranstaltung *nicht!* Prüfungsrelevant sind ausschließlich die in der Lehrveranstaltung behandelten Themen.

Version vom 5.10.2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lineare Systeme im Zustandsraum</b>	<b>5</b>
1.1	Einführung . . . . .	5
1.2	Lösung der Systemgleichungen . . . . .	5
1.2.1	Freie Lösung . . . . .	6
1.2.2	Erzwungene Lösung . . . . .	7
1.2.3	Übertragungsfunktion . . . . .	8
1.3	Transitionsmatrix . . . . .	8
1.4	Asymptotische Stabilität . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Zustandstransformationen</b>	<b>15</b>
2.1	Einführung . . . . .	15
2.1.1	Invarianz der Übertragungsfunktion . . . . .	16
2.1.2	Invarianz der Stabilitätseigenschaft . . . . .	17
2.2	Transformation auf Diagonalform . . . . .	17
2.2.1	Transformationsvorschrift . . . . .	18
2.2.2	Berechnung der Transitionsmatrix . . . . .	22
2.2.3	Komplexe Eigenwerte . . . . .	23
2.2.4	Mehrfache Eigenwerte . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Lineare Übertragungssysteme</b>	<b>29</b>
3.1	Einführung . . . . .	29
3.2	Übergang von $G(s)$ zu einem Zustandsmodell . . . . .	30
3.2.1	Erste Normalform . . . . .	31
3.2.2	Zweite Normalform . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit</b>	<b>37</b>
4.1	Einführung . . . . .	37
4.2	Steuerbarkeit . . . . .	37
4.2.1	Kriterium nach Kalman . . . . .	37
4.2.2	Kriterium nach Hautus . . . . .	40
4.2.3	Steuerbarkeit eines Systems in der ersten Normalform . . . . .	41
4.3	Beobachtbarkeit . . . . .	41
4.3.1	Kriterium nach Kalman . . . . .	42
4.3.2	Kriterium nach Hautus . . . . .	43

4.3.3	Beobachtbarkeit eines Systems in der zweiten Normalform . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Entwurf von Zustandsreglern</b>	<b>45</b>
5.1	Einführung . . . . .	45
5.2	Stabilisierung des Regelkreises . . . . .	45
5.2.1	Prinzip der Eigenwertvorgabe . . . . .	46
5.2.2	Stabilisierbarkeit . . . . .	49
5.2.3	Entwurf für ein System in Regelungsnormalform . . . . .	50
5.2.4	Transformation auf Regelungsnormalform . . . . .	51
5.2.5	Formel von Ackermann . . . . .	54
5.2.6	Stabilisierung beliebiger Arbeitspunkte . . . . .	56
5.3	Nachführung . . . . .	57
5.3.1	Deutung des Regelkreises im Frequenzbereich . . . . .	62
5.4	PI - Zustandsregler . . . . .	63
5.5	Wahl der Eigenwerte . . . . .	68
5.5.1	Dominantes Eigenwertpaar . . . . .	68
5.5.2	Linear-Quadratischer Regler . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Entwurf von Zustandsbeobachtern</b>	<b>81</b>
6.1	Einführung . . . . .	81
6.2	Trivialer Beobachter . . . . .	81
6.3	Luenberger-Beobachter . . . . .	82
6.4	Der Beobachter im Regelkreis . . . . .	85
6.4.1	Separationstheorem . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Entwurf von Vorsteuerungen</b>	<b>89</b>
7.1	Einführung . . . . .	89
7.2	Entwurf für den Standardregelkreis . . . . .	89
7.2.1	Entwurf durch „direkte Inversion“ der Regelstrecke . . . . .	90
7.2.2	Flachheitsbasierter Entwurf . . . . .	92
7.3	Entwurf für Zustandsregelungen . . . . .	95

# Kapitel 1

## Lineare Systeme im Zustandsraum

### 1.1 Einführung

In diesem Kapitel werden lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1.1)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d u \quad (1.2)$$

mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0 = 0)$$

analysiert. Mit  $\mathbf{x}$  wird der  $n$ -dimensionale Zustandsvektor bezeichnet,  $u$  ist die Eingangsgröße und  $y$  die Ausgangsgröße des Systems. Die Zeitinvarianz von (1.1) impliziert, dass die Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , der Eingangsvektor  $\mathbf{b}$ , der Ausgangsvektor  $\mathbf{c}$  und der Durchgriff  $d$  konstante Größen passender Dimensionen sind.

### 1.2 Lösung der Systemgleichungen

Da es sich bei den Zustandsgleichungen (1.1) um lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten handelt, kann die Laplace-Transformation eingesetzt werden. Wendet man (??) auf (1.1) an, so erhält man

$$s\bar{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

wobei

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} \quad \text{und} \quad \bar{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

wobei  $\mathbf{E}$  die  $n \times n$  - Einheitsmatrix repräsentiert. Nach einer Multiplikation mit  $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  von links findet man

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\bar{u}(s). \quad (1.3)$$

Definiert man die  $n \times n$  - Matrix

$$\bar{\phi}(s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad \text{d.h.} \quad \phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\}, \quad (1.4)$$

so gilt - nach Anwendung des Faltungssatzes - für die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \phi(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Der Lösungsvektor  $\mathbf{x}(t)$  repräsentiert das zeitliche Verhalten des Systems (1.1) als Reaktion auf einen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $u(t)$ . Das Systemverhalten (1.5) kann in zwei additive Anteile zerlegt werden. Der erste Anteil rührt von der „Vorgeschichte“ des Systems her, also vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$ , man spricht von der **freien Lösung**  $\mathbf{x}_{frei}(t)$ . Im Gegensatz dazu wird der zweite Anteil durch den Verlauf der Eingangsgröße  $u(\tau)$  im Intervall  $0 \leq \tau \leq t$  geprägt, man spricht von der **erzwungenen Lösung**  $\mathbf{x}_{erzw}(t)$ . Diese Erkenntnis kann man folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{frei} + \mathbf{x}_{erzw} \quad (1.6)$$

Die Ausgangsgröße kann mittels Relation (1.2) berechnet werden, im Bildbereich gilt mit (1.3)

$$\bar{y}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \bar{u}(s), \quad (1.7)$$

bzw. unter Verwendung von (1.5) im Zeitbereich

$$y(t) = \mathbf{c}^T \phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T \phi(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + d u(t). \quad (1.8)$$

Analog zu (1.5) kann die Ausgangsgröße also in einen Anteil, der vom Anfangszustand herrührt und einen Anteil, der vom Verlauf der Eingangsgröße geprägt wird, zerlegt werden.

### 1.2.1 Freie Lösung

Unter der freien Lösung eines Systems versteht man diejenige Lösung  $\mathbf{x}(t)$ , die sich ergibt, wenn das System *ausschließlich* durch den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  angeregt wird. Somit ist hier das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.9)$$

zu untersuchen. Gemäß (1.5) gilt für die Lösung dann

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0. \quad (1.10)$$

Die Matrix  $\phi(t)$  wird **Transitionsmatrix**<sup>1</sup> genannt, sie beschreibt den Übergang des Zustandsvektors von seinem Anfangswert zu seinem Wert zum Zeitpunkt  $t$ . Ihre Berechnung kann mit Hilfe von Formel (1.4) erfolgen, alternative Berechnungsmethoden folgen später.

<sup>1</sup>lat. *transire* = übergehen

**B** Für das autonome System zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

ergibt sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix gemäß (1.4) zu

$$\bar{\phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s(s-3)} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}.$$

Eine Partialbruchzerlegung und anschließende Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$\phi(t) = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{s} + \frac{1}{s-3} & -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-3} \\ -\frac{2}{s} + \frac{2}{s-3} & \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Für den zeitlichen Verlauf des Zustandsvektors gilt somit

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \right) x_{1,0} + \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \right) x_{2,0} \\ \left( -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \right) x_{1,0} + \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \right) x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

■

### 1.2.2 Erzwungene Lösung

Die erzwungene Lösung oder Bewegung eines Systems ist diejenige Lösung  $\mathbf{x}(t)$ , die sich ergibt, wenn das System bei *verschwindendem* Anfangszustand<sup>2</sup>  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  durch die Eingangsgröße  $u(t)$  angeregt wird. Nach (1.5) gilt unter diesen Umständen

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \phi(t-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (1.11)$$

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dx}{dt} = -x + u$$

eines linearen, zeitinvarianten Systems erster Ordnung mit der Eingangsgröße  $u$ . Mit Hilfe von (1.11) findet man mit  $\phi(t) = e^{-t}$  für die erzwungene Lösung

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot 1 \cdot u(\tau) d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) d\tau.$$

Wählt man beispielsweise als Eingangsgröße einen Einheitssprung, d.h.  $u(t) = \sigma(t)$ , so gilt

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

■

<sup>2</sup>man sagt: "Das System befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe"



### 1.2.3 Übertragungsfunktion

Für die Ausgangsgröße folgt unter der Annahme  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  aus (1.7) im Bildbereich unmittelbar

$$\bar{y}(s) = [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \bar{u}(s). \quad (1.12)$$

Der Ausdruck

$$G(s) := \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (1.13)$$

ist die so genannte **Übertragungsfunktion** des Systems. Sie beschreibt das Übertragungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten Systems im Bildbereich.

**B** Gegeben sei das Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1] \mathbf{x} + 2u.$$

Für die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des Systems gilt dann

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 = \frac{2s^2 - 8s - 3}{s^2 - 5s - 2}.$$

Weiterführende Informationen über die Übertragungsfunktion finden sich in Kapitel 3 ■

## 1.3 Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix  $\phi(t)$  prägt das zeitliche Verhalten von linearen Systemen, siehe (1.5). In diesem Abschnitt werden einige elementare Eigenschaften der Transitionsmatrix vorgestellt. Zunächst wird ein System erster Ordnung untersucht, die dort gefundenen Erkenntnisse werden danach auf Systeme höherer Ordnung übertragen.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell eines autonomen Systems erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \text{mit} \quad x_0 := x(t=0),$$

wobei  $a$  eine reelle Konstante ist. Die Lösung  $x(t)$  kann mit (1.10) berechnet werden, wobei

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{(s-a)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}.$$

Daraus folgt

$$x(t) = e^{at} x_0.$$

Offensichtlich erfüllt die Transitionsmatrix im skalaren Fall ( $n = 1$ ) die Bedingungen

$$\phi(0) = 1, \quad \frac{d\phi(t)}{dt} = a\phi(t), \quad \phi^{-1}(t) = \phi(-t) \quad \text{und} \quad \phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2) \quad (1.14)$$

und kann als unendliche Reihe

$$\phi(t) = e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + a^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{t^i}{i!} \quad (1.15)$$

angeschrieben werden. ■

Es wird nun gezeigt, dass die in obigem Beispiel angeführten Eigenschaften der Transitionsmatrix für den Fall  $n > 1$  verallgemeinert werden können. Aus (1.10) folgt zunächst unmittelbar die Beziehung

$$\phi(0) = \mathbf{E}. \quad (1.16)$$

Setzt man (1.10) in (1.9) ein, so findet man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\phi(t) \mathbf{x}_0,$$

woraus sich -  $\mathbf{x}_0$  ist ein *beliebiger* Anfangszustand - die Beziehung

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{A}\phi(t) \quad (1.17)$$

ableiten lässt. Wie in Bild 1.1 angedeutet, gelten gemäß (1.10) für zwei beliebige Zeitpunkte  $t = t_1$  und  $t = t_1 + t_2$  die Beziehungen

$$\mathbf{x}(t_1) = \phi(t_1) \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(t_1 + t_2) = \phi(t_1 + t_2) \mathbf{x}_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung der Systemgleichungen muss auch die Beziehung

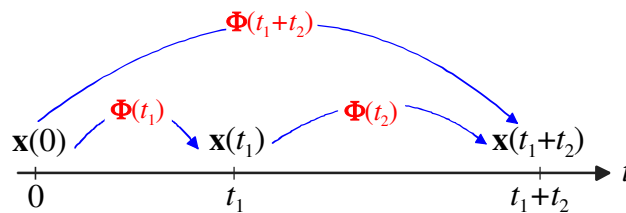


Bild 1.1: Bedeutung der Transitionsmatrix

$$\mathbf{x}(t_1 + t_2) = \phi(t_2) \mathbf{x}(t_1)$$

gelten, sodass sich unmittelbar die Relation

$$\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_2)\phi(t_1) = \phi(t_1)\phi(t_2) \quad (1.18)$$

ergibt. Im Speziellen resultiert für  $t_2 = -t_1$  daraus

$$\phi^{-1}(t) = \phi(-t), \quad (1.19)$$

d.h. die Transitionsmatrix ist für endliche Werte von  $t$  regulär.

Aufgrund der Analogien zwischen (1.16), (1.17), (1.18), (1.19) und den Eigenschaften (1.14) der Exponentialfunktion liegt es nahe, die Transitionsmatrix  $\phi(t)$  als **Matrix-Exponentialfunktion**, d.h. als matrixwertige Verallgemeinerung der skalaren Exponentialfunktion, zu interpretieren. Aus diesem Grund wird häufig die Schreibweise

$$\phi(t) := e^{\mathbf{A}t}. \quad (1.20)$$

verwendet. In Anlehnung an (1.15) wird der Reihenansatz

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^i}{i!} \quad (1.21)$$

gewählt. Hierbei gilt

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \mathbf{A}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{A}^k = \prod_{i=1}^k \mathbf{A}$$

Die Differentiation nach der Zeit bestätigt, dass die Matrix-Exponentialreihe (1.21) die Beziehung (1.17) erfüllt, denn es gilt:

$$\frac{d\phi}{dt} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3 \frac{t^2}{2!} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} = \mathbf{A} \phi(t)$$

Es sei angemerkt, dass (1.21) in den wenigsten Fällen dazu geeignet ist, eine *geschlossene Darstellung* der Transitionsmatrix zu ermitteln. Das folgende Beispiel stellt eine Ausnahme dar.

**B** Gegeben sei das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Für die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  gilt<sup>3</sup>

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad i \geq 2,$$

d.h. die Transitionsmatrix ist gemäß (1.21) gegeben durch

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wie man überprüfen kann, erfüllt  $\phi(t)$  die Bedingungen (1.16), (1.17), (1.18) und (1.19). ■

<sup>3</sup>eine solche Matrix nennt man *nilpotent*.

Für den Fall einer *idempotenten* Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , d.h.  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  kann mittels (1.21) eine Formel zur Berechnung der Transitionsmatrix abgeleitet werden. Es gilt

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}\frac{t^3}{3!} + \dots = \mathbf{E} + \mathbf{A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} = \mathbf{E} + \mathbf{A} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} - \mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} - 1 \right),$$

d.h. mit der Exponentialreihe (1.15) folgt unmittelbar

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A} (e^t - 1). \quad (1.22)$$

**B** Gegeben sei das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Da die Systemmatrix idempotent ist, kann man die Transitionsmatrix mittels (1.22) berechnen und es gilt

$$\phi(t) = \mathbf{E} + \mathbf{A} (e^t - 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t & e^t - 1 \\ \frac{1}{4}(e^t - 1) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

## 1.4 Asymptotische Stabilität

Zur Beurteilung der so genannten **asymptotischen Stabilität** wird das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0) \quad (1.23)$$

betrachtet. Das System (1.23) wird **asymptotisch stabil** genannt, wenn für *jeden* Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (1.24)$$

erfüllt ist. Das bedeutet, dass jede Trajektorie - unabhängig von ihrem Startpunkt  $\mathbf{x}_0$  - für  $t \rightarrow \infty$  in den Ursprung des Zustandsraumes einläuft.

Aus obiger Definition geht auch hervor, dass ein asymptotisch stabiles System (1.23) als einzige Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  den Koordinatenursprung des Zustandsraumes besitzt.

Da (1.24) für jeden beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  gelten muss, folgt aus (1.10) unmittelbar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

Das bedeutet, dass jedes Element der Transitionsmatrix eines asymptotisch stabilen Systems für  $t \rightarrow \infty$  verschwindet. Dies kann mit Hilfe des Endwertsatzes der Laplace-Transformation überprüft werden. Dazu wird die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix

$$\bar{\phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\text{adj}}.$$

betrachtet. Dabei ist  $\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$  das charakteristische Polynom der Matrix  $\mathbf{A}$ , das den Polynomgrad  $n$  besitzt. Die Adjunkte  $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\text{adj}}$  ist eine Polynommatrix, deren Elemente Polynomgrade kleiner oder gleich  $(n - 1)$  besitzen. Die Elemente von  $\bar{\phi}(s)$  sind also gebrochen rationale Funktionen. Gemäß dem Endwertsatz ist (1.25) genau dann erfüllt, wenn die Nennerpolynome aller Elemente von  $\bar{\phi}(s)$  Hurwitzpolynome sind.

**B** Gegeben sei

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (1.26)$$

Für  $\bar{\phi}(s)$  gilt dann

$$\bar{\phi}(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 3s - 10}}_{\Delta(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s + 4 & 2 \\ 3 & s - 1 \end{bmatrix}}_{(s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\text{adj}}}.$$

■

Die Nennerpolynome der Elemente von  $\bar{\phi}(s)$  sind sicher Hurwitzpolynome, wenn  $\Delta(s)$  ein Hurwitzpolynom ist. Hierbei handelt es sich sogar um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Da die Nullstellen von  $\Delta(s)$  die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind, gilt zusammenfassend:

Das System (1.23) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  einen negativen Realteil besitzen. Eine solche Matrix nennt man auch **Hurwitzmatrix**.

**B** Die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  aus (1.26) lauten

$$s_1 = 2 \quad \text{und} \quad s_2 = -5.$$

Das bedeutet, dass (1.26) nicht asymptotisch stabil ist, was auch den in Bild 1.2 dargestellten Trajektorien zu entnehmen ist. ■

**B** Das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix des Systems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (1.27)$$

lautet

$$\Delta(s) = s^2 + 3s + 2,$$

d.h. für die Eigenwerte gilt

$$s_1 = -1 \quad \text{und} \quad s_2 = -2.$$

Das bedeutet, dass das System asymptotisch stabil ist. Dies wird durch die in Bild 1.3 dargestellten Trajektorien bestätigt. ■

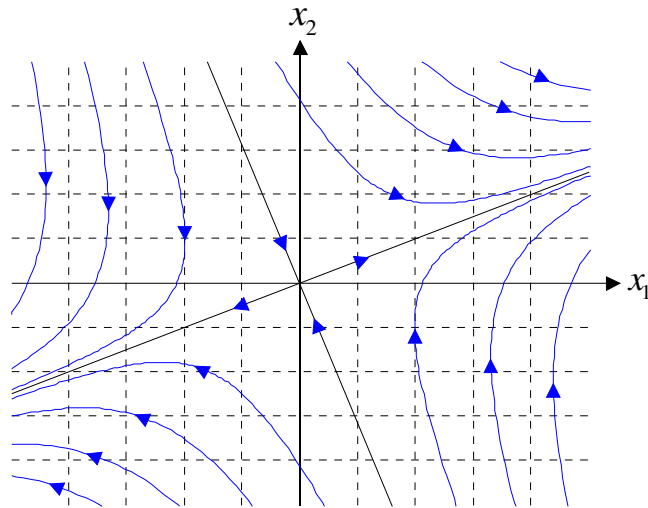


Bild 1.2: Trajektorien zu (1.26) - man spricht in diesem Zusammenhang von einem (instabilen) Sattelpunkt

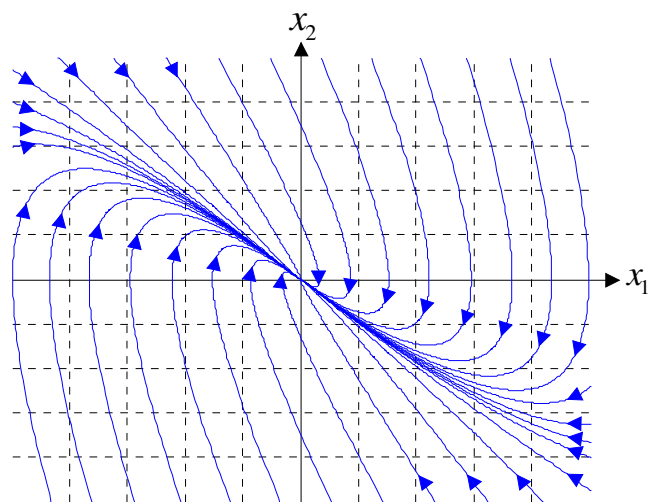


Bild 1.3: Trajektorien zu (1.27) - man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem stabilen Knoten



# Kapitel 2

## Zustandstransformationen

### 2.1 Einführung

Wie bereits erwähnt wurde, ist die Wahl der Zustandsvariablen zur Beschreibung eines dynamischen Systems nicht eindeutig, d.h. für ein und dasselbe System gibt es *unendlich viele* Zustandsbeschreibungen. Der Übergang zu „geeigneten“ Zustandsvariablen kann viele Aufgabenstellungen drastisch vereinfachen.

Bei einer **linearen Zustandstransformation** sind der ursprüngliche Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  und der transformierte Zustandsvektor  $\mathbf{z}$  über die (lineare) Relation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} \quad (2.1)$$

verknüpft, wobei die konstante  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{T}$  die so genannte **Transformationsmatrix** ist. Damit die Transformation umkehrbar eindeutig ist, muss  $\mathbf{T}$  regulär sein, man spricht deshalb auch von einer **regulären Zustandstransformation**. Man beachte, dass die Transformation (2.1) einem Wechsel der Basisvektoren des  $n$ -dimensionalen Zustandsraumes entspricht, es handelt sich bei (2.1) also um eine lineare Koordinatentransformation.

Die Anwendung der Transformationsvorschrift (2.1) auf (1.1) bzw. (1.2) liefert zunächst

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{b} u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{T} \mathbf{z} + d u$$

und in weiterer Folge (Multiplikation mit  $\mathbf{T}^{-1}$  von links)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} u = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}} u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{T} \mathbf{z} + d u = \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{z} + d u. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Das transformierte System liegt somit in der gleichen Form wie das Originalsystem (1.1) vor, wobei gilt

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}, \quad (2.3)$$



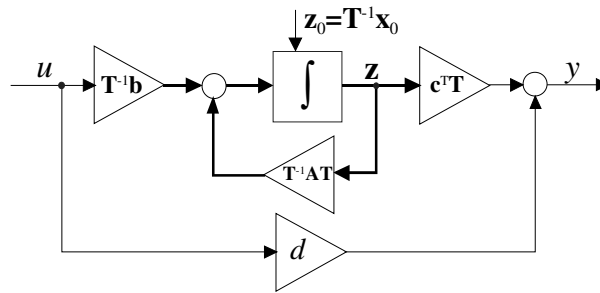


Bild 2.1: Strukturbild des transformierten Systems (2.2)

der Durchgriffsterm  $d$  bleibt durch die Transformation unverändert. Das zugehörige Strukturbild ist in Bild 2.1 dargestellt.

Es zeigt sich, dass einige wesentliche Systemeigenschaften *unabhängig* von der Wahl der Zustandsvariablen sind. Man nennt solche Eigenschaften **invariant** bezüglich einer regulären Zustandstransformation. Diese Erkenntnis ist nicht überraschend, wenn man bedenkt, dass das transformierte System (2.2) bloß eine alternative Beschreibung des ursprünglichen Systems (1.1), (1.2) darstellt.

### 2.1.1 Invarianz der Übertragungsfunktion

Für die Übertragungsfunktion des Originalsystems gilt gemäß (1.13)

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d.$$

Wird nun eine reguläre Zustandstransformation der Form  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$  durchgeführt, so gilt für die Übertragungsfunktion des transformierten Systems analog

$$\tilde{G}(s) = \tilde{\mathbf{c}}^T (s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} + d \stackrel{(2.3)}{=} \mathbf{c}^T \mathbf{T} (s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d.$$

Unter Ausnutzung der Relation

$$(\mathbf{V}\mathbf{W})^{-1} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V}^{-1}$$

für zwei beliebige reguläre  $n \times n$  Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  kann für  $\tilde{G}(s)$  auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \mathbf{c}^T [(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-1}]^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{c}^T [\mathbf{T}^{-1} (s\mathbf{E} - \mathbf{A})]^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \\ &= \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} + d = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = G(s). \end{aligned}$$

Offensichtlich ändert sich also durch eine reguläre Zustandstransformation die Übertragungsfunktion *nicht*.

### 2.1.2 Invarianz der Stabilitätseigenschaft

Wie gezeigt wurde, wird die Stabilität eines Systems (1.1) durch die Lage der  $n$  Eigenwerte  $s_i$  der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  geprägt. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}).$$

Für das charakteristische Polynom der Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  gilt analog

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}).$$

Unter Anwendung von (2.3) gilt weiter

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}). \quad (2.4)$$

Da für die Determinante des Produktes zweier  $n \times n$  Matrizen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  immer

$$\det(\mathbf{V}\mathbf{W}) = \det(\mathbf{V}) \det(\mathbf{W}) \quad (2.5)$$

gilt, kann (2.4) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\tilde{\Delta}(s) = \det[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{T}] = \det \mathbf{T}^{-1} \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \det \mathbf{T}.$$

Aus (2.5) folgt unmittelbar

$$\det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(\mathbf{T}) = 1,$$

d.h. es gilt

$$\tilde{\Delta}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \Delta(s). \quad (2.6)$$

Die transformierte Dynamikmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  besitzt also das gleiche charakteristische Polynom wie die Matrix  $\mathbf{A}$ . Das bedeutet, dass die Eigenwerte des transformierten Systems identisch mit den Eigenwerten des Originalsystems sind. Erwartungsgemäß ändert sich durch eine lineare Zustandstransformation der Stabilitätscharakter eines Systems somit *nicht*.

## 2.2 Transformation auf Diagonalform

Bei der Transformation in die so genannte **Diagonalform** wird das Ziel verfolgt, das Originalsystem in ein System von  $n$  entkoppelten Differentialgleichungen umzuwandeln. Das bedeutet, dass in jeder Differentialgleichung nur mehr *eine* Zustandsgröße vorkommt. Diese Zustandsvariable wird nur von der Eingangsgröße  $u$ , nicht jedoch von anderen Zustandsvariablen beeinflusst. Die Entkopplung weist erhebliche Vorzüge gegenüber der ursprünglichen Struktur des Originalsystems auf. So kann man jede der  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung ohne Rücksicht auf die anderen Differentialgleichungen lösen. Diese Tatsache kann beispielsweise bei der Berechnung der Transitionsmatrix des Originalsystems vorteilhaft ausgenutzt werden.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -46 & 36 \\ -60 & 47 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} -22 & 17 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

eines Systems mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$ . Nach Anwendung einer Zustandstransformation der Form (2.1) mit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

ergibt sich das transformierte System

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass das Modell des transformierten Systems aus zwei voneinander *entkoppelten* Differentialgleichungen besteht, da die Systemmatrix eine Diagonalmatrix ist. Man sagt, dass das transformierte System in Diagonalform vorliegt. Es ist offensichtlich, dass in dieser Form beispielsweise Aussagen über die Stabilität leicht möglich sind, da die (invarianten) Eigenwerte der Dynamikmatrix in der Hauptdiagonale angeordnet sind. ■

### 2.2.1 Transformationsvorschrift

Gesucht ist nun ein systematischer Weg zur Ermittlung der Transformationsvorschrift (2.1), die das System (1.1) in die Diagonalform überführt. Gemäß (2.3) muss die Relation

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \quad (2.7)$$

gelten, wobei  $\mathbf{\Lambda}$  eine Diagonalmatrix ist. Da die Eigenwerte der Dynamikmatrizen von ursprünglichem und transformiertem System identisch sind, entsprechen die Diagonalelemente von  $\mathbf{\Lambda}$  den Eigenwerten  $s_i$  von  $\mathbf{A}$ , d.h.

$$\mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} = \text{diag}(s_i).$$

Multipliziert man (2.7) von links mit  $\mathbf{T}$ , so erhält man (unter Berücksichtigung von  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{E}$ )

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}. \quad (2.8)$$

Es erweist sich als sinnvoll, die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  durch ihre Spalten darzustellen, d.h.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

Setzt man diese Darstellung von  $\mathbf{T}$  in (2.8) ein, so erhält man

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix},$$

bzw. in ausmultiplizierter Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{t}_1 & \mathbf{A}\mathbf{t}_2 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{t}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1\mathbf{t}_1 & s_2\mathbf{t}_2 & \dots & s_n\mathbf{t}_n \end{bmatrix}.$$

Ein spaltenweiser Vergleich ergibt unmittelbar

$$\mathbf{A}\mathbf{t}_i = s_i\mathbf{t}_i \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n.$$

bzw.

$$(s_i\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{t}_i = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Man beachte, dass es sich bei (2.9) um die bekannte Eigenwertgleichung handelt, d.h.  $\mathbf{t}_i$  ist ein zum Eigenwert  $s_i$  gehöriger (Rechts-)Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$ . Die Transformationsmatrix lautet somit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} =: \mathbf{P}. \quad (2.10)$$

Die bisherige Vorgangsweise setzt voraus, dass die Spalten von  $\mathbf{P}$ , also die Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$  linear unabhängig sind. Man nennt die Matrix  $\mathbf{A}$  dann **diagonalähnlich**. *Hinreichend* hierfür ist, dass  $\mathbf{A}$  lauter verschiedene, d.h. einfache Eigenwerte besitzt. Diese Eigenschaft von  $\mathbf{A}$  wird in den folgenden Abschnitten angenommen, der Fall mehrfacher Eigenwerte wird danach gesondert behandelt.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  lauten  $s_1 = 2$  und  $s_2 = -5$ , die Eigenvektoren werden mittels (2.9) berechnet, d.h.

$$\begin{aligned} s_1 = 2: \quad (s_1\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \quad \stackrel{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ s_2 = -5: \quad (s_2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}_2 &= \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \quad \stackrel{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ 1/7 & -2/7 \end{bmatrix}.$$

Wie man leicht überprüfen kann gilt

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix},$$

d.h. das transformierte System lautet

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

■

Stellt man die Inverse der Matrix  $\mathbf{P}$  durch ihre Zeilen dar, d.h.

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

und setzt diese Darstellung in (2.8) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

und weiter

$$\begin{bmatrix} s_1 \boldsymbol{\rho}_1^T \\ s_2 \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ s_n \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{A} \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Eigenwertgleichung

$$s_i \boldsymbol{\rho}_i^T = \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n,$$

d.h.  $\boldsymbol{\rho}_i$  ist ein zu  $s_i$  gehöriger Links-Eigenvektor von  $\mathbf{A}$ . Das bedeutet, dass  $\mathbf{P}$  Rechts-Eigenvektoren von  $\mathbf{A}$  als Spalten besitzt und  $\mathbf{P}^{-1}$  entsprechende Links-Eigenvektoren als Zeilen. Aus der Relation

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_2 & \dots & \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{p}_n \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_2 & & \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{p}_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_1 & \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_2 & \dots & \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

folgt unmittelbar

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{p}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad \text{wobei} \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Das bedeutet, dass der Links-Eigenvektor  $\boldsymbol{\rho}_i$  normal auf alle Rechts-Eigenvektoren mit Ausnahme von  $\mathbf{p}_i$  steht. Für das System in Diagonalform gilt mit (2.11)

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix} u, \quad (2.12)$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{p}_1 & \mathbf{c}^T \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{c}^T \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + du.$$

Das zugehörige Strukturbild ist in Bild 2.2 dargestellt. Das System besteht aus  $n$  entkoppelten

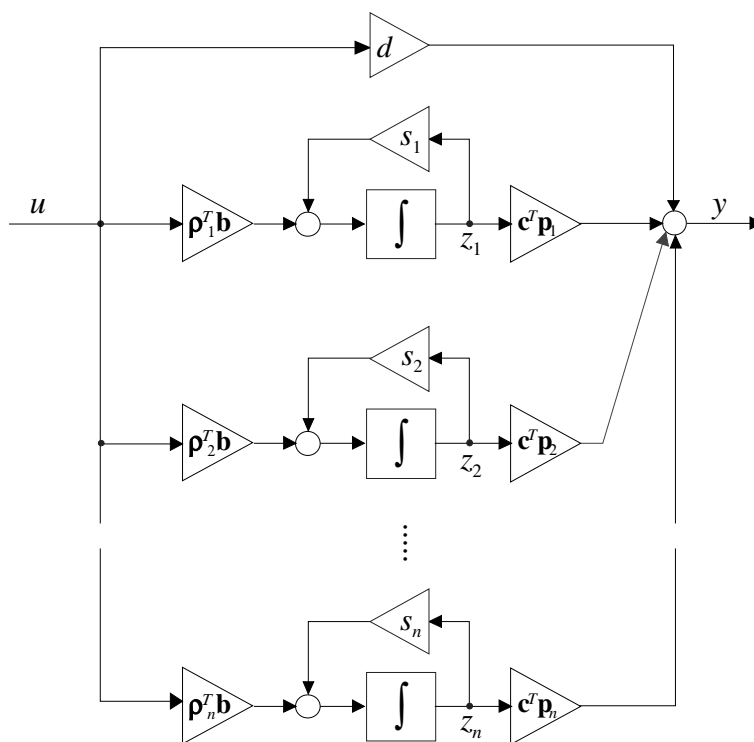


Bild 2.2: Struktur der Diagonalform

Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dz_i}{dt} = s_i z_i + \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} u \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

für die Ausgangsgleichung gilt

$$y = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}^T \mathbf{p}_i z_i + d u. \quad (2.14)$$

Wie man aus Bild 2.2 bzw. den Relationen (2.13) und (2.14) erkennt, kann der Verlauf der Zustandsvariable  $z_i$  für

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (2.15)$$

d.h.  $\mathbf{b}$  ist orthogonal zum Links-Eigenvektor  $\boldsymbol{\rho}_i$ , durch die Eingangsgröße  $u$  *nicht* beeinflusst werden. Weiters leistet im Falle

$$\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i = 0, \quad (2.16)$$

d.h.  $\mathbf{c}$  ist orthogonal zum Rechts-Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$ , die Zustandsvariable  $z_i$  *keinen* Beitrag zur Ausgangsgröße  $y$ . Tritt also (2.15) und / oder (2.16) ein, so spielt die entsprechende Zustandsvariable  $z_i$  keine Rolle für das Übertragungsverhalten des Systems. Dies manifestiert sich auch in der Übertragungsfunktion  $G(s)$ . Transformiert man (2.13) und (2.14) in den Bildbereich, so findet man unter Annahme verschwindender Anfangswerte

$$\bar{z}_i(s) = \frac{\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}}{s - s_i} \bar{u}(s) \quad \text{und} \quad \bar{y}(s) = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \bar{z}_i(s) + d \bar{u}(s).$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{p}_i \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}}{s - s_i} + d. \quad (2.17)$$

Nur wenn weder (2.15) noch (2.16) gilt, liefert der entsprechende Summand in obiger Formel einen Beitrag zur Übertragungsfunktion. Gibt es Summanden, die keinen Beitrag zu  $G(s)$  leisten, so hat dies zur Folge, dass der Grad des Nennerpolynoms von  $G(s)$  kleiner ist als die Ordnung  $n$  des Zustandsmodells.

**B** Für die Übertragungsfunktion des in Diagonalform vorliegenden mathematischen Modells

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

findet man mit (2.17)

$$G(s) = \frac{3 \cdot 0}{s - 2} - \frac{2 \cdot 1}{s + 5} = -\frac{2}{s + 5}.$$

■

## 2.2.2 Berechnung der Transitionsmatrix

Die Transitionsmatrix  $\tilde{\phi}(t)$  des transformierten Systems (2.12) kann mühelos ermittelt werden, da die Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}$  eine Diagonalmatrix ist. Unter der Annahme von  $u = 0$  gilt

$$\frac{dz_i}{dt} = s_i z_i \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$z_i(t) = e^{s_i t} z_{i,0}$$

bzw. in Vektorschreibweise

$$\mathbf{z}(t) = \tilde{\boldsymbol{\phi}}(t) \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & & \\ & e^{s_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{s_n t} \end{bmatrix} \mathbf{z}_0 = \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{z}_0. \quad (2.18)$$

Das bedeutet, dass die Transitionsmatrix des transformierten Systems ebenfalls eine Diagonalmatrix ist. Für den Zustandsvektor des Originalsystems ergibt sich unter Anwendung von (2.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \mathbf{z}(t) = \mathbf{P} \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{z}_0 = \mathbf{P} \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0, \quad (2.19)$$

d.h. für die Transitionsmatrix des Originalsystems gilt

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{P} \text{diag} (e^{s_i t}) \mathbf{P}^{-1}. \quad (2.20)$$

**B** Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix lauten  $s_1 = 2$  und  $s_2 = 1$ , für die Matrix der Eigenvektoren gilt

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d.h. } \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Für die Transitionsmatrix findet man mit (2.20)

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -3e^{2t} + 3e^t \\ 2e^{2t} - 2e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{bmatrix}.$$

Aus (2.18) ist weiters zu erkennen, dass die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{0} \quad \stackrel{(2.20)}{\Rightarrow} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{0}$$

erfüllt ist, wenn alle Eigenwerte  $s_i$  der Dynamikmatrix einen negativen Realteil besitzen. Dies entspricht dem bereits bekannten Kriterium für die asymptotische Stabilität. Unabhängig vom Anfangszustand streben dann alle Trajektorien des autonomen Systems asymptotisch in den Ursprung des Zustandsraumes.

### 2.2.3 Komplexe Eigenwerte

Besitzt die diagonalähnliche Matrix  $\mathbf{A}$  komplexe Eigenwerte, so kann die Diagonalisierung prinzipiell wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben durchgeführt werden. Wie man zeigen kann, sind die zu konjugiert komplexen Eigenwertpaaren gehörigen Eigenvektoren ebenfalls konjugiert komplex. Da die Matrix  $\mathbf{P}$  somit komplexe Elemente besitzt, erhält man ein transformiertes



System, bei dem  $\tilde{\mathbf{A}}$  eine Diagonalmatrix mit komplexen Elementen ist und die Vektoren  $\tilde{\mathbf{b}}$  und  $\tilde{\mathbf{c}}$  ebenfalls komplexe Elemente besitzen können. Da man üblicherweise an einer Systembeschreibung interessiert ist, bei der  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$  und  $\tilde{\mathbf{c}}$  ausschließlich reelle Elemente besitzen, muss die Transformationsvorschrift leicht modifiziert werden. Die prinzipielle Vorgangsweise wird zunächst für ein System zweiter Ordnung demonstriert und danach verallgemeinert.

Für ein System zweiter Ordnung mit dem konjugiert komplexen Eigenwertpaar

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

lautet die Dynamikmatrix des transformierten Systems

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

wobei für die Transformationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^* \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

gilt. Die Transformationsvorschrift wird nun so erweitert, dass die Dynamikmatrix des transformierten Systems anstelle der komplexen Diagonalform (2.21) die ebenfalls sehr anschauliche und aufschlussreiche, reelle Form

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

annimmt. Aus  $\tilde{\mathbf{A}}$  können nämlich die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte *direkt* abgelesen werden. Hierfür wird für die Transformationsmatrix (2.1) der Ansatz

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{Q} \quad (2.24)$$

gewählt, d.h. für die Dynamikmatrix des transformierten Systems gilt nach (2.3)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = (\mathbf{P} \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{P} \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{Q} \stackrel{(2.21)}{=} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}.$$

Die gesuchte Matrix  $\mathbf{Q}$  ist also so zu bestimmen, dass

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

erfüllt ist. Die Ermittlung von  $\mathbf{Q}$  erfolgt über die Relation

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad \text{d.h.} \quad \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

Daraus folgen nach kurzer Rechnung die Zusammenhänge

$$q_{12} = -jq_{11} \quad \text{und} \quad q_{21} = -jq_{22},$$

d.h. die Matrix besitzt die Form

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & -jq_{11} \\ -jq_{22} & q_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Für die Determinante von  $\mathbf{Q}$  gilt

$$\det \mathbf{Q} = 2q_{11}q_{22},$$

d.h. die Matrix ist für  $q_{11} \neq 0$  und  $q_{22} \neq 0$  regulär. Das bedeutet, dass prinzipiell *jede* Matrix  $\mathbf{Q}$  der Form (2.26) mit  $q_{11} \neq 0$  und  $q_{22} \neq 0$  die Systemmatrix in die gewünschte Form (2.25) transformiert. Es wird nun gezeigt, dass die Freiheiten bei der Wahl von  $\mathbf{Q}$  dahingehend ausgenützt werden können, dass die resultierende Transformationsmatrix (2.24)

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & -jq_{11} \\ -jq_{22} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}\mathbf{p}_1 - jq_{22}\mathbf{p}_1^* & -jq_{11}\mathbf{p}_1 + q_{22}\mathbf{p}_1^* \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

reell und strukturell stark an die Matrix  $\mathbf{P}$  angelehnt ist. Bei der Wahl der freien Parameter  $q_{11}$  und  $q_{22}$  wird die Tatsache ausgenützt, dass für die konjugiert komplexen Vektoren die Relationen

$$\frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1^*) = \operatorname{Re} \mathbf{p}_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2j}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1^*) = \operatorname{Im} \mathbf{p}_1$$

gelten. Wählt man nun

$$q_{11} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad q_{22} = \frac{j}{2},$$

d.h.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \\ \frac{j}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

so ergibt sich mit (2.27) für die reelle Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \mathbf{p}_1 & \operatorname{Im} \mathbf{p}_1 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Die modifizierte Transformationsmatrix (2.29) ist also ähnlich aufgebaut wie die Matrix  $\mathbf{P}$ . Anstelle der konjugiert komplexen Eigenvektoren  $\mathbf{p}_1$  und  $\mathbf{p}_2$  besitzt  $\mathbf{T}$  nun Real- und Imaginärteil des Vektors  $\mathbf{p}_1$  als Spalten.

**B** Gegeben sei das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  lauten

$$s_1 = -1 + j2 \quad \text{und} \quad s_2 = s_1^* = -1 - j2,$$

zugehörige Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 - j2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^* = \begin{bmatrix} -1 + j2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix (2.29) gilt somit

$$\mathbf{T} = [ \operatorname{Re} \mathbf{p}_1 \quad \operatorname{Im} \mathbf{p}_1 ] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

und für das transformierte System ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} u, \quad y = [ 4 \quad -2 ] \mathbf{z}.$$

■

Die beschriebene Vorgangsweise kann problemlos auf Systeme höherer Ordnung übertragen werden. Die Transformationsmatrix wird dabei nach folgendem Schema aufgebaut: Zu jedem reellen Eigenwert wird ein zugehöriger Eigenvektor als Spalte zu  $\mathbf{T}$  hinzugefügt. Bei konjugiert komplexen Eigenwertpaaren werden den obigen Ausführungen entsprechend Real- und Imaginärteil eines zugehörigen Eigenvektors als Spalten zu  $\mathbf{T}$  hinzugefügt.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 13 & -9 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [ 2 \quad -1 \quad 0 ] \mathbf{x}.$$

Die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  lauten

$$s_1 = -2 + j3, \quad s_2 = s_1^* = -2 - j3 \quad \text{und} \quad s_3 = 1,$$

für die zugehörigen Eigenvektoren gilt

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 + j3 \\ -5 - j12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 - j3 \\ -5 + j12 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Für die Transformationsmatrix gilt also

$$\mathbf{T} = [ \operatorname{Re} \mathbf{p}_1 \quad \operatorname{Im} \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_3 ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -5 & -12 & -1 \end{bmatrix}$$

und für das transformierte System ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad y = [ 4 \quad -3 \quad -1 ] \mathbf{z}$$

■

### 2.2.4 Mehrfache Eigenwerte

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  lauter verschiedene Eigenwerte besitzt, was *hinreichend* für die Existenz von  $n$  linear unabhängigen Eigenvektoren ist. Aber auch im Falle mehrfacher Eigenwerte kann es möglich sein, dass  $\mathbf{A}$  diagonalähnlich ist und eine Diagonalisierung durchgeführt werden kann. Die Voraussetzung hierfür ist, dass es zu jedem Eigenwert  $s_i$  mit der Vielfachheit  $m_i > 1$  (man sagt: „die **algebraische Vielfachheit** beträgt  $m_i$ “) auch  $m_i$  linear unabhängige Eigenvektoren gibt (man sagt: „die **geometrische Vielfachheit** beträgt  $m_i$ “). Das bedeutet, dass die Bedingung

$$\text{rang}(\mathbf{A} - s_i \mathbf{E}) = n - m_i \quad (2.30)$$

erfüllt sein muss.

**B** Das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & -12 \\ 5 & 16 & -20 \\ 4 & 12 & -15 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll mittels einer regulären Zustandstransformation in die Diagonalform übergeführt werden. Die Eigenwerte der Systemmatrix lauten

$$s_1 = s_2 = 1 \quad \text{und} \quad s_3 = 3.$$

Das bedeutet, dass die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes  $s_1$  gleich 2 beträgt. Wie man leicht überprüfen kann, ist die Bedingung (2.30) erfüllt, d.h.

$$\text{rang}(\mathbf{A} - s_1 \mathbf{E}) = 1,$$

die geometrische Vielfachheit beträgt somit ebenfalls 2. Zwei linear unabhängige Eigenvektoren sind beispielsweise durch

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Zusammen mit dem zum Eigenwert  $s_3$  gehörigen Eigenvektor

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ergibt sich die Transformationsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

und das transformierte System lautet

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z}.$$

■

Man beachte, dass die Übertragungsfunktion eines diagonalisierbaren Systems - auch bei mehrfachen Eigenwerten von  $\mathbf{A}$  - immer nur *einfache* Pole besitzt. Hat also die diagonalähnliche Matrix  $\mathbf{A}$  mehrfache Eigenwerte, so hat dies zur Folge, dass der Grad des Nennerpolynoms von  $G(s)$  auf jeden Fall kleiner ist als die Ordnung  $n$  des zugehörigen Zustandsmodells.

**B** Gegeben sei das diagonalisierte System

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \quad -2 \quad 3 \quad 4 \quad -5] \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich

$$G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s-2} - \frac{5}{s+3} = \frac{s^2 - 4s - 12}{(s+1)(s-2)(s+3)}.$$

■

Ist für einen mehrfachen Eigenwert die geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische Vielfachheit, so ist eine Diagonalisierung nicht möglich. Das System kann dann in die so genannte Jordan<sup>1</sup>-Form transformiert werden, die eine Verallgemeinerung der Diagonalform darstellt.

---

<sup>1</sup>benannt nach dem französischen Mathematiker Marie Ennemond Camille Jordan, (1838 -1922)

# Kapitel 3

## Lineare Übertragungssysteme

### 3.1 Einführung

Die **Übertragungsfunktion**  $G(s)$  beschreibt das Übertragungsverhalten von linearen, zeit-invarianten Systemen im Bildbereich. Sie ist definiert als der Quotient der Laplace-Transformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße, d.h.

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}. \quad (3.1)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe befindet. Im Rahmen dieses Skriptums wird davon ausgegangen, dass die Übertragungsfunktion stets eine gebrochene rationale Funktion ist. Sie kann somit als Quotient zweier Polynome  $\beta(s)$  und  $\alpha(s)$  dargestellt werden, d.h.

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \quad (3.2)$$

wobei die Koeffizienten der Polynome  $\alpha(s)$  und  $\beta(s)$  als reell vorausgesetzt werden. Systeme, bei denen die Polynomgrade von Zähler- und Nennerpolynom der Bedingung

$$\text{Grad } \beta(s) \leq \text{Grad } \alpha(s) \quad (3.3)$$

genügen, nennt man **realisierbar**, siehe auch Abschnitt 3.2. Alle praktisch relevanten Systeme erfüllen die Realisierbarkeitsbedingung. Im Falle

$$\text{Grad } \beta(s) = \text{Grad } \alpha(s)$$

spricht man von einem **sprungfähigen System**. Sprunghafte Änderungen der Eingangsgröße  $u$  haben hier auch eine sprunghafte Änderung der Ausgangsgröße  $y$  zur Folge.

Für Systeme der Form (1.1), (1.2) kann die Übertragungsfunktion unter der Annahme  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  gemäß

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (3.4)$$

berechnet werden, vgl. (1.13). Aus dieser Berechnungsvorschrift kann unmittelbar gefolgert werden, dass  $G(s)$  eine gebrochen rationale Funktion ist und (3.3) gilt. Man beachte, dass das System genau dann sprunghfähig ist, wenn für den Durchgriff  $d \neq 0$  gilt. Dann gibt es nämlich eine direkte Verbindung zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße, siehe hierzu auch Bild ??.

In Strukturbildern wird eine Übertragungsfunktion  $G(s)$  üblicherweise durch einen Block, wie er in Bild 3.1 dargestellt ist, repräsentiert.

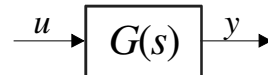


Bild 3.1: Blockdarstellung einer Übertragungsfunktion  $G(s)$

**B** Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)}.$$

Die **Sprungantwort** des Systems, d.h. seine Reaktion auf  $u(t) = \sigma(t)$  kann mittels

$$\bar{y}(s) = G(s) \bar{u}(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

berechnet werden. Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\bar{y}(s) = -\frac{1/2}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3/2}{s+2},$$

was im Zeitbereich der Funktion

$$y(t) = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

entspricht. ■

## 3.2 Übergang von $G(s)$ zu einem Zustandsmodell

Es gibt prinzipiell unendlich viele Möglichkeiten, Zustandsmodelle anzugeben, die eine vorgegebene Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$$

besitzen. Solche Zustandsmodelle nennt man **Realisierungen** von  $G(s)$ . Eine **Minimalrealisierung** zeichnet sich ferner dadurch aus, dass die Zahl der Zustandsgrößen minimal ist. Man beachte, dass genau dann eine Realisierung von  $G(s)$  existiert, wenn (3.3) erfüllt ist.

An dieser Stelle werden zwei wichtige Normalformen vorgestellt. Dabei wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ein so genanntes **monisches Polynom** ist, der höchstwertige Koeffizient des Nennerpolynoms ist also auf 1 normiert, d.h. es gilt

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Im Falle eines sprungfähigen Systems ( $m = n$ ) ist eine Polynomdivision durchzuführen, d.h.

$$G(s) = \beta_n + \frac{(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n) s^{n-1} + \dots + (\beta_1 - \alpha_1\beta_n) s + (\beta_0 - \alpha_0\beta_n)}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}.$$

### 3.2.1 Erste Normalform

Die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  des Zustandsmodells sowie der Eingangsvektor  $\mathbf{b}$  besitzen eine sehr einfache Struktur, es gilt nämlich

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (3.5)$$

Für die Ausgangsgleichung gilt:

$$y = [ \beta_0 - \alpha_0\beta_n \quad \beta_1 - \alpha_1\beta_n \quad \dots \quad \dots \quad \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n ] \mathbf{x} + \beta_n u \quad (3.6)$$

In Bild 3.2 ist das Strukturbild eines mathematischen Modells in erster Normalform dargestellt.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{4s^2 + 6s}{2s^2 + 2s + 2} = \frac{2s^2 + 3s}{s^2 + s + 1} = 2 + \frac{s - 2}{s^2 + s + 1}.$$

Das zugehörige Zustandsmodell in der ersten Normalform lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [ -2 \quad 1 ] \mathbf{x} + 2u$$

Besonders einfach kann die erste Normalform aufgestellt werden, wenn das betrachtete System nicht sprungfähig ist, denn dann gilt  $\beta_n = 0$ . Die Ausgangsgleichung (3.6) vereinfacht sich dann zu

$$y = [ \beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \dots \quad \beta_{n-1} ] \mathbf{x}.$$



**B** Das zu der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{21}{3s^3 + 6s + 9} = \frac{7}{s^3 + 2s + 3}$$

gehörige Zustandsmodell in erster Normalform lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [7 \ 0 \ 0] \mathbf{x}.$$

■

### Herleitung der ersten Normalform

Zur Herleitung der ersten Normalform wird  $G(s)$  in der folgenden Form dargestellt

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{\underbrace{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0}_{=G^*(s)}} (\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0). \quad (3.7)$$

Die erste Zustandsvariable  $x_1$  des gesuchten Zustandsmodells wird so eingeführt, dass die Bedingung

$$G^*(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (3.8)$$

erfüllt wird, d.h.

$$s^n \bar{x}_1(s) + \alpha_{n-1}s^{n-1} \bar{x}_1(s) + \dots + \alpha_1 s \bar{x}_1(s) + \alpha_0 \bar{x}_1(s) = \bar{u}(s)$$

Die restlichen Zustandsvariablen  $x_2$  bis  $x_n$  werden nun so definiert

$$\begin{aligned} \bar{x}_2(s) &: = s\bar{x}_1(s), \\ \bar{x}_3(s) &: = s\bar{x}_2(s) = s^2\bar{x}_1(s), \\ &\vdots \\ \bar{x}_n(s) &: = s\bar{x}_{n-1}(s) = s^{n-1}\bar{x}_1(s), \end{aligned} \quad (3.9)$$

dass die Relation

$$s^n \bar{x}_1(s) = s\bar{x}_n(s) = -\alpha_0 \bar{x}_1(s) - \alpha_1 \bar{x}_2(s) - \dots - \alpha_{n-1} \bar{x}_n(s) + \bar{u}(s) \quad (3.10)$$

gilt. Im Zeitbereich können (3.9) und (3.10) folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (3.11)$$

Man beachte, dass gemäß (3.8) die Relation  $\bar{x}_1(s) = G^*(s) \bar{u}(s)$  gilt und mit (3.7) folgt

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= G(s)\bar{u}(s) = G^*(s) (\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0) \bar{u}(s) = \\ &= (\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0) \bar{x}_1(s). \end{aligned}$$

Mit (3.9) und (3.10) folgt

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= \beta_n s^n \bar{x}_1(s) + \beta_{n-1} s^{n-1} \bar{x}_1(s) + \dots + \beta_1 s \bar{x}_1(s) + \beta_0 \bar{x}_1(s) \stackrel{(3.10)}{=} \\ &= \beta_n [-\alpha_0 \bar{x}_1(s) - \alpha_1 \bar{x}_2(s) - \dots - \alpha_{n-1} \bar{x}_n(s) + \bar{u}(s)] + (\beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0) \bar{x}_1(s) = \\ &= (\beta_0 - \beta_n \alpha_0) \bar{x}_1(s) + (\beta_1 - \beta_n \alpha_1) \bar{x}_2(s) + \dots + (\beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}) \bar{x}_n(s) + \beta_n \bar{u}(s). \end{aligned}$$

Das bedeutet im Zeitbereich

$$y(t) = [ (\beta_0 - \beta_n \alpha_0) \quad (\beta_1 - \beta_n \alpha_1) \quad \dots \quad (\beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1}) ] \mathbf{x}(t) + \beta_n u(t), \quad (3.12)$$

d.h. (3.11) und (3.12) ergeben die erste Normalform.

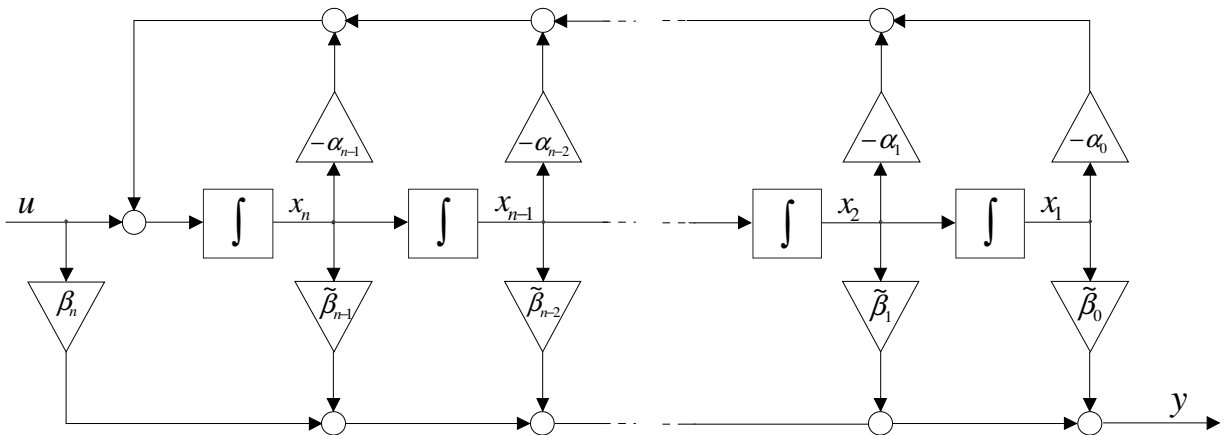


Bild 3.2: Strukturbild zur ersten Normalform, wobei  $\tilde{\beta}_i := \beta_i - \alpha_i \beta_n$  gilt

### 3.2.2 Zweite Normalform

Die so genannte zweite Normalform kann aus der ersten Normalform gewonnen werden, indem die Dynamikmatrix transponiert wird und die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  miteinander vertauscht werden, d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_1 - \alpha_1 \beta_n \\ \vdots \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} \beta_n \end{bmatrix} u \quad (3.13)$$

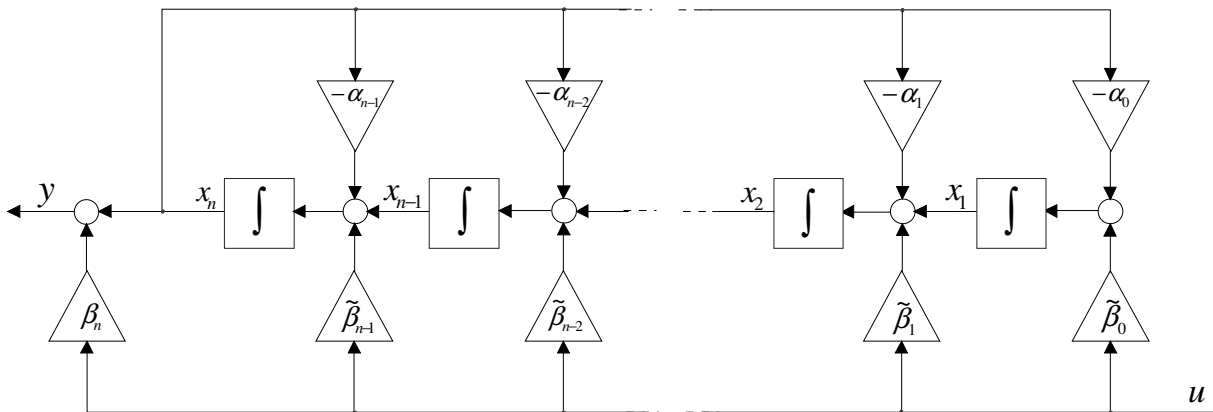


Bild 3.3: Strukturbild zur zweiten Normalform, wobei  $\tilde{\beta}_i := \beta_i - \alpha_i \beta_n$  gilt

und

$$y = [ 0 \quad \dots \quad \dots \quad 0 \quad 1 ] \mathbf{x} + \beta_n u. \quad (3.14)$$

In Bild 3.3 ist das Strukturbild eines mathematischen Modells in zweiter Normalform dargestellt.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + 3s}{s^3 + s + 2}.$$

Ein zugehöriges Zustandsmodell in der zweiten Normalform lautet dann

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [ 0 \quad 0 \quad 1 ] \mathbf{x}.$$

■

### Hinweise zur ersten und zweiten Normalformen

Der Zusammenhang zwischen erster und zweiter Normalform hat zur Folge, dass die zwei Zustandsmodelle

$$M_1: \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_1 \\ y_1 = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du_1 \end{cases} \quad M_2: \begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}^T\mathbf{z} + \mathbf{c}u_2 \\ y_2 = \mathbf{b}^T\mathbf{z} + du_2 \end{cases}$$

die gleiche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}_1(s)}{\bar{u}_1(s)} = \frac{\bar{y}_2(s)}{\bar{u}_2(s)}$$

besitzen. Dieses Ergebnis ist leicht zu erkennen, da für die (skalare) Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = G^T(s) = \mathbf{b}^T [(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}]^T \mathbf{c} + d = \mathbf{b}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{c} + d$$

gilt. Wenn man die Strukturbilder 3.2 und 3.3 miteinander vergleicht, so erkennt man, dass sich ein Strukturbild aus dem anderen ergibt, wenn man

- Eingangs- und Ausgangsgrößen vertauscht, d.h.  $u \Leftrightarrow y$
- alle Pfeilrichtungen umkehrt
- Summationen und Abzweigungen vertauscht, d.h.  $\bigcirc \Leftrightarrow \cdot$

Man beachte weiters, dass die Dynamikmatrizen der beiden Normalformen in so genannter **Begleitform** vorliegen. Das bedeutet, dass man die charakteristischen Polynome der Matrizen *direkt* ablesen kann. Aus den obigen Ausführungen folgt nämlich unmittelbar, dass die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

das gleiche charakteristische Polynom

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

besitzen.

**B** Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Beide Matrizen liegen in Begleitform vor, d.h. für die charakteristischen Polynome gilt

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^3 - 3s^2 - 2s + 1$$

und

$$\Delta_{\mathbf{B}}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{B}) = s^4 - 5s^3 + 3s^2 - 2s + 1.$$

■



# Kapitel 4

## Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

### 4.1 Einführung

Wie sich zeigen wird, sind die Begriffe **Steuerbarkeit** und **Beobachtbarkeit** beim Entwurf von Zustandsreglern und Zustandsbeobachtern von entscheidender Bedeutung. Stark vereinfacht besagt die Steuerbarkeit eines Systems, dass über seine Eingangsgröße jede Zustandsvariable beeinflusst werden kann. Im Gegensatz dazu bedeutet die Beobachtbarkeit eines Systems, dass in seiner Ausgangsgröße Information über jede Zustandsvariable enthalten ist.

### 4.2 Steuerbarkeit

Man nennt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (4.1)$$

**steuerbar**, wenn durch geeignete Wahl der Eingangsgröße  $u(t)$  der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  in endlicher Zeit  $T$  aus einem beliebig vorgebbaren Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$  in den Endzustand  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$  bewegt werden kann.

Man beachte, dass die Eigenschaft der Steuerbarkeit lediglich aussagt, ob ein Übergang von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$  in endlicher Zeit prinzipiell möglich ist. Wie  $u(t)$  zu wählen ist und wie der zugehörige Verlauf von  $\mathbf{x}(t)$  für  $0 < t < T$  aussieht, bleibt offen.

#### 4.2.1 Kriterium nach Kalman

Der Zustand  $\mathbf{x}(T)$  kann für das System (4.1) gemäß

$$\mathbf{x}(T) = \phi(T)\mathbf{x}_0 + \int_0^T \phi(T - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

ermittelt werden. Ist das System steuerbar, so kann die Eingangsgröße so gewählt werden, dass die Bedingung  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$  erfüllt ist. Aus (4.2) folgt daraus unmittelbar

$$\phi(T) \int_0^T \phi(-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau = -\phi(T)\mathbf{x}_0. \quad (4.3)$$

Da die Matrix  $\phi(T)$  jedenfalls regulär ist, folgt aus (4.3) die Bedingung

$$\int_0^T \phi(-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau = -\mathbf{x}_0. \quad (4.4)$$

Stellt man die Transitionsmatrix  $\phi(-\tau)$  als Matrix-Exponentialreihe dar, d.h.

$$\phi(-\tau) = \mathbf{E} - \mathbf{A}\tau + \mathbf{A}^2 \frac{\tau^2}{2!} \mp \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(-\tau)^i}{i!}, \quad (4.5)$$

so erhält man die Beziehung

$$\int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{(-\tau)^i}{i!} \mathbf{b} u(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \mathbf{b} \int_0^T \frac{(-\tau)^i}{i!} u(\tau) d\tau = -\mathbf{x}_0. \quad (4.6)$$

Definiert man die - bei vorgegebener Wahl von  $u$  - konstanten Größen

$$\alpha_i := \int_0^T \frac{(-\tau)^i}{i!} u(\tau) d\tau,$$

so lautet die Bedingung für Steuerbarkeit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \mathbf{A}^i \mathbf{b} = -\mathbf{x}_0. \quad (4.7)$$

Da  $\mathbf{x}_0$  ein beliebig vorgebarer Vektor ist, müssen die Vektoren  $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \mathbf{A}^3\mathbf{b}, \dots$  den gesamten  $n$ -dimensionalen Raum aufspannen. Das bedeutet, dass es  $n$  linear unabhängige Vektoren der Form  $\mathbf{A}^i \mathbf{b}$  mit  $i = 0, 1, 2, \dots$  gibt. Man kann zeigen, dass dies nur die ersten  $n$  Vektoren  $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$  sein können. Nimmt man nämlich an, dass für  $\delta < n$  die Bedingungen

$$\text{rang} [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b}] = \delta \quad \text{und} \quad \text{rang} [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b}] = \delta$$

gelten, d.h.  $\mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b}$  ist linear abhängig, also

$$\mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b} = k_0\mathbf{b} + k_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1}\mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b}, \quad (4.8)$$

so ist auch  $\mathbf{A}^{\delta+1}\mathbf{b}$  linear abhängig, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\delta+1}\mathbf{b} &= \mathbf{A} (k_0\mathbf{b} + k_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1}\mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b}) = k_0\mathbf{A}\mathbf{b} + k_1\mathbf{A}^2\mathbf{b} + \dots + k_{\delta-1}\mathbf{A}^{\delta}\mathbf{b} = \\ &= \tilde{k}_0\mathbf{b} + \tilde{k}_1\mathbf{A}\mathbf{b} + \dots + \tilde{k}_{\delta-1}\mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Die Steuerbarkeit ist somit gegeben, wenn die Bedingung

$$\text{rang} [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = n \quad (4.9)$$

erfüllt ist. Hierbei handelt es sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Definiert man nun die so genannte **Steuerbarkeitsmatrix**

$$\mathbf{S}_u := [ \mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} ], \quad (4.10)$$

so kann das Steuerbarkeitskriterium nach Kalman prägnant formuliert werden: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix (4.10) regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  steuerbar ist.

**B** Die Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

soll auf Steuerbarkeit untersucht werden. Für die Steuerbarkeitsmatrix findet man

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

aus ihrer Regularität folgt die Steuerbarkeit des Systems. ■

### Invarianz bezüglich einer regulären Zustandstransformation

Führt man eine reguläre Zustandstransformation der Form  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$  durch, so erhält man die transformierte Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}}_{\tilde{\mathbf{b}}} u. \quad (4.11)$$

Die zugehörige Steuerbarkeitsmatrix gilt dann

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_u &= [ \tilde{\mathbf{b}} \quad \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{b}} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{b}} ] \stackrel{(4.11)}{=} [ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} ] = \\ &= \mathbf{T}^{-1} [ \mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} ] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}_u. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass  $\tilde{\mathbf{S}}_u$  genau dann regulär ist, wenn die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_u$  des Originalsystems regulär ist.

Ein Sonderfall liegt vor, wenn die Systembeschreibung (4.1) in erster Normalform vorliegt, da dann das System jedenfalls steuerbar ist. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

veranschaulicht werden. Für die Steuerbarkeitsmatrix folgt dann

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

man erkennt, dass diese auf jeden Fall regulär ist. Aus diesem Grund wird die erste Normalform auch **Steuerbarkeitsnormalform** genannt. Es kanngefolgert werden, dass ein System offenbar genau dann in die Steuerbarkeitsnormalform transformiert werden kann, wenn es steuerbar ist.



### 4.2.2 Kriterium nach Hautus

Es wird an dieser Stelle vorausgesetzt, dass die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  lauter *verschiedene* Eigenwerte besitzt. Zu jedem der  $n$  Eigenwerte  $s_i$  gibt es je einen (Rechts-) Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$  bzw. einen Links-Eigenvektor  $\boldsymbol{\rho}_i^T$ , d.h. es gilt

$$\text{rang}(s_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = n - 1 \quad \text{wobei} \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

Da die  $n$  Eigenvektoren linear unabhängig sind, kann das System (4.1) mittels der regulären Zustandstransformation  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{z}$ , wobei  $\mathbf{T} = \mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_n]$  in die Diagonalform

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix} u \quad (4.13)$$

transformiert werden. Gilt für die  $i$ -te Komponente des (transformierten) Eingangsvektors

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (4.14)$$

so kann offensichtlich der Verlauf der  $i$ -ten Zustandsgröße des transformierten Systems durch  $u$  nicht beeinflusst werden und es liegt sicher kein steuerbares System vor. Gilt hingegen

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} \neq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.15)$$

so lautet die Steuerbarkeitmatrix des transformierten Systems

$$\tilde{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} & s_1 \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} & \dots & s_1^{n-1} \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} & s_2 \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} & & s_2^{n-1} \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} & s_n \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} & \dots & s_n^{n-1} \boldsymbol{\rho}_n^T \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Da die Eigenwerte  $s_1, \dots, s_n$  voraussetzungsgemäß voneinander verschieden sind, ist  $\tilde{\mathbf{S}}_u$  regulär, das System (4.1) ist somit steuerbar.

Man beachte, dass die hier für den Fall verschiedener Eigenwerte hergeleiteten Ergebnisse auch uneingeschränkt für den Fall mehrfacher Eigenwerte gelten. Für den Fall mehrfacher Eigenwerte ist (4.12) eine notwendige Bedingung für die Steuerbarkeit des Systems. Das bedeutet, dass zu jedem mehrfachen Eigenwert nur *ein* linear unabhängiger Eigenvektor existieren darf und in weiterer Konsequenz in der Dynamikmatrix des transformierten Systems nur *ein* entsprechender Jordanblock vorkommt. Die Bedingung (4.15) bedeutet, dass das zur letzten Zeile eines Jordanblocks gehörige Element des (transformierten) Eingangsvektors von Null verschieden sein muss.

Zusammenfassend kann das Hautus-Kriterium folgendermaßen formuliert werden: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn kein Links-Eigenvektor der Matrix  $\mathbf{A}$  auf den Eingangsvektor  $\mathbf{b}$  normal steht.

### Alternative Formulierung des Hautus-Kriteriums

Einer alternativen Formulierung des Kriteriums liegt die Betrachtung der Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (s_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}^T \quad (4.17)$$

zugrunde, d.h. der Links-Eigenvektor  $\boldsymbol{\rho}_i$  steht normal auf die Spalten der Matrix  $(s_i \mathbf{E} - \mathbf{A})$ , wobei  $i = 1, \dots, n$ . Aufgrund von (4.12) wird durch die Bedingung

$$\text{rang} \left( s_i \mathbf{E} - \mathbf{A} : \mathbf{b} \right) = n \quad (4.18)$$

gewährleistet, dass der Links-Eigenvektor nicht orthogonal zu  $\mathbf{b}$  ist.

Damit lautet die alternative Formulierung des Hautus-Kriteriums: Das System (4.1) ist genau dann steuerbar, wenn für jeden Eigenwert  $s_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$  die Bedingung (4.18) erfüllt ist.

### 4.2.3 Steuerbarkeit eines Systems in der ersten Normalform

Wenn die Systembeschreibung in erster Normalform vorliegt, dann ist das System auf jeden Fall steuerbar. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

veranschaulicht werden. Verwendet man das Kalman-Kriterium, so besitzt die Steuerbarkeitsmatrix die ausgezeichnete Struktur

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

d.h. sie ist auf jeden Fall regulär. Aus diesem Grund wird die erste Normalform auch **Steuerbarkeitsnormalform** genannt.

## 4.3 Beobachtbarkeit

Man nennt das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \quad (4.19)$$

**beobachtbar**, wenn aus der Kenntnis von  $u(t)$  und  $y(t)$  in einem *endlichen* Zeitintervall  $[0, T]$  der unbekannte Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  bestimmt werden kann.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Man beachte, dass dabei  $T$  prinzipiell beliebig klein gemacht werden kann.

Der Verlauf der Ausgangsgröße als Reaktion auf den Anfangszustand und die Eingangsgröße lautet

$$y(t) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + du(t),$$

wobei  $\boldsymbol{\phi}(t)$  die zu (4.19) gehörige Transitionsmatrix ist. Die von der (gegebenen) Eingangsgröße  $u$  abhängigen Anteile des Ausdruckes sind ebenso bekannt wie die Ausgangsgröße  $y$ . Stellt man die obige Gleichung entsprechend um, so erhält man

$$\mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 = \underbrace{y(t) - \int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau - du(t)}_{:=\hat{y}(t)}.$$

Das bedeutet, dass aus der Relation  $\mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 = \hat{y}(t)$  (über ein endliche Intervall betrachtet) der Anfangszustand ermittelt werden soll. Diese Aufgabenstellung entspricht formal der Aufgabe, aus dem Verlauf der Ausgangsgröße des autonomen Systems

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (4.20)$$

den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  zu ermitteln. Die Beobachtbarkeit von (4.19) kann also anhand des Systems (4.20) untersucht werden.

### 4.3.1 Kriterium nach Kalman

Differenziert man die Ausgangsgröße

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

nach der Zeit, so erhält man mit (4.20)

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2\mathbf{x}, \quad \dots \quad \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x},$$

bzw. in Matrixnotation

$$\begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dieses Ergebnisse besagt, dass der Zustand zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ , also auch für  $t = 0$  genau dann eindeutig ermittelt werden kann, wenn die so genannte **Beobachtbarkeitsmatrix**

$$B_y := \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

den Höchststrang besitzt. Damit lautet das Beobachtbarkeitskriterium nach Kalman: Das System (4.19) ist genau dann beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix (4.21) regulär ist. Man sagt dann auch, dass das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$  beobachtbar ist.

**B** Die Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll auf Beobachtbarkeit untersucht werden. Für die Beobachtbarkeitsmatrix findet man

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},$$

aus ihrer Regularität folgt die Beobachtbarkeit des Systems. ■

### Invarianz bezüglich einer regulären Zustandstransformation

Die reguläre Zustandstransformation der Form  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$  führt auf die Beschreibung

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z}, \quad y = \underbrace{\mathbf{c}^T\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{c}}^T}\mathbf{z}. \quad (4.22)$$

Die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix gilt dann

$$\tilde{\mathbf{B}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}^T \\ \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \stackrel{(4.22)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{T} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_y \mathbf{T}$$

Das bedeutet, dass  $\tilde{\mathbf{B}}_y$  genau dann regulär ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{B}_y$  des Originalsystems regulär ist.

### 4.3.2 Kriterium nach Hautus

Mit analogen Überlegungen wie bei der Steuerbarkeit kann das Beobachtbarkeitskriterium nach Hautus hergeleitet werden. Es zeigt sich, dass das System (4.19) genau dann beobachtbar ist, wenn kein Eigenvektor  $\mathbf{p}_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$  normal auf den Ausgangsvektor  $\mathbf{c}^T$  steht.

Äquivalent ist die alternative Formulierung des Kriteriums nach Hautus: Das System (4.19) ist genau dann beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ s_i \mathbf{E} - \mathbf{A} \end{pmatrix} = n \quad (4.23)$$

für alle Eigenwerte  $s_i$  von  $\mathbf{A}$  erfüllt ist.

### 4.3.3 Beobachtbarkeit eines Systems in der zweiten Normalform

Wenn die Systembeschreibung in zweiter Normalform vorliegt, dann ist das System jedenfalls beobachtbar. Dies soll für ein System dritter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x} + \beta_n u$$

veranschaulicht werden. Für die Beobachtbarkeitsmatrix folgt nämlich (vgl. Steuerbarkeitsmatrix der ersten Normalform!)

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_2 & -\alpha_1 + \alpha_2^2 \end{bmatrix},$$

diese ist auf jeden Fall regulär. Aus diesem Grund wird die zweite Normalform auch **Beobachtbarkeitsnormalform** genannt.

# Kapitel 5

## Entwurf von Zustandsreglern

### 5.1 Einführung

Gegeben sei das lineare und zeitinvariante Zustandsmodell  $n$ -ter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (5.1)$$

einer Regelstrecke. Für den Durchgriffsterm wird hier  $d = 0$  angenommen, wie es bei realen technischen Systemen häufig der Fall ist. Das Verhalten der Regelstrecke kann mittels der Stellgröße  $u$  beeinflusst werden. Weiters wirkt auf die Strecke der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  ein, der auch als unbekannte „Anfangsstörung“ interpretiert werden kann.

Durch geeignete Wahl der Stellgröße  $u$  soll der Regelstrecke ein gewünschtes dynamisches Verhalten verliehen werden. Dies umfasst einerseits die Beseitigung der Wirkung des Anfangszustandes  $\mathbf{x}_0$  durch eine Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises. Andererseits ist man häufig daran interessiert, dass die Ausgangsgröße  $y$  einem in Form der Referenzgröße  $r$  vorgegebenen Wunschverlauf „möglichst gut“ folgt. Damit gliedert sich der Reglerentwurf in zwei Schritte, nämlich in die **Stabilisierung** und die **Nachführung**.

### 5.2 Stabilisierung des Regelkreises

Die Stabilisierung des Regelkreises erfolgt durch eine geeignete Rückführung des als *messbar* vorausgesetzten Zustandsvektors  $\mathbf{x}$ . Im vorliegenden Fall handelt es sich um eine Zustandsrückführung der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}. \quad (5.2)$$

Hierbei umfasst der Vektor

$$\mathbf{k}^T = [ k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n ] \quad (5.3)$$

die zu bestimmenden (konstanten) reellen Reglerparameter. Die Stellgröße  $u$  wird demnach als Linearkombination der Zustandsgrößen angesetzt, man nennt (5.2) daher auch einen **linearen Zustandsregler**.

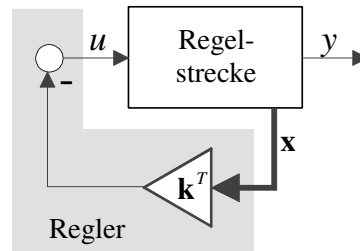


Bild 5.1: Stabilisierung mit Hilfe einer Zustandsregelung

In Bild 5.1 ist der Regelkreis, bestehend aus Regelstrecke und Zustandsregler dargestellt. Das mathematische Modell des Regelkreises ergibt sich aus (5.1) und (5.2) zu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x}. \quad (5.4)$$

Da die Ausgangsgleichung bei der Stabilisierung des Regelkreises keine Rolle spielt, bleibt sie hier auch unberücksichtigt. Das Ziel des Entwurfes besteht nun darin, den Vektor  $\mathbf{k}^T$  so zu bestimmen, dass der Regelkreis asymptotisch stabil ist. Das bedeutet, dass die Dynamikmatrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  des Regelkreises eine Hurwitzmatrix sein muss, all ihre Eigenwerte besitzen also einen negativen Realteil. Der Entwurf des Zustandsreglers läuft somit darauf hinaus, durch geschickte Wahl von  $\mathbf{k}^T$  die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  in gewünschter Weise zu platzieren, man spricht in diesem Zusammenhang auch von der **Eigenwertvorgabe**.

### 5.2.1 Prinzip der Eigenwertvorgabe

Die Aufgabe besteht darin, den Vektor  $\mathbf{k}^T$  so zu bestimmen, dass die  $n$  Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  vorgebbare Werte  $\lambda_i$  annehmen. Das bedeutet, dass das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  einem vorgegebenen Wunschpolynom  $w(s)$  entsprechen muss, d.h.

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) \stackrel{!}{=} w(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + w_{n-1}s^{n-1} + \dots + w_1s + w_0. \quad (5.5)$$

Hierbei sind  $w_0, \dots, w_{n-1}$  die *reellen* Koeffizienten des Wunschpolynom, d.h. die vorgebbaren Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  müssen reell und/oder paarweise konjugiert komplex sein.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke und ein Zustandsregler der Form (5.2), d.h.

$$\frac{dx}{dt} = 2x + u \quad \text{und} \quad u = -kx.$$

Das Modell des Regelkreises lautet somit

$$\frac{dx}{dt} = (2 - k)x.$$

Wählt man

$$k = 2 - \lambda,$$

so besitzt der Regelkreis einen Eigenwert an einer beliebig vorgebbaren Stelle  $s = \lambda$ . ■

Es stellt sich die Frage, ob stets alle Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  beliebig platziert werden können. Zur Beantwortung dieser Frage wird angenommen, dass  $s_i$  ein Eigenwert von  $\mathbf{A}$  ist und  $\boldsymbol{\rho}_i^T$  ein zugehöriger Links-Eigenvektor, d.h. es gilt die Eigenwertgleichung

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} = s_i \boldsymbol{\rho}_i^T. \quad (5.6)$$

Multipliziert man nun die Dynamikmatrix des Regelkreises mit dem Vektor  $\boldsymbol{\rho}_i^T$ , so findet man

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{A} - \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T \stackrel{(5.6)}{=} s_i \boldsymbol{\rho}_i^T - \boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T. \quad (5.7)$$

Wenn der Vektor  $\boldsymbol{\rho}_i$  normal auf den Eingangsvektor steht, d.h.

$$\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} = 0, \quad (5.8)$$

so vereinfacht sich (5.7) zu

$$\boldsymbol{\rho}_i^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = s_i \boldsymbol{\rho}_i^T. \quad (5.9)$$

Das bedeutet, dass  $s_i$  auf jeden Fall, d.h. für jede beliebige Wahl von  $\mathbf{k}^T$  auch ein Eigenwert von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ist. Die Eigenwerte von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  sind in diesem Fall somit *nicht* beliebig vorgebar! Dies ist offensichtlich auf (5.8) zurückzuführen, was gemäß dem Hautus-Kriterium bedeutet, dass die Regelstrecke *nicht* steuerbar ist. Erst die Eigenschaft der Steuerbarkeit der Strecke erlaubt die beliebige Vorgabe aller Eigenwerte des Regelkreises.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke und ein Regler der Form (5.2), d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{und} \quad u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Wie man mit Hilfe der Steuerbarkeitmatrix

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

leicht überprüfen kann, ist die Regelstrecke steuerbar, die Eigenwerte des Regelkreises können also beliebig vorgegeben werden. Die Dynamikmatrix des Regelkreises lautet

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Ihr charakteristisches Polynom soll einem Wunschkpolynom

$$w(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$$



entsprechen, d.h.

$$\det \begin{bmatrix} s - k_1 & -k_2 \\ k_1 - 1 & s + 1 + k_2 \end{bmatrix} = s^2 + (1 - k_1 + k_2)s - (k_1 + k_2) \stackrel{!}{=} w(s).$$

Der Koeffizientenvergleich

$$1 - k_1 + k_2 \stackrel{!}{=} -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{und} \quad -(k_1 + k_2) \stackrel{!}{=} \lambda_1 \lambda_2$$

liefert die Relationen

$$k_1 = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2) \quad \text{und} \quad k_2 = -\frac{1}{2}(1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2)$$

zur Berechnung der Reglerparameter. ■

Üblicherweise wird zunächst überprüft, ob das Streckenmodell (5.1) steuerbar ist. Üblicherweise wird dabei aber *nicht* hinterfragt, wie „gut“ oder „schlecht“ das betrachtete System steuerbar ist, man begnügt sich mit einer ja/nein-Aussage. Intuitiv wird man ein steuerbares System als „schlecht“ steuerbar klassifizieren, wenn es eines unverhältnismäßig großen Stelllaufwandes bedarf, um die Zustandsgrößen gezielt zu beeinflussen<sup>1</sup>. Dies manifestiert sich im Regelgesetz (5.2) durch betragsmäßig große Elemente im Vektor  $\mathbf{k}^T$ .

**B** Gegeben sei das (steuerbare) mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -4.47 \\ 1.79 \end{bmatrix} u.$$

Wählt man für die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beispielsweise  $s_1 = s_2 = -3$ , so erhält man

$$\mathbf{k}^T = [ 1795.56 \quad 4486.67 ].$$
■

Der im obigen Beispiel beobachtete Effekt großer Reglerparameter lässt sich anschaulich deuten. Vereinfachend wird hierzu angenommen, dass die Dynamikmatrix der steuerbaren Regelstrecke (5.1) lauter verschiedene Eigenwerte  $s_1, s_2, \dots, s_n$  besitzt. Die zugehörigen Links-Eigenvektoren werden mit  $\boldsymbol{\rho}_1^T, \boldsymbol{\rho}_2^T, \dots, \boldsymbol{\rho}_n^T$  bezeichnet, gemäß dem Hautus-Kriterium gilt  $\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b} \neq 0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Es soll nun ein Zustandsregler (5.2) entworfen werden, der den Eigenwert  $s_1$  an die Stelle  $s = \lambda$  verschiebt, die restlichen Eigenwerte jedoch unverändert lässt, d.h. die Eigenwerte des geschlossenen Kreises lauten  $\lambda, s_2, \dots, s_n$ . Es gilt nun

$$\boldsymbol{\rho}_1^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{A} - \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T = s_1 \boldsymbol{\rho}_1^T - \boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}\mathbf{k}^T.$$

Setzt man nun

$$\mathbf{k}^T = \frac{s_1 - \lambda}{\boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}} \boldsymbol{\rho}_1^T, \tag{5.10}$$

<sup>1</sup>Mit Hilfe so genannter Steuerbarkeit-Maße kann die Eigenschaft der Steuerbarkeit bezüglich ihrer „Güte“ quantifiziert werden.

so erhält man

$$\boldsymbol{\rho}_1^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \lambda \boldsymbol{\rho}_1^T,$$

d.h.  $\lambda$  ist wie gewünscht ein Eigenwert des geschlossenen Regelkreises. Offensichtlich nehmen gemäß (5.10) die Elemente von  $\mathbf{k}^T$  betragsmäßig große Werte an, wenn das Skalarprodukt  $\boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}$  betragsmäßig sehr klein ist, was auf „schlechte Steuerbarkeit“ des Eigenwertes  $s_1$  schließen lässt. Transformiert man die Regelstrecke auf Diagonalform, so erkennt man, dass der Einfluss von  $u$  auf das zum Eigenwert  $s_1$  gehörige Teilsystem aufgrund des kleinen Betrages von  $\boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b}$  nur sehr gering ist.

**B Fortsetzung.** Die zu den Eigenwerten  $s_1 = 0$  und  $s_2 = -1$  der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  gehörigen Links-Eigenvektoren sind durch

$$\boldsymbol{\rho}_1^T = [ 2 \quad 5 ] \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}_2^T = [ 2 \quad 6 ]$$

gegeben. Für die Skalarprodukte  $\boldsymbol{\rho}_i^T \mathbf{b}$  findet man

$$\boldsymbol{\rho}_1^T \mathbf{b} = 0.01 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\rho}_2^T \mathbf{b} = 1.8 \quad .$$

Daraus kann gefolgert werden, dass die großen Werte der Reglerparameter auf die „schlechte Steuerbarkeit“ des Eigenwertes  $s_1 = 0$  zurückzuführen sind. ■

## 5.2.2 Stabilisierbarkeit

Ein System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

heißt **stabilisierbar**, wenn der Vektor  $\mathbf{k}^T$  so bestimmt werden kann, dass  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  eine Hurwitzmatrix ist.

Man beachte, dass die Steuerbarkeit des Systems eine hinreichende, nicht jedoch eine notwendige Bedingung für die Stabilisierbarkeit darstellt.

**B** Gegeben sei die (nicht steuerbare) Systembeschreibung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Für die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ergibt sich

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & -k_2 \\ 2 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix},$$

ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = s^2 + s(k_1 + k_2) + (k_1 + k_2 - 1) = (s + 1)(s + k_1 + k_2 - 1).$$

Für  $k_1 + k_2 > 1$  ist die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  somit eine Hurwitzmatrix, d.h. das System ist stabilisierbar. ■

### 5.2.3 Entwurf für ein System in Regelungsnormalform

Besonders elegant ist die Ermittlung des Reglers, wenn das Modell der Regelstrecke in erster Normalform vorliegt. Zum einen ist das Modell dann jedenfalls steuerbar, zum anderen erlaubt die Tatsache, dass die Dynamikmatrix des Regelkreises in Begleitform vorliegt eine besonders einfache Berechnung der Reglerparameter. Aus diesem Grund nennt man die erste Normalform häufig auch **Regelungsnormalform**.

Das Modell der Strecke  $n$ -ter Ordnung liege in erster Normalform vor, d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Für einen Zustandsregler der Form (5.2) folgt dann für die Dynamikmatrix des Regelkreises

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 - k_1 & -\alpha_1 - k_2 & \dots & -\alpha_{n-1} - k_n \end{bmatrix}.$$

Man erkennt, dass die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  wiederum in Begleitform vorliegt, d.h. ihr charakteristisches Polynom

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = s^n + (\alpha_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \dots + (\alpha_1 + k_2)s + (\alpha_0 + k_1)$$

kann direkt abgelesen werden. Im Sinne der Eigenwertvorgabe muss das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  einem vorgebbaren Polynom (5.5) entsprechen, d.h.

$$\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) \stackrel{!}{=} w(s) = s^n + w_{n-1}s^{n-1} + \dots + w_1s + w_0.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$w_0 = \alpha_0 + k_1, \quad w_1 = \alpha_1 + k_2, \quad \dots, \quad w_{n-1} = \alpha_{n-1} + k_n,$$

woraus sich unmittelbar die gesuchten Reglerparameter

$$k_i = w_{i-1} - \alpha_{i-1} \quad \text{wobei} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.11)$$

ergeben.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke in erster Normalform und ein Zustandsregler der Form (5.2), d.h.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{und} \quad u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = -[k_1 \quad k_2] \mathbf{x}.$$

Die Dynamikmatrix des Regelkreises lautet

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Unter der Annahme, dass  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  zwei Eigenwerte an der Stelle  $s = -1$  besitzen soll, d.h.

$$w(s) = (s + 1)^2 = s^2 + w_1s + w_0 = s^2 + 2s + 1$$

ergeben sich gemäß (5.11) die Reglerparameter

$$k_1 = w_0 - \alpha_0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{und} \quad k_2 = w_1 - \alpha_1 = 2 + 1 = 3.$$

Der lineare Zustandsregler (5.2) lautet somit

$$u = -2x_1 - 3x_2.$$

■

Liegt das Modell der (steuerbaren) Regelstrecke nicht in Regelungsnormalform vor, so bietet sich im Sinne einer systematischen Berechnung der Reglerparameter eine reguläre Zustandstransformation in diese vorteilhafte Normalform an. Für das transformierte System kann der Zustandsregler mit Hilfe (5.11) problemlos angegeben werden. Der gesuchte Zustandsregler für das Originalsystem errechnet sich mit Hilfe der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ . Wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird, kann der beschriebene Reglerentwurf sehr effizient mit Hilfe der Formel von Ackermann bewerkstelligt werden.

### 5.2.4 Transformation auf Regelungsnormalform

Unterwirft man das Modell der Regelstrecke (5.1) einer Zustandstransformation der Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \tag{5.12}$$

so ergibt sich das transformierte Modell

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} + \mathbf{T}\mathbf{b}u. \tag{5.13}$$

Dieses Modell soll in Regelungsnormalform vorliegen, d.h. es müssen die Relationen

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

gelten. Aus der ersten Bedingung in (5.14) folgt nach Multiplikation mit der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  von rechts

$$\mathbf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{T}. \tag{5.15}$$

Stellt man nun die Matrix  $\mathbf{T}$  durch ihre Zeilenvektoren dar, d.h.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix},$$

so geht (5.15) in die Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_2^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{n-1}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_n^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_2^T \\ \mathbf{t}_3^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \\ -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_2^T - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

über. Ein Vergleich der ersten  $(n-1)$  Zeilen ergibt

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{t}_3^T = \mathbf{t}_2^T \mathbf{A}, \quad \dots, \quad \mathbf{t}_n^T = \mathbf{t}_{n-1}^T \mathbf{A},$$

woraus durch Einsetzen unmittelbar der Zusammenhang

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{t}_3^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2, \quad \dots, \quad \mathbf{t}_n^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \quad (5.17)$$

folgt. Das bedeutet, dass die Transformationsmatrix den bemerkenswerten Aufbau

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

besitzt. Aus der ersten Zeile  $\mathbf{t}_1^T$  von  $\mathbf{T}$  können somit alle übrigen Zeilen durch sukzessive Multiplikation mit  $\mathbf{A}$  berechnet werden. Die zweite Bedingung in (5.14) nimmt nun die Form

$$\mathbf{T} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

an. Durch Transposition obiger Gleichung erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \mathbf{b} & \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{t}_1^T \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \mathbf{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man beachte, dass in obiger Relation der Zeilenvektor  $\mathbf{t}_1^T$  mit der in (4.10) eingeführten Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_u$  multipliziert wird, d.h.

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da die Regelstrecke voraussetzungsgemäß steuerbar ist, kann die erste Zeile von  $\mathbf{T}$  mittels

$$\mathbf{t}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{S}_u^{-1} \quad (5.19)$$

berechnet werden. Das Ergebnis in (5.19) bedeutet, dass  $\mathbf{t}_1^T$  die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix ist. Somit kann die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  geradlinig ermittelt werden. Zunächst wird ihre erste Zeile gemäß (5.19) berechnet, die restliche Zeilen ergeben sich nach dem in (5.18) angegebenen Bildungsgesetz.

Man beachte, dass die letzte Zeile der ersten Bedingung in (5.16), also

$$\mathbf{t}_n^T \mathbf{A} = -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_2^T - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_n^T \quad (5.20)$$

bisher nicht betrachtet wurde. Setzt man die in (5.17) gefundenen Zusammenhänge ein, so erhält man

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^n = -\alpha_0 \mathbf{t}_1^T - \alpha_1 \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} - \dots - \alpha_{n-1} \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1}$$

bzw.

$$\mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) = \mathbf{0}. \quad (5.21)$$

Gemäß dem Satz von Cayley und Hamilton erfüllt *jede* quadratische Matrix ihre eigene charakteristische Gleichung. Das charakteristische Polynom von  $\mathbf{A}$  lautet

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0, \quad (5.22)$$

d.h. für Klammerausdruck in (5.21) gilt

$$\Delta(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n = \mathbf{0}, \quad (5.23)$$

die Bedingung (5.20) ist somit auf jeden Fall erfüllt und bedarf keiner weiteren Beachtung.

**B** Gegeben sei das steuerbare mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

das in die Regelungsnormalform transformiert werden soll. Dazu wird die Steuerbarkeitsmatrix und deren Inverse ermittelt, d.h.

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}_u^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix lautet

$$\mathbf{t}_1^T = [ 0 \quad 1 ],$$

woraus unmittelbar

$$\mathbf{t}_2^T = \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} = [ 0 \quad 1 ] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [ 1 \quad 0 ]$$

folgt. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  lautet somit

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese besagt, dass man beim vorliegenden System nur die beiden Zustandsgrößen vertauschen muss, um die Beschreibung in die erste Normalform überzuführen. ■

### 5.2.5 Formel von Ackermann

In den bisherigen Ausführungen wurde gezeigt, wie ein beliebiges (steuerbares) System (5.1) in die Regelungsnormalform transformiert werden kann. Für das zugehörige transformierte System (5.13) gestaltet sich der Zustandsreglerentwurf

$$u = -\mathbf{h}^T \mathbf{z} \tag{5.24}$$

dann äußerst einfach. Die Ermittlung des Zustandsreglers für das Originalsystem (5.1) mittels (5.12) liefert schließlich

$$u = -\mathbf{h}^T \mathbf{T} \mathbf{x} = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}. \tag{5.25}$$

Fasst man die soeben beschriebenen Verfahrensschritte geschickt zusammen, so zeigt sich, dass für die Ermittlung von  $\mathbf{k}^T$  in (5.25) die Ermittlung von  $\mathbf{T}$  bzw. die explizite Durchführung der Zustandstransformation gar nicht erforderlich ist.

Der Reglerentwurf für das transformierte System in Regelungsnormalform kann analog zu (5.11) durchgeführt werden, d.h. für den Vektor  $\mathbf{h}^T$  in (5.24) gilt

$$\mathbf{h}^T = [ w_0 - \alpha_0 \quad w_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad w_{n-1} - \alpha_{n-1} ]. \tag{5.26}$$

Hierbei sind  $w_0, \dots, w_{n-1}$  die Koeffizienten des Wunschpolynoms (5.5) und  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms (5.21) von  $\mathbf{A}$ . Die Berechnung von  $\mathbf{k}^T$  erfolgt gemäß (5.25), d.h. mit (5.26) und (5.18) folgt

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{h}^T \mathbf{T} = [ w_0 - \alpha_0 \quad w_1 - \alpha_1 \quad \dots \quad w_{n-1} - \alpha_{n-1} ] \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Nach Ausführung der Multiplikation

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}) - \mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1})$$

und Addition des „Nullterms“  $\mathbf{t}_1^T (\mathbf{A}^n - \mathbf{A}^n)$  erhält man schließlich

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) - \mathbf{t}_1^T (\alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n).$$

Ein Vergleich mit (5.23) zeigt, dass der zweite Klammerausdruck in obiger Gleichung dem Matrixpolynom  $\Delta(\mathbf{A})$  entspricht, d.h. es gilt

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T (w_0 \mathbf{E} + w_1 \mathbf{A} + \dots + w_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n).$$

Der Vektor  $\mathbf{k}^T$  entspricht also dem Produkt aus  $\mathbf{t}_1^T$  und dem Wunschpolynom  $w(s)$ , in dem  $s$  durch  $\mathbf{A}$  ersetzt wird. Diese Erkenntnis wird durch die so genannte **Formel von Ackermann**<sup>2</sup>

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T w(\mathbf{A}) \quad (5.27)$$

in prägnanter Weise widergespiegelt.

**B** Gegeben sei das steuerbare mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Es soll mit der Formel von Ackermann ein Zustandsregler der Form (5.2) so berechnet werden, dass die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  bei

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

liegen, d.h. das Wunschpolynom lautet

$$w(s) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9.$$

Die Steuerbarkeitsmatrix und ihre Inverse lauten

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S}_u^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{t}_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Ausdruck  $w(\mathbf{A})$  berechnet sich zu

$$w(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} + 9\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 0 & 16 \end{bmatrix},$$

d.h. die Auswertung von (5.27) liefert

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{t}_1^T w(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Der gesuchte Zustandsregler lautet somit

$$u = - \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -8x_1 - 8x_2.$$

<sup>2</sup>benannt nach dem deutschen Regelungstechniker Jürgen Ackermann (geboren 1936)



### 5.2.6 Stabilisierung beliebiger Arbeitspunkte

Mit dem vorgestellten Konzept des Zustandsreglers (5.2) kann man prinzipiell beliebige Arbeitspunkte, also Ruhelagen der Regelstrecke (5.1) stabilisieren. Ein solche Ruhelage ist durch die konstanten Größen  $\mathbf{x}_R$  und  $u_R$  charakterisiert, wobei bekanntlich  $\mathbf{A}\mathbf{x}_R + \mathbf{b}u_R = 0$  erfüllt sein muss. Mit

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R \quad \text{und} \quad v = u - u_R \quad (5.28)$$

werden die Abweichungen des Zustandes  $\mathbf{x}$  und der Stellgröße  $u$  von ihren konstanten Werten im Arbeitspunkt bezeichnet. Für (5.1) ergibt sich dann

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_R) + \mathbf{b}(v + u_R) = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}v. \quad (5.29)$$

Mit der Zustandsrückführung

$$v = -\mathbf{k}^T \boldsymbol{\xi} \quad (5.30)$$

erhält man

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \boldsymbol{\xi}. \quad (5.31)$$

Genau dann, wenn  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  eine Hurwitzmatrix ist, gilt für jeden beliebigen Anfangswert  $\boldsymbol{\xi}_0 := \boldsymbol{\xi}(t=0)$ , also  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\xi}_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R. \quad (5.32)$$

Das bedeutet, dass der durch  $\mathbf{x}_R$  und  $u_R$  charakterisierte Arbeitspunkt asymptotisch stabil ist. Aus (5.30) und (5.28) erhält man den Zustandsregler

$$u = u_R - \mathbf{k}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R), \quad (5.33)$$

siehe auch Bild 5.2.

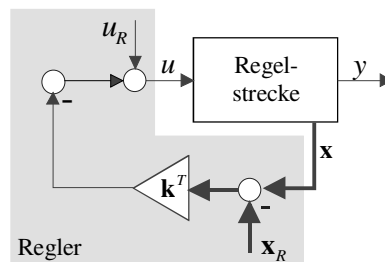


Bild 5.2: Stabilisierung eines beliebigen Arbeitspunktes

**B** Für die Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

soll ein Zustandsregler (5.33) so entworfen werden, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen, d.h.

$$\mathbf{k}^T = \left[ 1\frac{2}{3} \quad 7\frac{1}{3} \right].$$

Für  $t < 1$  soll die Ruhelage  $\mathbf{x}_A = [-2 \quad 1]^T$ ,  $u_A = 0$  stabilisiert werden, für  $t \geq 1$  soll die Ruhelage  $\mathbf{x}_E = [1 \quad -0.5]^T$ ,  $u_E = 0$  angefahren und stabilisiert werden. Das bedeutet, dass für die in Bild 5.2 eingezeichneten Größen  $\mathbf{x}_R$  und  $u_R$  gilt

$$\mathbf{x}_R = \begin{cases} \mathbf{x}_A & \text{für } t < 1 \\ \mathbf{x}_E & \text{für } t \geq 1 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad u_R = \begin{cases} u_A & \text{für } t < 1 \\ u_E & \text{für } t \geq 1 \end{cases}.$$

In Bild 5.3 sind die resultierenden Verläufe der Zustandsgrößen und der Stellgröße dargestellt, der gewünschte Arbeitspunktwechsel ist deutlich zu erkennen. ■

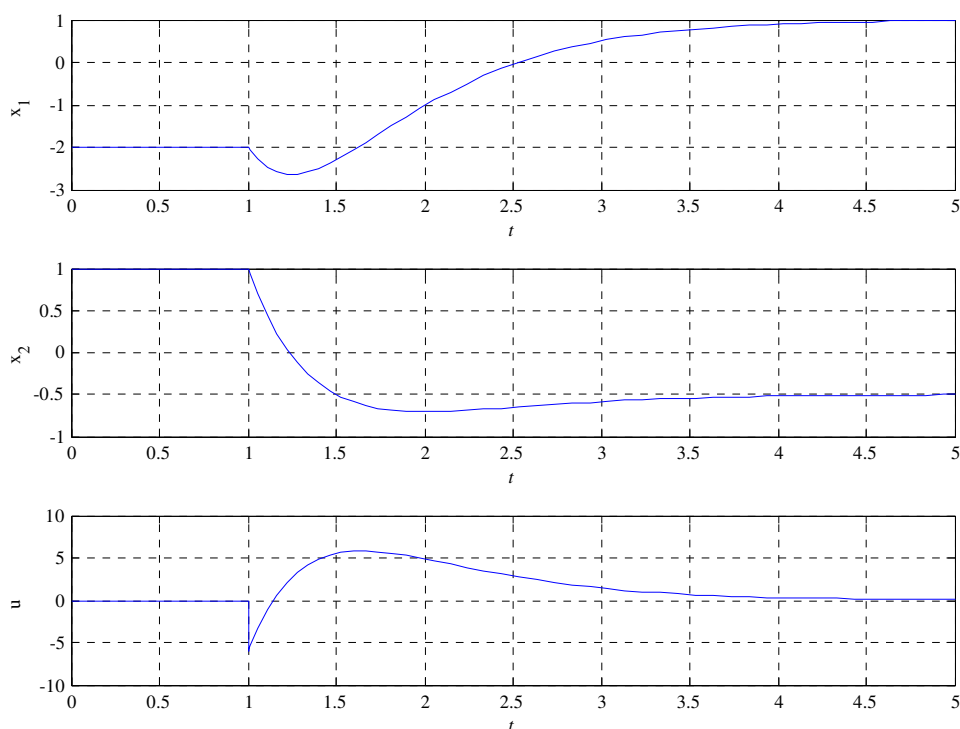


Bild 5.3: Übergang von  $\mathbf{x}_A$  nach  $\mathbf{x}_E$  mit Hilfe eines Zustandsreglers

## 5.3 Nachführung

Zusätzlich zur Stabilität des Regelkreises wird nun gefordert, dass die Ausgangsgröße  $y(t)$  asymptotisch gegen einen vorgebbaren konstanten Wert  $r_0$  strebt. Die Größe  $y(t)$  wird also einer konstanten Referenzgröße  $r(t) = r_0$  asymptotisch nachgeführt. Dazu wird das Regelgesetz (5.2) um einen zu  $r$  proportionalen Anteil ergänzt, d.h.

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + V r. \quad (5.34)$$

Dabei ist  $V$  ein entsprechend zu bestimmender reeller, skalarer Reglerparameter. Das mathematische Modell des in Bild 5.4 dargestellten Regelkreises lautet somit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}V r, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (5.35)$$

Man beachte, dass die oben formulierte Forderung

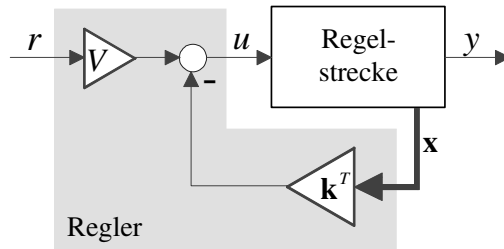


Bild 5.4: Prinzip der Nachführung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_\infty \stackrel{!}{=} r_0 \quad (5.36)$$

impliziert, dass der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  für  $t \rightarrow \infty$  ebenfalls gegen einen konstanten Wert  $\mathbf{x}_\infty$  strebt, d.h. die Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  strebt asymptotisch in die Ruhelage  $\mathbf{x}_\infty$ . Aus (5.35) folgt dann unmittelbar

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt} = \mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x}_\infty + \mathbf{b}V r_0,$$

da  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  als Hurwitzmatrix vorausgesetzt werden kann, gilt für die Ruhelage

$$\mathbf{x}_\infty = -(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V r_0. \quad (5.37)$$

Durch Einsetzen in (5.36) findet man

$$y_\infty = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_\infty = -\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V r_0 \stackrel{!}{=} r_0.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Berechnungsvorschrift

$$V = -\frac{1}{\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}} \quad (5.38)$$

für den gesuchten Reglerparameter. Eine Veränderung von  $\mathbf{k}^T$  macht also eine entsprechende Anpassung von  $V$  erforderlich.

*Hinweis:* Bei Regelstrecken mit einer Nullstelle bei  $s = 0$  ist die beschriebene Nachführung *nicht* anwendbar. Um die Ausgangsgröße  $y$  auf einem konstanten Wert zu halten ist hier eine rampenförmig ansteigende Stellgröße erforderlich, was aufgrund von Stellgrößenbeschränkungen praktisch nicht realisierbar ist.

**B Fortsetzung.** Der Zustandsregler aus dem vorangegangenen Beispiel wird gemäß (5.34) erweitert. Die Ausgangsgröße

$$y = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

soll einer (konstanten) Referenzgröße asymptotisch nachgeführt werden. Die Auswertung von (5.38) ergibt den Reglerparameter

$$V = -\frac{1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = 9.$$

■

Mit Hilfe des Parameters  $V$  wird also der Verstärkungsfaktor der Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{b}V \quad (5.39)$$

des Regelkreises (5.35) auf den Wert eins korrigiert, d.h.

$$T(0) = -\mathbf{c}^T (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}V \stackrel{!}{=} 1,$$

woraus unmittelbar (5.38) folgt.

Man beachte, dass die Nachführung (5.36) nur bei *exakter* Kenntnis von  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  gewährleistet ist. Bei Variationen von Streckenparametern oder aufgrund von Modellierungsungenauigkeiten geht im praktischen Einsatz die Eigenschaft (5.36) des Regelkreises verloren. Eine „robuste“ Nachführung kann hingegen mit dem im folgenden Abschnitt vorgestellten PI - Zustandsregler erzielt werden.

**B** Gegeben sei das steuerbare Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke. Es wird ein Zustandsregler der Form (5.34) so entworfen, dass die Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen und die Bedingung (5.36) erfüllt ist. Die zuvor beschriebenen Methoden liefern die Reglerparameter

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad V = 0.4 \quad (5.40)$$

Zunächst wird das Verhalten des Regelkreises für den Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} -0.8 & -2.5 \end{bmatrix}$$

und die Referenzgröße  $r(t) = 0$  untersucht. Die zugehörigen Verläufe der Zustandsvariablen  $x_1$  und  $x_2$  sind in Bild 5.5 dargestellt. In Bild 5.6 ist für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r = \sigma(t)$  der Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  dargestellt. In der oberen Abbildung ist zu erkennen, dass  $y$  wie gewünscht

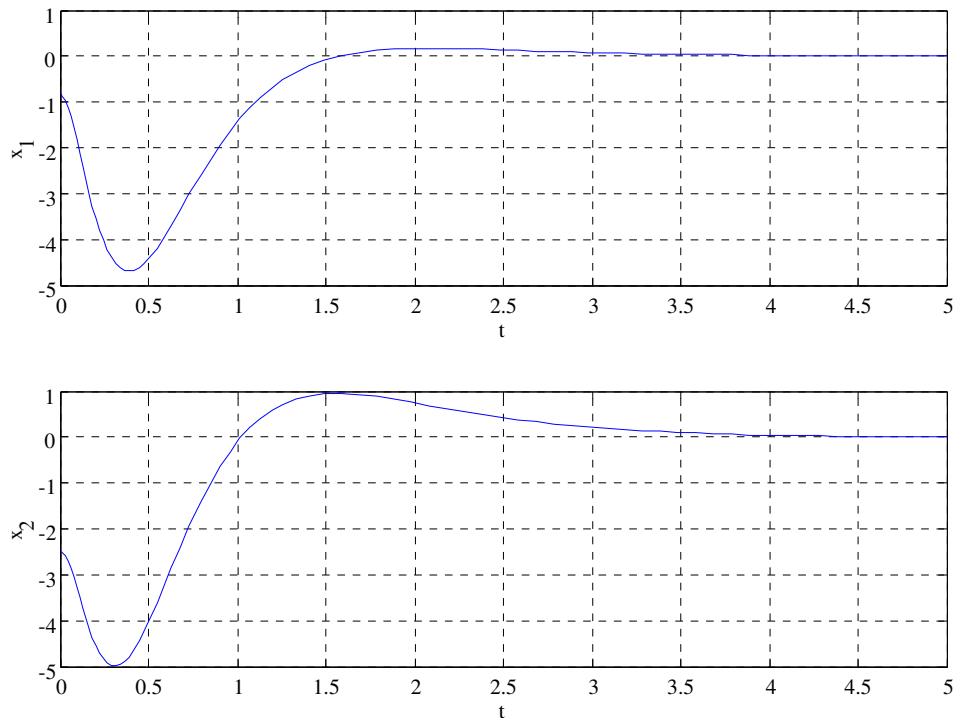


Bild 5.5: Verlauf der Zustandsgrößen für  $\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} -0.8 & -2.5 \end{bmatrix}$  und  $r(t) = 0$  bei Verwendung eines Zustandsreglers der Form (5.34)

asymptotisch den Wert der Referenzgröße annimmt. Der in der unteren Abbildung dargestellte Verlauf von  $y$  ergibt sich, wenn bei Verwendung des Reglers (5.40) im Simulationsmodell der Regelstrecke das erste Element der ersten Zeile von  $\mathbf{A}$  auf den Wert 0.9 geändert wird. Man erkennt, dass in diesem Fall die stationäre Genauigkeit verloren geht. ■

Mit Hilfe des Zustandsreglers (5.34) werden die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises platziert und die stationäre Verstärkung wird entsprechend angepasst. Das bedeutet, die Führungsübertragungsfunktion des Regelkreises lautet

$$T(s) = V \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{b} = V \frac{\mu(s)}{w(s)}. \quad (5.41)$$

Das Zählerpolynom der ungekürzten Führungsübertragungsfunktion entspricht - bis auf den Faktor  $V$  - dem Zählerpolynom der Regelstrecke. Das Nennerpolynom  $w(s)$  ist das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  und kann beliebig gewählt werden. Die Nullstellen von  $T(s)$  entsprechen also den Streckennullstellen, ggf. sind Kürzungen von Streckennullstellen mit entsprechenden Nullstellen von  $\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))$  zu berücksichtigen. Diese Tatsache ist besonders leicht zu erkennen, wenn das Streckenmodell in Regelungsnormalform vorliegt.

**B** Gegeben sei das Streckenmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \text{d.h.} \quad P(s) = \left. \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} \right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{s+3}{s^2-1}.$$

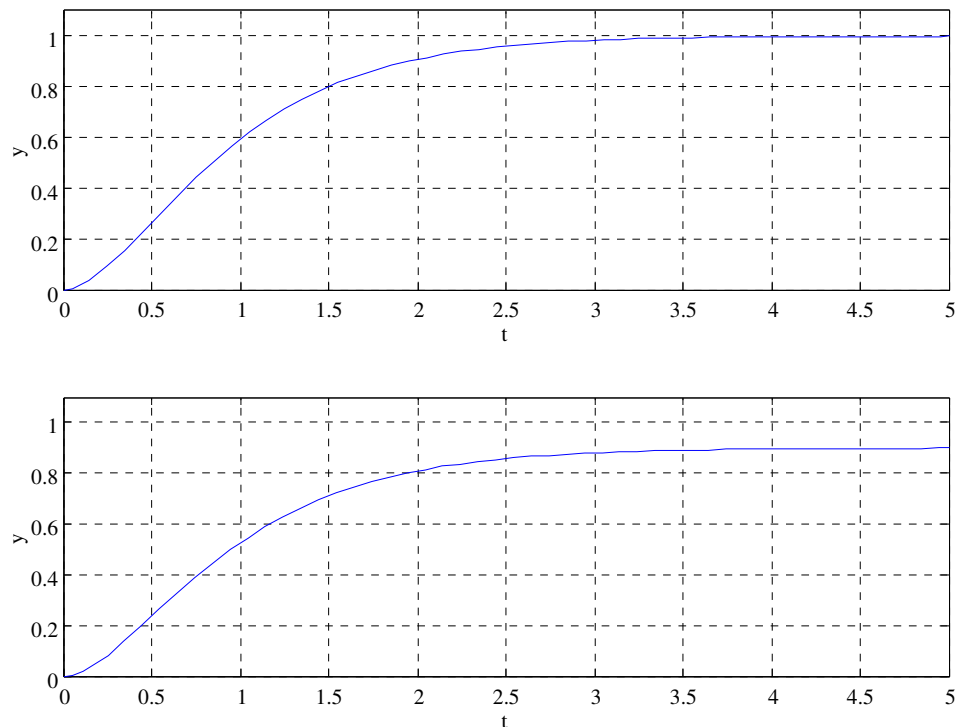


Bild 5.6: Verlauf der Ausgangsgröße für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r(t) = \sigma(t)$  bei Verwendung eines Zustandsreglers der Form (5.34)

Für den geschlossenen Regelkreis, bestehend aus Strecke und Regler (5.34) gilt dann

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} r, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

d.h. die Führungsübertragungsfunktion lautet

$$T(s) = \frac{V(s+3)}{s^2 + k_2s + (k_1 - 1)}.$$

Für die Wahl  $k_1 = k_2 = 2$  besitzt der geschlossene Regelkreis zwei Eigenwerte bei  $s_1 = s_2 = -1$  und es gilt mit  $V = \frac{1}{3}$

$$T(s) = \frac{1}{3} \frac{(s+3)}{(s+1)^2}.$$

Wählt man hingegen  $k_1 = k_2 = 4$ , so gilt  $s_1 = -1$  und  $s_2 = -3$  und mit  $V = 1$  folgt für die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{1}{s+1}.$$

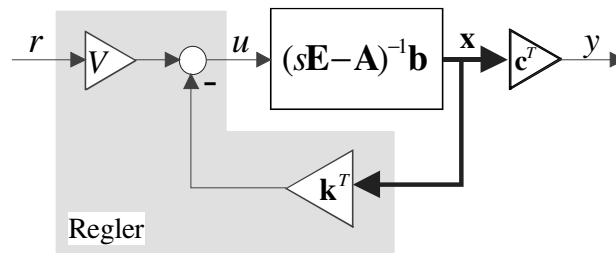


Bild 5.7: Regelkreis mit Zustandsregler

### 5.3.1 Deutung des Regelkreises im Frequenzbereich

Der in Bild 5.7 dargestellte Regelkreis wird nun im Frequenzbereich analysiert. Dabei wird wie gewohnt vorausgesetzt, dass für den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  gilt. Aus (5.1) folgt

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\bar{u}(s), \quad (5.42)$$

wobei für die Stellgröße

$$\bar{u}(s) = V\bar{r}(s) - \mathbf{k}^T\bar{\mathbf{x}}(s) = V\bar{r}(s) - \mathbf{k}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\bar{u}(s),$$

also

$$\bar{u}(s) = \frac{V}{1 + \mathbf{k}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}}\bar{r}(s) \quad (5.43)$$

gilt. Mit (5.42) erhält man für den Zustandsvektor

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \frac{V}{1 + \mathbf{k}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\bar{r}(s)$$

und die Regelgröße

$$\bar{y}(s) = \mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}}(s) = V\frac{\mathbf{c}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}}{1 + \mathbf{k}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}}\bar{r}(s).$$

Das bedeutet, dass die Führungsübertragungsfunktion (5.39) auch in der Form

$$T(s) = V\frac{\mathbf{c}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}}{1 + \mathbf{k}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}} \quad (5.44)$$

angeschrieben werden kann. Aus der Forderung  $T(0) = 1$  folgt aus (5.44) die alternative Berechnungsvorschrift

$$V = \frac{\mathbf{k}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - 1}{\mathbf{c}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}} \quad (5.45)$$

für den Parameter  $V$ , die allerdings nur bei regulärer Matrix  $\mathbf{A}$  anwendbar ist. Bezeichnet man mit  $P(s)$  die Streckenübertragungsfunktion, d.h.

$$P(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}$$

und mit  $K(s)$  die Übertragungsfunktion

$$K(s) = \mathbf{k}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \frac{\gamma(s)}{\nu(s)},$$

so gilt für die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = V \frac{P(s)}{1 + K(s)} = V \frac{\mu(s)}{\nu(s) + \gamma(s)}. \quad (5.46)$$

Man erkennt hier deutlich, dass mittels  $\mathbf{k}^T$  nur das Nennerpolynom von  $T(s)$  verändert werden kann, während das Zählerpolynom fest vorgegeben ist. Die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises sind die Nullstellen der Übertragungsfunktion  $1 + K(s)$ , also die Nullstellen des Polynoms  $\nu(s) + \gamma(s)$ . Die Pole von  $T(s)$  sind im Allgemeinen eine Teilmenge davon.

**B** Für das vorhergehende Beispiel erhält man für  $\mathbf{k}^T = [ 2 \ 2 ]$  die Übertragungsfunktion

$$K(s) = [ 2 \ 2 ] \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2s+2}{s^2-1} = \frac{\gamma(s)}{\nu(s)},$$

d.h. für die Führungsübertragungsfunktion ergibt sich

$$T(s) = V \frac{s+3}{s^2-1+2s+2} = V \frac{s+3}{(s+1)^2}.$$

Für  $\mathbf{k}^T = [ 4 \ 4 ]$  erhält man

$$K(s) = \frac{4s+4}{s^2-1} = \frac{\gamma(s)}{\nu(s)}$$

und

$$T(s) = V \frac{s+3}{s^2-1+4s+4} = V \frac{s+3}{(s+1)(s+3)} = V \frac{1}{s+1}.$$

■

## 5.4 PI - Zustandsregler

Die Struktur eines Regelkreises mit einem PI - Zustandsregler ist in Bild 5.8 dargestellt. Zur Erzielung der stationären Genauigkeit (5.36) wird in den offenen Kreis ein Integrator eingefügt.

Bezeichnet man die Ausgangsgröße des Integrators mit  $\varepsilon$ , so gilt

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = r - y = r - \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (5.47)$$

Die Stellgröße wird über die Relation

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} - k_i \varepsilon - k_p (r - \mathbf{c}^T \mathbf{x}) = -(\mathbf{k}^T - k_p \mathbf{c}^T) \mathbf{x} - k_i \varepsilon - k_p r \quad (5.48)$$



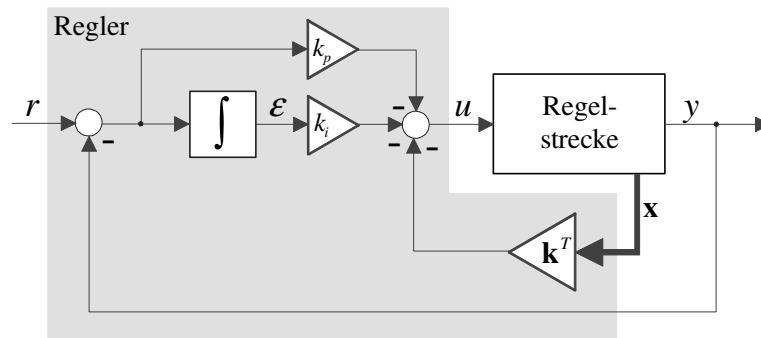


Bild 5.8: Regelkreis mit PI - Zustandsregler

gebildet, wobei  $\mathbf{k}^T$ ,  $k_i$  und  $k_p$  die  $(n + 2)$  Reglerparameter repräsentieren. Durch Einsetzen in (5.1) erhält man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p\mathbf{c}^T))\mathbf{x} - k_i\mathbf{b}\varepsilon - k_p\mathbf{b}r. \quad (5.49)$$

Fasst man  $\varepsilon$  und  $\mathbf{x}$  zu einem Vektor zusammen, so erhält man das Zustandsmodell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p\mathbf{c}^T) & -k_i\mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_p\mathbf{b} \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (5.50)$$

für den in Bild 5.8 dargestellten Regelkreis. Ist die Dynamikmatrix des Regelkreises eine Hurwitzmatrix, so ist aufgrund der Regelkreisstruktur die stationäre Genauigkeit (5.36) gewährleistet. Die Reglerparameter sollen nun so bestimmt werden, dass die Dynamikmatrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}(\mathbf{k}^T - k_p\mathbf{c}^T) & -k_i\mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{k}^T - k_p\mathbf{c}^T \quad k_i]$$

beliebig vorgegebene Eigenwerte besitzt. Mit den Definitionen

$$\tilde{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} := \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{k}}^T := [\mathbf{k}^T - k_p\mathbf{c}^T \quad k_i] \quad (5.51)$$

ist der Entwurf des PI - Zustandsreglers auf ein Eigenwertvorgabeproblem wie in den vorigen Abschnitten zurückgeführt. Damit die Eigenwerte der Matrix  $(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T)$  beliebig vorgegeben werden können, muss also das System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

d.h. die Serienschaltung aus Strecke und Integrator steuerbar sein. Das ist genau dann der Fall, wenn die steuerbare Strecke (5.1) keine Nullstellen bei  $s = 0$  besitzt.

Zu beachten ist, dass nun  $(n + 1)$  Eigenwerte vorgegeben werden müssen. Der Vektor  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  kann mit den bereits bekannten Methoden zur Eigenwertvorgabe ermittelt werden. Wie aus (5.51)

hervorgeht, entspricht die letzte Komponente von  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  dem Reglerparameter  $k_i$ . Im Gegensatz dazu gehen  $\mathbf{k}^T$  und  $k_p$  aus den ersten  $n$  Komponenten von  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  nicht eindeutig hervor. In vielen Fällen wird zunächst der Parameter  $k_p$  gewählt und danach der Vektor  $\mathbf{k}^T$  gemäß

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \dots & \tilde{k}_n \end{bmatrix} + k_p \mathbf{c}^T \quad (5.52)$$

berechnet. Eine mögliche Wahl von  $k_p$  lautet<sup>3</sup> beispielsweise

$$k_p = \frac{1}{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}. \quad (5.53)$$

Dadurch wird erreicht, dass der Regler bei einer konstanten Referenzgröße  $r(t) = r_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  denjenigen Stellgrößenwert generiert, der dem konstanten Wert der Stellgröße  $u$  im stationären Zustand entspricht.

**B** Für das Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke wird ein PI - Zustandsregler so entworfen, dass die drei(!) Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = s_3 = -2$  liegen. Der Vektor  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  ist also so zu bestimmen, dass die Matrix

$$\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 \end{bmatrix}$$

die gewünschten Eigenwerte besitzt. Diese Berechnung liefert

$$\tilde{\mathbf{k}}^T = \begin{bmatrix} 13 & -7 & -0.8 \end{bmatrix},$$

d.h. es gilt  $k_i = -0.8$ . Für den Parameter  $k_p$  wird der Wert  $k_p = -0.3$  gewählt, woraus sich über (5.52) der Vektor

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 13 & -7 \end{bmatrix} - 0.3 \cdot \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 \end{bmatrix}$$

ergibt. In Bild 5.9 ist der Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r = \sigma(t)$  dargestellt. Der oberen Abbildung ist zu entnehmen, dass  $y$  asymptotisch den Wert der Referenzgröße annimmt. Der in der unteren Abbildung dargestellte Verlauf von  $y$  ergibt sich, wenn bei Verwendung des gleichen Reglers im Simulationsmodell der Regelstrecke das erste Element der ersten Zeile von  $\mathbf{A}$  auf den Wert 0.9 geändert wird. Man erkennt deutlich, dass in diesem Fall die stationäre Genauigkeit erhalten bleibt. ■

Eine weitere Möglichkeit, einen PI-Zustandsregler auszulegen, besteht darin, seine  $(n + 2)$  Reglerparameter so zu bestimmen, dass die Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  derjenigen Führungsübertragungsfunktion entspricht, die sich mit einem klassischen Zustandsregler ergibt. Gemäß (5.41) soll also

$$T(s) \stackrel{!}{=} V \frac{\mu(s)}{w(s)} \quad (5.54)$$

<sup>3</sup>dabei wird vorausgesetzt, dass die Strecke keinen Eigenwert bei  $s = 0$  besitzt, d.h.  $\mathbf{A}$  ist regulär.

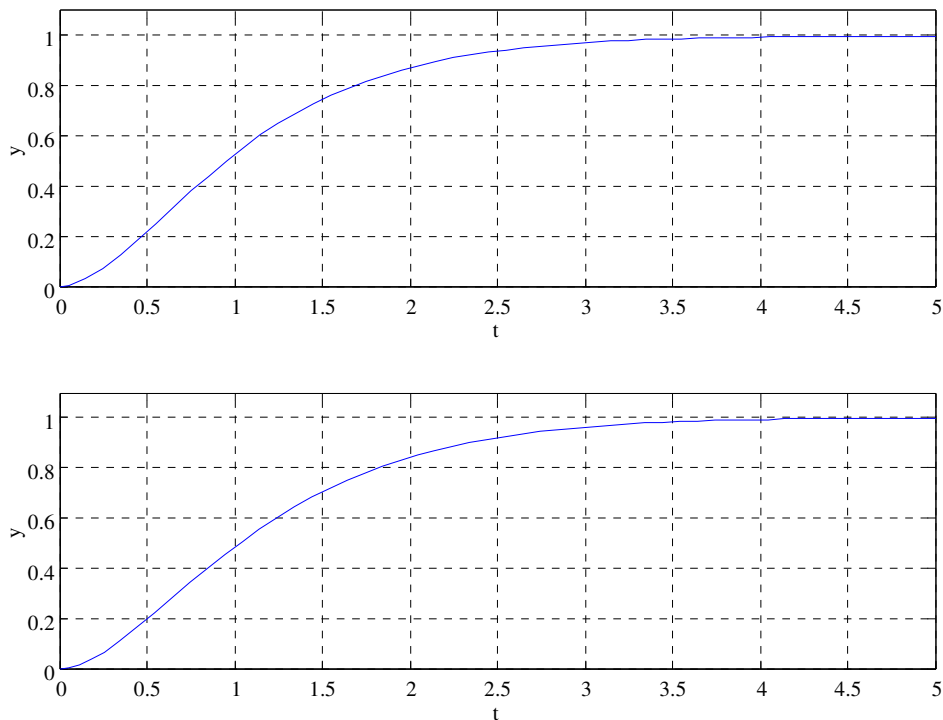


Bild 5.9: Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  für  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  und  $r(t) = \sigma(t)$  bei Verwendung eines PI-Zustandsreglers

gelten. Hierbei ist  $\mu(s)$  das Zählerpolynom der Regelstrecke und  $w(s)$  ist ein frei vorgegbares Hurwitzpolynom. Mit dem reellen Faktor  $V$  wird gewährleistet, dass  $T(0) = 1$  gilt, d.h.

$$V = \frac{w(0)}{\mu(0)}. \quad (5.55)$$

Der in Bild 5.8 dargestellte Regelkreis entspricht einem Standardregelkreis, bei dem der offene Kreis die Serienschaltung des PI-Reglers

$$R(s) = -\frac{k_p s + k_i}{s}$$

und der Regelstrecke mit Zustandsrückführung, also

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T))^{-1} \mathbf{b} = \frac{\mu(s)}{\tilde{w}(s)}$$

ist. Das Zählerpolynom der ungekürzten Übertragungsfunktion  $G(s)$  entspricht dabei dem Zählerpolynom der Regelstrecke, das Polynom  $\tilde{w}(s)$  kann mittels  $\mathbf{k}^T$  beliebig vorgegeben werden. Für die Übertragungsfunktion des offenen Kreises gilt somit

$$L(s) = R(s)G(s) = -\frac{(k_p s + k_i)}{s} \frac{\mu(s)}{\tilde{w}(s)} = \frac{-k_p \left( s + \frac{k_i}{k_p} \right) \mu(s)}{s \tilde{w}(s)}. \quad (5.56)$$

Um die in (5.54) angegebene Forderung zu erfüllen, muss  $L(s)$  der Bedingung

$$L(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} \stackrel{!}{=} \frac{V \mu(s)}{w(s) - V \mu(s)} \quad (5.57)$$

genügen. Ein Vergleich von (5.56) und (5.57) verdeutlicht, dass

$$k_p \stackrel{!}{=} -V \quad (5.58)$$

und dass der Linearfaktor  $\left(s + \frac{k_i}{k_p}\right)$  ein Teiler von  $\tilde{w}(s)$  sein muss, d.h.

$$\tilde{w}(s) = \left(s + \frac{k_i}{k_p}\right) w^*(s). \quad (5.59)$$

Setzt man (5.58) und (5.59) in (5.56) ein, so erhält man

$$L(s) = \frac{V \left(s + \frac{k_i}{k_p}\right) \mu(s)}{s \left(s + \frac{k_i}{k_p}\right) w^*(s)} \stackrel{\text{Kürzung}}{=} \frac{V \mu(s)}{s w^*(s)}. \quad (5.60)$$

Man beachte, dass die in (5.60) angedeutete Kürzung natürlich nur dann zulässig ist, wenn die Bedingung

$$\gamma := \frac{k_i}{k_p} > 0 \quad (5.61)$$

erfüllt ist. Aus (5.57) und (5.60) folgt nun unmittelbar, dass

$$s w^*(s) \stackrel{!}{=} w(s) - V \mu(s)$$

gelten muss. Da das Polynom  $(w(s) - V \mu(s))$  wegen  $T(0) = 1$  eine Nullstelle bei  $s = 0$  besitzen muss, kann  $w^*(s)$  über die Relation

$$w^*(s) = \frac{w(s) - V \mu(s)}{s}. \quad (5.62)$$

ermittelt werden. Mit (5.59) gilt für das Polynom  $\tilde{w}(s)$  somit

$$\tilde{w}(s) = (s + \gamma) w^*(s) = (s + \gamma) \frac{w(s) - V \mu(s)}{s} \quad (5.63)$$

Der beschriebene Entwurfsprozess kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

- I)** Setze  $k_p = -V = -\frac{w(0)}{\mu(0)}$
- II)** Wähle  $\gamma > 0$  und berechne  $k_i = k_p \gamma$
- III)** Setze  $\tilde{w}(s) = \frac{w(s) + k_p \mu(s)}{s} (s + \gamma)$
- IV)** Berechne  $\mathbf{k}^T$  so, dass  $\det(s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)) = \tilde{w}(s)$

**B** Gegeben sei das Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [10 \quad -10] \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{10}{s^2 - 1}.$$

Es soll ein PI - Zustandsregler so entworfen werden, dass der Regelkreis die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{4}{s^2 + 2.4s + 4}$$

besitzt. Gemäß obigem Entwurfsschema **(I)** setzt man zunächst

$$k_p = -\frac{w(0)}{\mu(0)} = -\frac{4}{10} = -0.4.$$

Mit der Wahl  $\gamma = 2$  erhält man mit **(II)** dann

$$k_i = -0.8.$$

Für das Polynom  $\tilde{w}(s)$  ergibt sich nach **(III)**

$$\tilde{w}(s) = \frac{s^2 + 2.4s + 4 - 0.4 \cdot 10}{s} (s + 2) = (s + 2.4)(s + 2).$$

Aus **(IV)** folgt dann

$$\mathbf{k}^T = [5.8 \quad -1.4].$$

■

## 5.5 Wahl der Eigenwerte

In diesem Abschnitt werden Hinweise zur Wahl der Eigenwertkonfiguration des geschlossenen Regelkreises gegeben. Es wird die Vorgabe eines so genannten dominanten Eigenwertpaares erläutert. Aus dem gewünschten prozentualen Überschwingen und der Anstiegszeit für die Sprungantwort des Regelkreises kann die erforderliche Lage der Eigenwertpaares ermittelt werden.

### 5.5.1 Dominantes Eigenwertpaar

Eine Möglichkeit, die Eigenwerte des geschlossenen Kreises zu wählen, beruht auf der Annahme, dass das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises durch ein dominantes Eigenwertpaar geprägt ist. Hierbei ist zu beachten, dass bei dieser Vorgangsweise prinzipiell vorausgesetzt werden muss, dass die Regelstrecke *keine* Nullstellen besitzt.

Man geht davon aus, dass die Führungübertragungsfunktion des Regelkreises näherungsweise die Form

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2d\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{mit} \quad 0 < d < 1 \quad \text{und} \quad \omega_n > 0 \quad (5.64)$$

besitzt. Die dominanten Eigenwerte  $s_{1,2}$  sind die Pole von  $T(s)$ , d.h.

$$s_{1,2} = -d\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-d^2}. \quad (5.65)$$

Das gewünschte Verhalten des Regelkreises bei einem Sprung der Referenzgröße  $r$  wird durch das prozentuale Überschwingen  $\ddot{u}$  und die Anstiegszeit  $t_r$  spezifiziert. Die „Form“ der Sprungantwort wird dabei ausschließlich durch den Parameter  $d$  festgelegt, d.h. der Zusammenhang zwischen Überschwingen  $\ddot{u}$  und Dämpfungsgrad  $d$  ist eindeutig. Aus dem Bild 5.10 (oben) kann zu vorgegebenem Überschwingen der zugehörige Dämpfungsgrad  $d$  abgelesen werden. Der Parameter  $\omega_n$  ist ein Maß für die „Reaktionsfreudigkeit“ des Systems. Eine Verzehnfachung von  $\omega_n$  bedeutet beispielsweise, dass die Sprungantwort um den Faktor 10 „gestaucht“ wird, eine Verkleinerung des Parameters entspricht einer Verlangsamung, d.h. einer „Streckung“ der Sprungantwort. Mit Hilfe von Bild 5.10 (Mitte) kann bei bekanntem  $d$  und vorgegebenem  $t_r$  der Parameter  $\omega_n$  ermittelt werden.

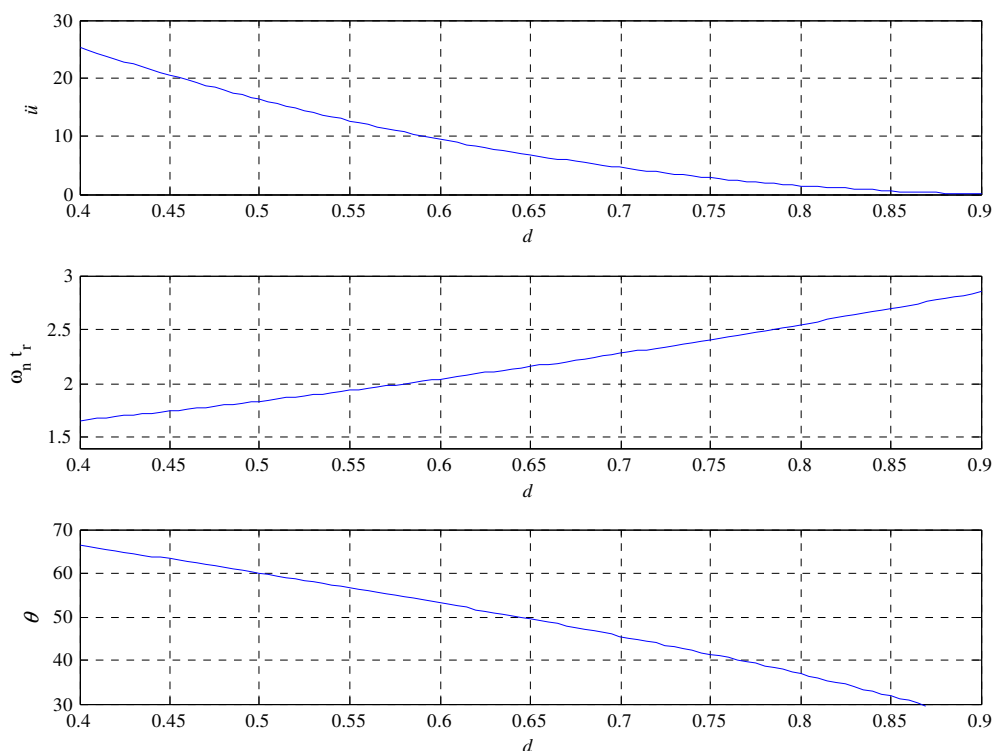


Bild 5.10: Zur Ermittlung von  $d$ ,  $\omega_n$  und  $\theta$  aus  $\ddot{u}$  und  $t_r$

**B** Die Parameter  $d$  und  $\omega_n$  sollen so bestimmt werden, dass die Sprungantwort von (5.64) ein prozentuales Überschwingen  $\ddot{u} = 10\%$  und eine Anstiegszeit  $t_r = 2$  besitzt.

Gemäß Bild 5.10 folgt aus der vorgegebenen Überschwingweite unmittelbar  $d = 0.6$  und  $\omega_n t_r \approx 2$ , d.h.  $\omega_n \approx 1$ . ■

Die Lage der dominanten Eigenwerte  $s_{1,2}$  in der komplexen Ebene ist in Bild 5.11, links eingezeichnet. Wie man leicht überprüfen kann, gilt  $|s_{1,2}| = \omega_n$  und es folgt für den eingezeichneten

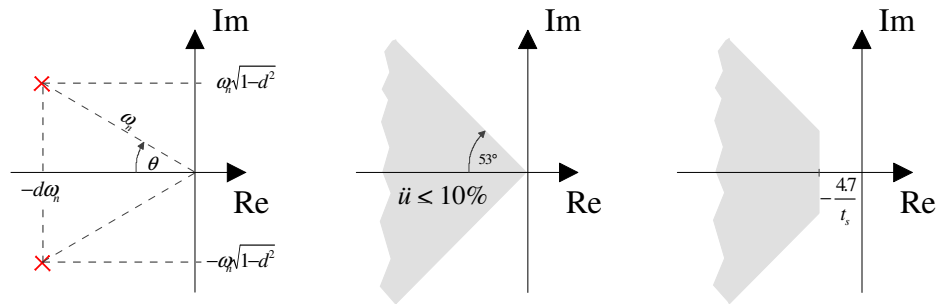


Bild 5.11: Zur Lage der dominanten Eigenwerte in der komplexen Ebene

Winkel  $\Theta$  unmittelbar

$$\Theta = \cos^{-1} d. \quad (5.66)$$

Das bedeutet, dass zu jedem Wert von  $\ddot{u}$  ein Winkel  $\Theta$  berechnet werden kann, siehe Bild 5.10, unten. Will man also beispielsweise erreichen, dass für die Sprungantwort des Regelkreises  $\ddot{u} \leq 10\%$  gilt, so müssen die dominanten Eigenwerte in dem im mittleren Bild 5.11 grau dargestellten Bereich liegen. Häufig wird auch noch die so genannte Ausregelzeit  $t_s$  („settling time“) angegeben, ab der sich die Regelgröße  $y$  in einem 2%-Band um ihren stationären Endwert  $y_\infty$  befindet, d.h.  $0.98 y_\infty \leq y(t) \leq 1.02 y_\infty$  für  $t \geq t_s$ . Wie man zeigen kann, müssen - unter Annahme von  $d \leq 0.9$  - die Parameter  $d$  und  $\omega_n$  der Bedingung

$$d \omega_n \geq \frac{4.7}{t_s} \quad (5.67)$$

genügen. Die zusätzliche Forderung (5.67) schränkt den zulässigen Bereich für die Lage der dominanten Eigenwerte weiter ein, siehe rechtes Bild 5.11.

**B** Für das Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [10 \quad -10] \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke soll ein PI - Zustandsregler so entworfen werden, dass die Sprungantwort des Regelkreises die Eigenschaften  $\ddot{u} = 10\%$  und  $t_r = 1$  erfüllt. Man beachte, dass der offene Kreis für  $k_p \neq 0$  eine Nullstelle an der Stelle  $s = -\frac{k_i}{k_p}$  besitzt. Um die beschriebene Methodik der Wahl verwenden zu können, wird daher  $k_p = 0$  gewählt<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Alternativ könnte auch das im vorigen Abschnitt beschriebene Entwurfsschema verwendet werden.

Aus Bild 5.10 können die Parameterwerte

$$d = 0.6 \quad \text{und} \quad \omega_n = 2$$

abgelesen werden, d.h. das dominante Eigenwertpaar soll bei

$$s_{1,2} = -1.2 \pm j1.6$$

liegen. Der dritte Eigenwert  $s_3$  darf das Übertragungsverhalten des Regelkreises nicht signifikant beeinflussen, d.h. er muss hinreichend weit nach „links“ geschoben werden. Wie Bild 5.12 zu entnehmen ist, führt eine betragsmäßige Vergrößerung von  $s_3$  zu einer Erhöhung der Stellgröße. Im vorliegenden Fall stellt  $s_3 = -4$  einen guten Kompromiss dar, die vorgegebenen Spezifikationen werden zufriedenstellend erfüllt. Für den Vektor der Reglerparameter  $\tilde{\mathbf{k}}^T$  erhält

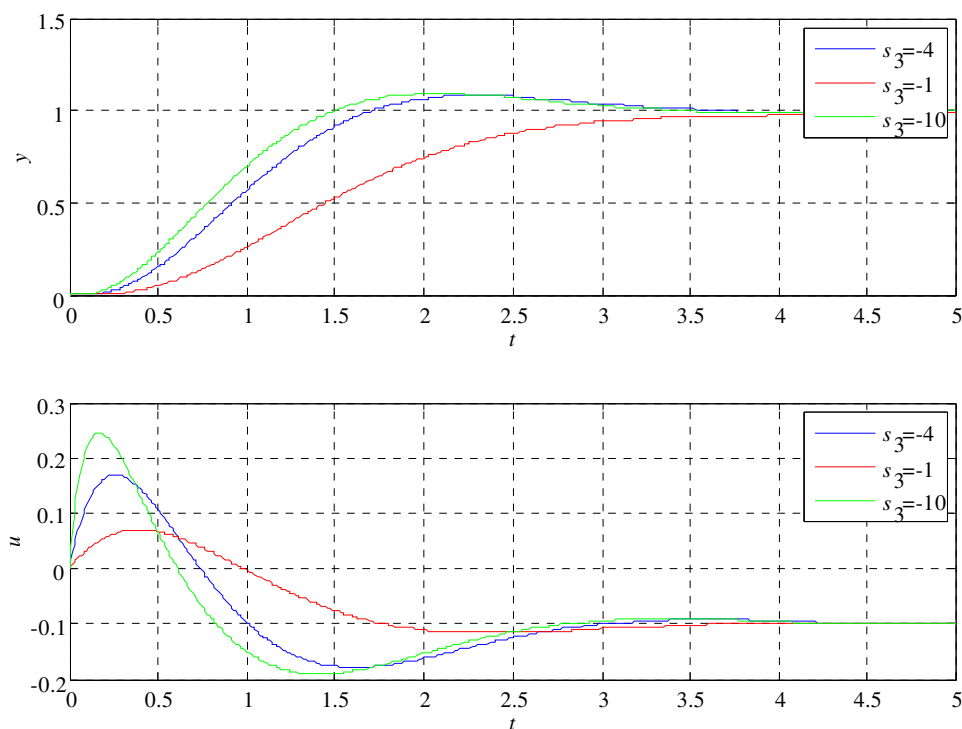


Bild 5.12: Sprungantwort des Regelkreises für verschiedene Werte von  $s_3$ .

man

$$\tilde{\mathbf{k}}^T = [ 14.6 \quad -8.2 \quad -1.6 ],$$

d.h. der PI-Zustandsregler ist durch

$$\mathbf{k}^T = [ 14.6 \quad -8.2 ], \quad k_p = 0 \quad \text{und} \quad k_i = -1.6$$

gegeben. ■



### 5.5.2 Linear-Quadratischer Regler

Bisher wurden die Parameter eines Zustandsregler aus den explizit vorgegebenen Eigenwerten der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises berechnet. Im Gegensatz dazu ergeben sich beim so genannten Linear-Quadratischen-Regler (LQR) die Reglerparameter aus der Lösung einer Optimierungsaufgabe. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Modell der Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (5.68)$$

steuerbar ist und der Anfangszustand durch  $\mathbf{x}_0$  beschrieben wird.

Zunächst werden einige wichtige Begriffe, die für das Verständnis der Reglerentwurfsaufgabe wesentlich sind, erläutert. Danach werden das zu lösende Optimierungsproblem und der daraus resultierende optimale Zustandsregler ausführlich diskutiert.

#### Positive Definitheit einer Matrix

Eine symmetrische  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{S}$  wird **positiv definit** genannt, d.h.  $\mathbf{S} \succ 0$ , wenn die zugehörige **quadratische Form**  $\mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z}$  für alle  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$  positive Werte annimmt, d.h.

$$\mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z} > 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S} \succ 0.$$

Man kann zeigen, dass  $\mathbf{S}$  genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte der Matrix positiv sind. Mit dem **Sylvester<sup>5</sup>-Kriterium** kann die positive Definitheit einer symmetrischen Matrix auch ohne explizite Berechnung der Eigenwerte überprüft werden. Die symmetrische Matrix  $\mathbf{S}$  ist nämlich genau dann positiv definit, wenn alle „nordwestlichen Unterdeterminanten“ von  $\mathbf{S}$  positiv sind.

**B** Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Für positive Definitheit von  $\mathbf{S}_1$  müssen nach dem Sylvester-Kriterium die Bedingungen  $1 > 0$  und  $\det \mathbf{S}_1 > 0$  erfüllt sein. Wegen  $\det \mathbf{S}_1 = -1$  kann gefolgert werden, dass  $\mathbf{S}_1$  nicht positiv definit ist. Im Gegensatz dazu ist  $\mathbf{S}_2$  positiv definit, da  $2 > 0$  und  $\det \mathbf{S}_2 = 5 > 0$  erfüllt ist.

Für positive Definitheit von  $\mathbf{S}_3$  müssen die Bedingungen  $3 > 0$ ,  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$  und  $\det \mathbf{S}_3 > 0$  erfüllt sein, d.h.  $\mathbf{S}_3$  ist eine positiv definite Matrix. ■

#### Vorbetrachtungen

Zur besseren Nachvollziehbarkeit der nachfolgenden Abschnitte wird zunächst eine vereinfachte Aufgabenstellung betrachtet. Ausgangspunkt ist das asymptotisch stabile System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0). \quad (5.69)$$

<sup>5</sup>benannt nach dem britischen Mathematiker James Joseph Sylvester (1814 - 1897)

Jeder Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  wird eine Maßzahl

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt \quad (5.70)$$

zugeordnet, wobei  $\mathbf{Q}$  eine vorgebbare positiv definite Matrix ist. Das bedeutet, dass  $J$  außer für einen verschwindenden Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  sicher immer positive Werte annimmt. Setzt man nun in (5.70) die Lösung von (5.69) ein, also

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0, \quad (5.71)$$

wobei  $\phi(t)$  die Transitionsmatrix ist, so erhält man

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}_0^T \phi^T(t) \mathbf{Q} \phi(t) \mathbf{x}_0 dt = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \int_0^{\infty} \phi^T(t) \mathbf{Q} \phi(t) dt \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad (5.72)$$

wobei die konstante Matrix

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} \phi^T(t) \mathbf{Q} \phi(t) dt \quad (5.73)$$

gemäß obiger Überlegungen eine positiv definite Matrix sein muss und offensichtlich von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{Q}$  abhängt. Das Integral (5.73) kann mittels partieller Integration berechnet werden. Es gilt

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} \underbrace{\phi^T(t)}_u \underbrace{\mathbf{Q} \phi(t)}_{v'} dt = u v \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u' v dt, \quad (5.74)$$

wobei aus bekannten Eigenschaften der Transitionmatrix unmittelbar

$$u' = \mathbf{A}^T \phi^T(t) \quad \text{und} \quad v = \mathbf{Q} \phi(t) \mathbf{A}^{-1} \quad (5.75)$$

folgt. Für  $\mathbf{P}$  ergibt sich somit

$$\mathbf{P} = \phi^T(t) \mathbf{Q} \phi(t) \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^T \int_0^{\infty} \phi^T(t) \mathbf{Q} \phi(t) dt \mathbf{A}^{-1}.$$

Aus der asymptotischen Stabilität von (5.69) und mit  $\phi(0) = \mathbf{E}$  folgt somit

$$\mathbf{P} = -\mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1}$$

bzw. nach Multiplikation mit  $\mathbf{A}$  von rechts und einer Umsortierung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \quad (5.76)$$

Die lineare Matrizengleichung (5.76) ist die so genannte **Ljapunov-Gleichung**<sup>6</sup>. Man kann zeigen, dass diese Gleichung bei vorgegebener Hurwitzmatrix  $\mathbf{A}$  und vorgegebener positiv

<sup>6</sup>benannt nach dem russischen Mathematiker und Physiker Alexander Michailowitsch Ljapunow (1857 - 1918)

definiten Matrix  $\mathbf{Q}$  eine eindeutige, positiv definite Lösung  $\mathbf{P}$  besitzt. Das Fazit der bisherigen Überlegungen ist, dass

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0) \quad (5.77)$$

$$\mathbf{Q} \succ 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{A} \dots \text{Hurwitz}$$

äquivalent zu

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad \text{wobei} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (5.78)$$

ist.

### Optimaler Zustandsregler

Die Idee der Entwurfsmethodik besteht darin, die „Kosten“ für die Überführung eines Anfangszustands  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  der Regelstrecke (5.68) nach  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  zu minimieren. Die entstehenden Kosten werden dabei durch die Maßzahl

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \rho u(t)^2 dt, \quad (5.79)$$

quantifiziert. Hierbei ist  $\mathbf{Q}$  eine konstante positiv definite Matrix und  $\rho$  ist eine positive reelle Konstante, d.h.

$$\mathbf{Q} \succ 0, \quad \rho > 0. \quad (5.80)$$

Mittels des Faktors  $\rho$  wird das Gewicht der Stellgröße, also ihr Einfluss auf  $J$  eingestellt. Ein sehr kleiner Wert von  $\rho$  hat zur Folge, dass selbst sehr große Werte der Stellgröße  $u$  den Wert von  $J$  nur unbedeutend erhöhen. Es ist also zu erwarten, dass in der optimalen Lösung von (5.79) der Betrag der Stellgröße  $u$  auch große Werte annehmen kann. Umgekehrt bedeutet ein sehr großer Wert von  $\rho$ , dass die Stellgröße den Wert von  $J$  stark beeinflusst, d.h. in der optimalen Lösung sind betragsmäßig kleine Werte für  $u$  zu erwarten.

Über die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  kann Einfluss auf den Verlauf der Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  des geschlossenen Regelkreises genommen werden. Um gezielt auf die Verläufe der einzelnen Zustandsgrößen Einfluss zu nehmen, wird meistens vereinfachend eine Diagonalmatrix  $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_{11}, q_{22}, \dots, q_{nn})$  mit positiven Diagonalelementen gewählt, wie das nachfolgende Beispiel verdeutlicht.

**B** Gegeben sei eine steuerbare Regelstrecke zweiter Ordnung, d.h.  $n = 2$ . Das zu minimierende Gütemaß (5.79) ist durch

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty q_{11} x_1^2 + q_{22} x_2^2 + \rho u^2 dt$$

gegeben, wobei

$$\rho > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{d.h.} \quad q_{11} > 0 \quad \text{und} \quad q_{22} > 0.$$

Es ist leicht zu erkennen, dass über die positiven Gewichtungsfaktoren  $\rho$ ,  $q_{11}$  und  $q_{22}$  Einfluss auf die Verläufe von  $u$ ,  $x_1$  und  $x_2$  genommen werden kann. ■

Die Entwurfsaufgabe besteht nun darin, den Stellgrößenverlauf  $u(t)$  so zu berechnen, dass das Gütekriterium (5.79) minimal wird. In den Wert von  $J$  gehen  $u(t)$  und der daraus gemäß (5.68) resultierende Streckenzustand  $\mathbf{x}(t)$  quadratisch ein. Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich also um ein Problem der optimalen *Steuerung*, d.h. das Ergebnis der Optimierung ist der optimale zeitliche Verlauf von  $u(t)$  im Intervall  $[0, \infty)$ . Man kann nun zeigen, dass das optimale Steuergesetz auch in der Form 5.68

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}, \quad (5.81)$$

d.h. als linearer Zustandsregler, angeschrieben werden kann.

Setzt man das Regelgesetz (5.81) in (5.68) ein, so erhält man mit (5.79)

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^T (\mathbf{Q} + \rho \mathbf{k} \mathbf{k}^T) \mathbf{x}(t) dt \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) \mathbf{x}. \quad (5.82)$$

Da  $J$  minimiert wird, kann vorausgesetzt werden, dass  $(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T)$  eine Hurwitzmatrix ist. Aus (5.77, 5.78) folgt dann der zu (5.82) äquivalente Ausdruck

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad \text{wobei} \quad (\mathbf{A}^T - \mathbf{k} \mathbf{b}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) = -\mathbf{Q} - \rho \mathbf{k} \mathbf{k}^T. \quad (5.83)$$

Der Vektor  $\mathbf{k}^T = [k_1 \ \dots \ k_n]$  der Reglerparameter soll nun so bestimmt werden, dass die Kosten  $J$  minimal werden. Eine notwendige Bedingung hierfür ist

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{k}} = \left[ \frac{\partial J}{\partial k_1} \ \dots \ \frac{\partial J}{\partial k_n} \right] \stackrel{!}{=} \left[ 0 \ \dots \ 0 \right], \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial J}{\partial k_i} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.84)$$

Das bedeutet weiter

$$\frac{\partial J}{\partial k_i} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial k_i} \mathbf{x}_0 \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial k_i} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (5.85)$$

Der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{P}$  und den Reglerparametern ist durch die Ljapunovgleichung in (5.83) gegeben. Leitet man diese nach den Elementen von  $\mathbf{k}^T$  ab, so erhält man

$$-\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial k_i} \mathbf{b}^T \mathbf{P} + (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T)^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial k_i} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial k_i} (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}^T) - \mathbf{P} \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{k}^T}{\partial k_i} = -\rho \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial k_i} \mathbf{k}^T - \rho \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{k}^T}{\partial k_i}$$

Unter Berücksichtigung von (5.85) ergibt sich dann

$$-\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial k_i} \mathbf{b}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{k}^T}{\partial k_i} = -\rho \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial k_i} \mathbf{k}^T - \rho \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{k}^T}{\partial k_i}$$

bzw. nach einer einfachen Umformung

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial k_i} (\mathbf{b}^T \mathbf{P} - \rho \mathbf{k}^T) = (\rho \mathbf{k} - \mathbf{P} \mathbf{b}) \frac{\partial \mathbf{k}^T}{\partial k_i} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.86)$$

Da  $\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial k_i} = \mathbf{e}_i$  und  $\frac{\partial \mathbf{k}^T}{\partial k_i} = \mathbf{e}_i^T$  gilt, kann (5.86) nur erfüllt sein, wenn

$$\mathbf{b}^T \mathbf{P} - \rho \mathbf{k}^T = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \rho \mathbf{k} - \mathbf{P} \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (5.87)$$

Man beachte, dass die beiden Bedingungen in (5.87) äquivalent sind, weil  $(\rho \mathbf{k} - \mathbf{P} \mathbf{b})^T = -(\mathbf{b}^T \mathbf{P} - \rho \mathbf{k}^T)$  gilt. Für die Parameter des optimalen Zustandsreglers gilt somit

$$\mathbf{k}^T = \frac{1}{\rho} \mathbf{b}^T \mathbf{P}. \quad (5.88)$$

Die Berechnungsvorschrift der zur Ermittlung von  $\mathbf{k}^T$  benötigten Matrix  $\mathbf{P}$  erhält man, wenn man in die Ljapunov-Gleichung aus (5.83) das Ergebnis (5.88) einsetzt:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \frac{1}{\rho} \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \frac{1}{\rho} \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} - \frac{1}{\rho} \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P},$$

d.h.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \frac{1}{\rho} \mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}. \quad (5.89)$$

Die (quadratische) Matrixgleichung (5.89) ist die so genannte algebraische **Riccati**<sup>7</sup>-**Gleichung**. Man kann zeigen, dass genau eine der Lösungen  $\mathbf{P}$  dieser Gleichung unter den getroffenen Annahmen (Strecke ist steuerbar,  $\mathbf{Q} \succ 0$ ) positiv definit ist.

**B** Gegeben sei das Modell einer Strecke erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = x + u.$$

Das zu minimierende Gütekriterium (5.79) lautet

$$J = \int_0^\infty q x^2 + \rho u^2 dt \quad \text{wobei} \quad q > 0, \rho > 0.$$

Gesucht ist nun die einzige positive Lösung der Riccati-Gleichung (??), die im vorliegenden Fall

$$\frac{1}{\rho} p^2 - 2p - q = 0$$

lautet. Löst man obige quadratische Gleichung nach  $p$  auf, so lautet die gesuchte Lösung

$$p = \rho + \sqrt{\rho^2 + qr}.$$

Für den optimalen Zustandsregler (??) findet man

$$u = -\frac{1}{\rho} p x = -\frac{1}{\rho} \left( \rho + \sqrt{\rho^2 + qr} \right) x = - \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{q}{\rho}} \right) x = -kx.$$

<sup>7</sup>benannt nach dem italienischen Mathematiker Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754)

Man erkennt, dass der Reglerparameter  $k$  nur vom Verhältnis der Gewichtungsfaktoren  $q$  und  $\rho$  abhängt, was angesichts des gewählten Gütekriteriums plausibel ist. Multipliziert man nämlich das Gütekriterium  $J$  mit einer Konstanten, so hat dies keinen Einfluss auf den minimierenden Verlauf der Stellgröße. Das bedeutet, dass die Minimierung der Gütekriterien

$$J_1 = \int_0^\infty x^2 + \frac{\rho}{q} u^2 dt, \quad J_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2 + \frac{\rho}{q} u^2 dt \quad \text{und} \quad J_3 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{q}{\rho} x^2 + u^2 dt$$

zu gleichen Stellgrößenverläufen führt wie die Minimierung des ursprünglichen Gütemaßes  $J$ .

Das mathematische Modell des geschlossenen Regelkreises, bestehend aus Strecke und Regler, lautet somit

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{1 + \frac{q}{\rho}} x.$$

Für  $\frac{q}{\rho} \rightarrow 0$ , d.h. der Verlauf der Stellgröße wird viel stärker gewichtet als der Verlauf der Zustandsgröße strebt der Eigenwert des geschlossenen Kreises gegen  $s = -1$ . Für  $\frac{q}{\rho} \rightarrow \infty$ , d.h. der Verlauf der Stellgröße hat de facto keinen Einfluss auf  $J$ , strebt der Eigenwert des geschlossenen Kreises gegen  $s = -\infty$ . Das bedeutet, dass in diesem Fall der Regelkreis „unendlich schnell“ wird, was sich natürlich auch in entsprechend großen Stellamplituden manifestiert. ■

Für den Fall  $n > 1$  wird die Riccati-Gleichung üblicherweise mit Hilfe ausgereifter Algorithmen numerisch gelöst. In Matlab kann mit Hilfe des Befehls `lqr` der Riccati-Regler direkt berechnet werden.

**B** Gegeben sei das steuerbare Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Zunächst werden die Gewichtungen  $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$  und  $\rho = 1$  gewählt. Der zugehörige optimale Zustandsregler lautet

$$\mathbf{k}^T = [ 2.4142 \quad 1.6131 ]$$

und die Eigenwerte des geschlossenen Kreises liegen bei

$$s_1 = -0.7654, \quad s_2 = -1.8478.$$

Die Verläufe der Zustandsgrößen  $x_1$ ,  $x_2$  und der Stellgröße  $u$  sind für einen Anfangszustand  $x_0 = [ 2 \quad -1 ]^T$  in Bild 5.13 in blauer Farbe dargestellt. Ändert man die Gewichtungen nun zu  $\mathbf{Q} = \mathbf{diag}(10, 1)$  und  $\rho = 0.1$ , so lautet der Zustandsregler

$$\mathbf{k}^T = [ 11.0499 \quad 4.7532 ]$$

und die Eigenwerte des Regelkreises liegen bei

$$s_{1,2} = -2.8766 \pm j1.3323.$$

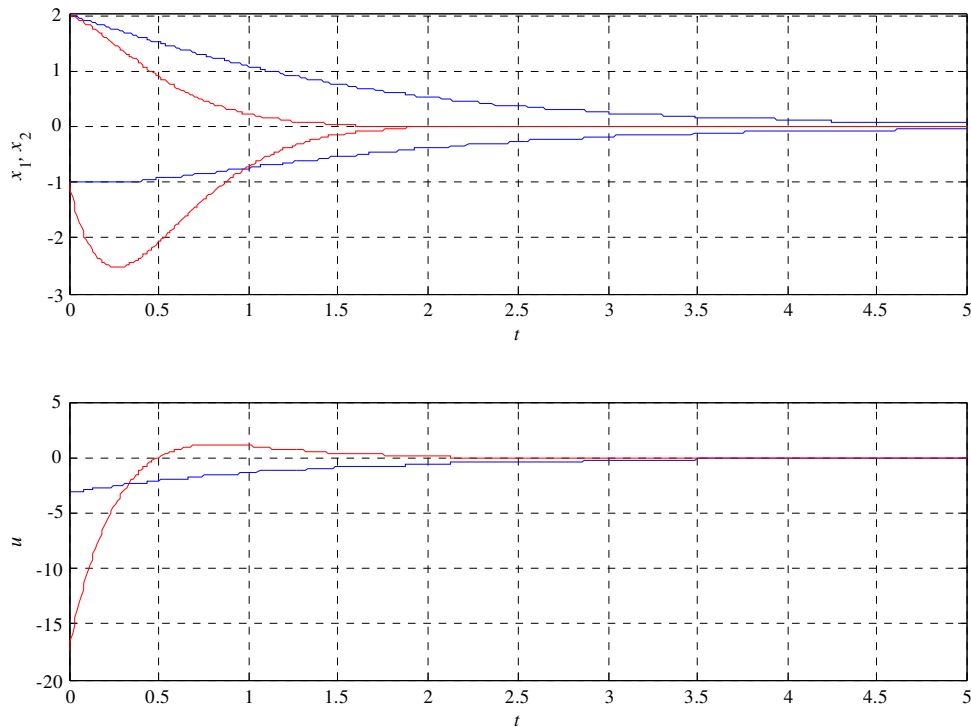


Bild 5.13: Verläufe von  $x_1$ ,  $x_2$  und  $u$  für  $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1)$ ,  $\rho = 1$  in blauer Farbe bzw. für  $\mathbf{Q} = \text{diag}(10, 1)$ ,  $\rho = 0.1$  in roter Farbe

Für Zustands- und Stellgrößen ergeben sich die in Bild 5.13 in roter Farbe dargestellten Verläufe. Wie erwartet nimmt  $u$  aufgrund des verkleinerten Gewichts größere Werte an, was zu schneller abklingenden Vorgängen im Regelkreis führt. Die vergrößerte Gewichtung  $q_{11}$  führt dazu, dass  $x_1$  sich schnell betragsmäßig kleinen Werten nähert, während  $x_2$  aufgrund des kleineren Gewichts zunächst betragsmäßig größere Werte annimmt. ■

#### Anmerkungen:

- Das oben vorgestellte Entwurfsverfahren kann ohne Modifikation auf steuerbare Mehrgrößensysteme der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

übertragen werden. Das Gütekriterium lautet dann

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q} \succ 0, \mathbf{R} \succ 0,$$

der optimale Zustandsregler ist durch

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

gegeben, wobei  $\mathbf{P}$  die einzige positiv definite Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}.$$

ist.

- Die Forderung nach positiver Definitheit von  $\mathbf{Q}$  im Gütekriterium (5.79) kann auch abgeschwächt werden, indem nur die positive Semidefinitheit gefordert wird, d.h.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q} \succeq 0.$$

Dies erfordert allerdings die Beobachtbarkeit des Paares  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ , wobei  $\mathbf{A}$  die Dynamikmatrix der Regelstrecke ist und  $\mathbf{C}$  sich aus der Faktorisierung  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$  ergibt.





# Kapitel 6

## Entwurf von Zustandsbeobachtern

### 6.1 Einführung

Bei den Überlegungen im vorigen Kapitel wurde stets angenommen, dass *alle* Zustandsgrößen der Regelstrecke messbar sind, d.h. der gesamte Vektor  $\mathbf{x}$  steht dem Regler zur Verfügung. Bei praktischen Anwendungen ist diese Annahme häufig nicht gerechtfertigt. Oft ist die messtechnische Erfassung bestimmter Zustandsgrößen aufgrund kostspieliger Sensorik unwirtschaftlich oder sie ist technisch sogar unmöglich. Die Grundidee des so genannten **Zustandsbeobachters** besteht nun darin, auf Basis des mathematischen Modells  $n$ -ter Ordnung der Regelstrecke

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u & \text{mit } \mathbf{x}_0 \dots \text{ unbekannt} \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.1)$$

*nicht*-messbare Zustandsgrößen zu rekonstruieren.

Im vorliegenden Fall wird angenommen, dass die Ausgangsgröße  $y$  messbar ist und *alle*  $n$  Zustandsgrößen mit Hilfe eines Beobachters geschätzt werden müssen. Der Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$  des Beobachters soll sich *asymptotisch* dem Streckenzustand nähern, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t).$$

Anstelle der bisher als messbar vorausgesetzten Zustandsgrößen  $x_i$  werden deren Schätzwerte  $\hat{x}_i$  im Regelgesetz verwendet, d.h. der Zustandsregler (5.34) lautet nun

$$u = - \sum_{i=1}^n k_i \hat{x}_i + V r = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + V r. \quad (6.2)$$

### 6.2 Trivialer Beobachter

Eine sehr naheliegende Idee zur Rekonstruktion des Zustandsvektors besteht darin, den Beobachter als Kopie des Streckenmodells anzusetzen, d.h.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u. \quad (6.3)$$

Wie in Bild 6.1 angedeutet, wird dieses Modell mit der gleichen Stellgröße  $u$  wie die Regelstrecke angesteuert und zur Berechnung von  $\hat{\mathbf{x}}$  genutzt, wobei üblicherweise  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$  gesetzt wird. Der Schätzfehler

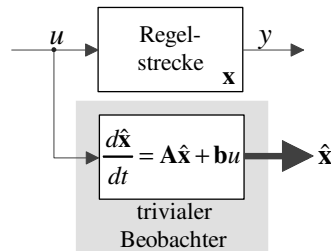


Bild 6.1: Prinzip des trivialen Beobachters

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (6.4)$$

charakterisiert die Abweichung des Schätzwertes  $\hat{\mathbf{x}}$  vom tatsächlichen Zustand  $\mathbf{x}$ . Sein zeitliches Verhalten wird durch

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \stackrel{(6.1.)}{=} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}u = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad (6.5)$$

beschrieben, wobei  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$  gilt. Aus der Schätzfehlerdynamik (6.5) folgt unmittelbar, dass der Schätzfehler ausgehend von beliebigem  $\mathbf{e}_0$  genau dann asymptotisch gegen Null strebt, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0},$$

wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  eine Hurwitzmatrix ist. Das bedeutet, dass die Zustandsgrößen des **trivialen Beobachters** (6.3) genau dann asymptotisch gegen die Zustandsgrößen der Regelstrecke konvergieren, wenn die Regelstrecke (6.1) asymptotisch stabil ist, d.h. die Schätzfehlerdynamik ist starr vorgegeben. Weiters besteht keinerlei Möglichkeit, bei der Beobachtung den Einfluss von Störungen, Parameterschwankungen und Modellierungsfehlern zu berücksichtigen. All diese Tatsachen schränken die Anwendbarkeit des trivialen Beobachters sehr stark ein, er ist daher für den praktischen Einsatz de facto ungeeignet.

### 6.3 Luenberger-Beobachter

Auch der so genannte Luenberger-Beobachter nützt das mathematische Modell (6.1) zur Schätzung des Streckenzustandes. Im Gegensatz zum trivialen Beobachter wird hier aber auch die messbare Ausgangsgröße  $y$  für die Ermittlung von  $\hat{\mathbf{x}}$  verwendet. Dazu wird  $y$  mit der Ausgangsgröße  $\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$  des Beobachters verglichen und die Differenz  $(y - \hat{y})$  zur „Korrektur“ von  $\hat{\mathbf{x}}$  verwendet. Wie in Bild 6.2 zu erkennen ist, entsteht so eine Rückkopplung innerhalb des Beobachters.

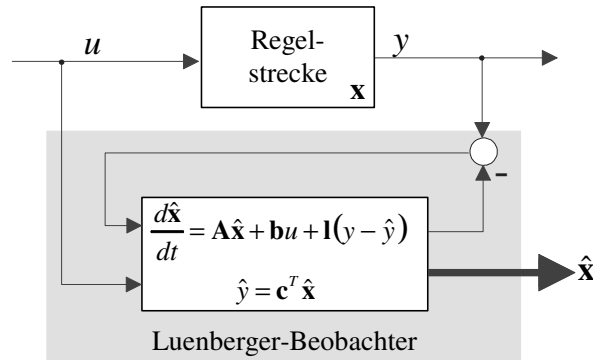


Bild 6.2: Beobachter nach Luenberger

Das mathematische Modell des Beobachters lautet somit

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

bzw.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}y \quad (6.7)$$

wobei

$$\mathbf{l}^T = [ l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n ] \quad (6.8)$$

der geeignet zu bestimmende Vektor der Beobachterparameter bzw. „Beobachterverstärkungen“ ist. Setzt man nun  $\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$  in (6.6) ein, so erhält man

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

Für die Dynamik des Schätzfehlers (6.4) ergibt sich damit

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}u = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{x} - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) \mathbf{e} \quad (6.9)$$

Wie zu erkennen ist, kann die Schätzfehlerdynamik (6.9) über der Vektor  $\mathbf{l}$  gezielt beeinflusst werden. Analog zum Zustandsreglerentwurf soll der Vektor  $\mathbf{l}$  so bestimmt werden, dass die Dynamikmatrix des Schätzfehlers  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  beliebig vorgebbare Eigenwerte besitzt.

Ein Vergleich von (6.9) mit (5.4) verdeutlicht, dass der Beobachterentwurf, also die Ermittlung von  $\mathbf{l}$ , sehr ähnlich strukturiert ist wie der Zustandsreglerentwurf, also die Ermittlung von  $\mathbf{k}^T$ . In der Tat unterscheiden sich die Dynamikmatrizen des Schätzfehlers  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  und des geschlossenen Regelkreises  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  nur dadurch, dass der Vektor  $\mathbf{l}$  der „linke Faktor“ des dyadischen Produktes  $(\mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  ist, während  $\mathbf{k}^T$  der „rechte Faktor“ des dyadischen Produktes  $(\mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  ist. Sehr hilfreich erweist sich an dieser Stelle die Tatsache, dass die Eigenwerte einer

quadratischen Matrix  $\mathbf{W}$  identisch sind mit den Eigenwerten der transponierten Matrix  $\mathbf{W}^T$ . Wenn man also bei der Eigenwertvorgabe anstelle von  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  die Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)^T = (\mathbf{A}^T - \mathbf{c}\mathbf{l}^T)$  betrachtet, dann sind Beobachterentwurf und Zustandsreglerentwurf strukturell identisch! Der Beobachterentwurf kann somit auch so interpretiert werden, dass für das so genannte **duale System**

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} + \mathbf{c} v \quad (6.10)$$

ein Zustandsregler der Form

$$v = -\mathbf{l}^T \mathbf{z} \quad (6.11)$$

ermittelt wird. Alle Überlegungen aus dem vorigen Kapitel zum Zustandsreglerentwurf können also unverändert auf den Beobachterentwurf übertragen werden.

Notwendig und hinreichend dafür, dass die Eigenwerte von  $(\mathbf{A}^T - \mathbf{c}\mathbf{l}^T)$  bzw.  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  beliebig platziert werden können, ist die Steuerbarkeit des dualen Systems (6.10). Das bedeutet, dass die zugehörige Steuerbarkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{S}}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{A}^T \mathbf{c} & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

regulär sein muss. Durch Bildung der transponierten Matrix

$$\hat{\mathbf{S}}_u^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \stackrel{(4.21)}{=} \mathbf{B}_y \quad (6.13)$$

erkennt man, dass das duale System genau dann steuerbar ist, wenn die Regelstrecke (6.1) beobachtbar ist.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Es soll ein Zustandsbeobachter der Form (6.7) so entworfen werden, dass die Dynamikmatrix der Schätzfehlerdynamik (6.9) zwei Eigenwerte an der Stelle  $s = -1$  besitzt.

Zunächst wird mit Hilfe der regulären Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gezeigt, dass die Beobachtbarkeit des Streckenmodells gegeben ist. Die Eigenwerte der Matrix

$$(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ 1 - l_2 & 2 \end{bmatrix}$$

können somit beliebig platziert werden. Die reellen Konstanten  $l_1$  und  $l_2$  müssen so bestimmt werden, dass das charakteristische Polynom von  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  dem Wunschpolynom

$$w(s) = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

entspricht, d.h.

$$\det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 - 1 & s - 2 \end{bmatrix} = s^2 + (l_1 - 2)s + (l_2 - 2l_1 - 1) \stackrel{!}{=} s^2 + 2s + 1.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert  $l_1 = 4$  und  $l_2 = 10$ , d.h. das Beobachtermodell ist durch

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} y$$

gegeben. ■

Natürlich kann auch die im vorigen Kapitel hergeleitete Formel von Ackermann für den Beobachterentwurf eingesetzt werden. Hierfür sind in (5.27) die entsprechenden Größen des dualen Systems (6.10) einzusetzen, d.h.

$$\mathbf{l}^T = \hat{\mathbf{t}}_1^T w(\mathbf{A}^T), \quad (6.14)$$

wobei  $\hat{\mathbf{t}}_1^T$  die letzte Zeile der inversen „dualen“ Steuerbarkeitsmatrix (6.12) ist.

**B Fortsetzung.** Verwendet man zur Lösung des vorigen Beispiels die Formel von Ackermann, so ist zunächst  $\hat{\mathbf{t}}_1^T$  zu ermitteln, d.h.

$$\hat{\mathbf{t}}_1^T = [0 \ 1] \hat{\mathbf{S}}_u^{-1} = [0 \ 1] (\mathbf{B}_y^T)^{-1} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [0 \ 1].$$

Mit (6.14) folgt dann

$$\mathbf{l}^T = \hat{\mathbf{t}}_1^T \left( (\mathbf{A}^T)^2 + 2\mathbf{A}^T + \mathbf{E} \right) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = [4 \ 10].$$

## 6.4 Der Beobachter im Regelkreis

Der Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}$  für den tatsächlichen Zustand  $\mathbf{x}$  der Regelstrecke wird nun zur Regelung der steuerbaren und beobachtbaren Strecke mittels eines Zustandsreglers der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + Vr \quad (6.15)$$

verwendet. Der resultierende Regelkreis, bestehend aus Strecke, Beobachter und Zustandsregler ist in Bild 6.3 dargestellt.

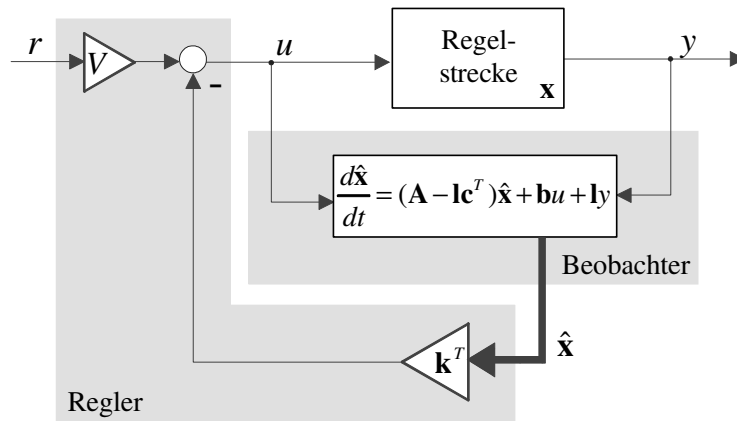


Bild 6.3: Regelkreis, bestehend aus Strecke, Zustandsregler und Beobachter

Setzt man das Regelgesetz (6.15) in das Streckenmodell (6.1) und den Beobachter (6.7) ein, so erhält man

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}Vr, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

und

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{b}Vr.$$

Das mathematische Modell des Gesamtsystems kann auch in der kompakten Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{l}\mathbf{c}^T & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T - \mathbf{b}\mathbf{k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} Vr \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.16)$$

angeschrieben werden. Die Systemordnung des Regelkreises beträgt also  $2n$ , entspricht also der doppelten Streckenordnung. Die Dynamikmatrix des Gesamtsystems wird offensichtlich maßgeblich von den Vektoren  $\mathbf{k}^T$  und  $\mathbf{l}$  beeinflusst. Es ist eine äußerst bemerkenswerte Eigenschaft dieser Matrix, dass sich ihre  $2n$  Eigenwerte aus den Eigenwerten von  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$  und  $(\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)$  zusammensetzen. Das bedeutet, dass man Zustandsregler- und Beobachterentwurf *voneinander unabhängig* durchführen kann! Dies ist das so genannte Separationstheorem, das im nächsten Abschnitt bewiesen wird.

### 6.4.1 Separationstheorem

Zur Herleitung des Separationstheorems wird das System (6.16) der regulären Zustandstransformation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

unterworfen, d.h. in (6.16) wird  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{e}$  gesetzt. Daraus folgt

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(\mathbf{x} - \mathbf{e}) + \mathbf{b}Vr = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{k}^T\mathbf{e} + \mathbf{b}Vr,$$

die Schätzfehlerdynamik lautet nach (6.9)

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)\mathbf{e}.$$

In kompakter Schreibweise lautet das transformierte System somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T & \mathbf{b}\mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Die transformierte Dynamikmatrix besitzt eine so genannte Block-Dreieckstruktur, d.h. für ihr charakteristisches Polynom  $\Delta(s)$  gilt

$$\Delta(s) = \det [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)] \cdot \det [s\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)].$$

Da die Eigenwerte der Block-Dreiecksmatrix identisch sind mit den Eigenwerten der Dynamikmatrix des Originalsystems (6.16), ist damit das Separationstheorem bewiesen.

**B** Gegeben sei das steuerbare Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

einer Regelstrecke. Es wird ein Zustandsregler der Form (5.2) so entworfen, dass die Eigenwerte des Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen. Wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, besitzt der Zustandsregler die Parameter

$$\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zur Schätzung der Zustandsgrößen wird ein Zustandsbeobachter der Form (6.7) eingesetzt. Der Vektor  $\mathbf{l}$  wird so bestimmt, dass die Eigenwerte der Schätzfehlerdynamik (6.9) bei  $s_3 = s_4 = -6$  liegen, man findet

$$\mathbf{l}^T = \begin{bmatrix} 4.9 & 3.7 \end{bmatrix}.$$

In Bild 6.4 sind die Verläufe der Zustandsgrößen der Regelstrecke für

$$\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} -0.8 & -2.5 \end{bmatrix}$$

dargestellt, die zugehörigen Schätzwerte sind punktiert eingezeichnet. ■



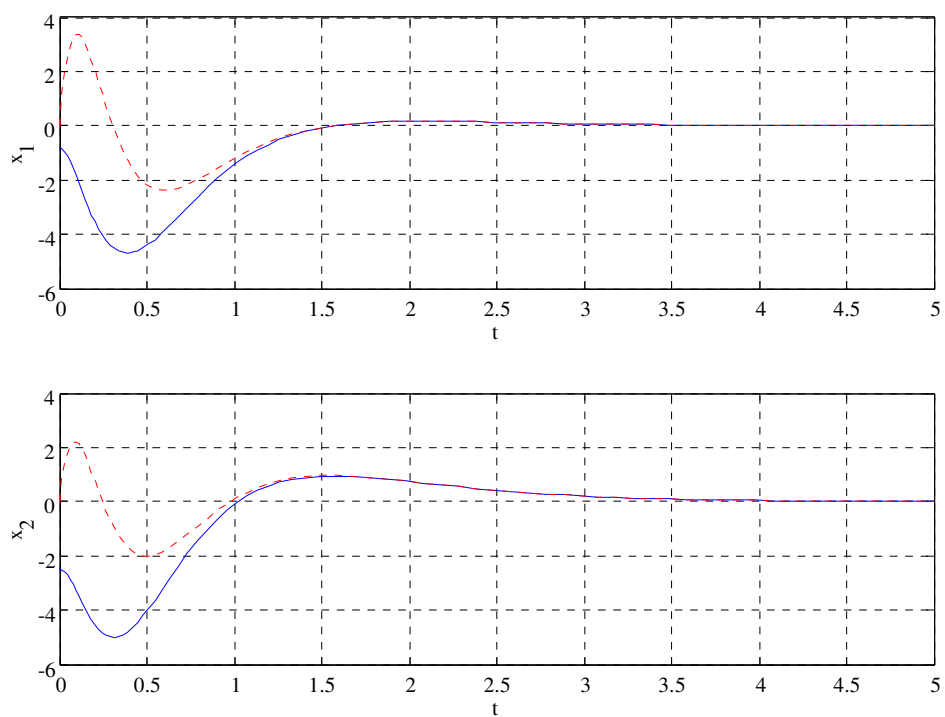


Bild 6.4: Verläufe der Zustandsgrößen  $x_1$ ,  $x_2$  der Regelstrecke und der zugehörigen Schätzwerte (punktiert).

# Kapitel 7

## Entwurf von Vorsteuerungen

### 7.1 Einführung

Das Führungsverhalten eines Regelkreises kann durch Einsatz einer so genannten Vorsteuerung stark verbessert werden. Die grundlegende Idee einer modellbasierten Vorsteuerung besteht darin, auf Basis des Streckenmodells den Stellgrößenverlauf so zu berechnen, dass die Regelgröße der vorgegebenen Referenzgröße entspricht. In den folgenden Abschnitten wird der Entwurf von modellbasierten Vorsteuerungen für den Standardregelkreis und für Zustandsregelungen vorgestellt. Dabei erweisen sich so genannte flachheitsbasierte Steuerungen als besonders einfach und leistungsfähig.

### 7.2 Entwurf für den Standardregelkreis

Im bisher behandelten Standardregelkreis aus Bild 7.1 gilt die Relation

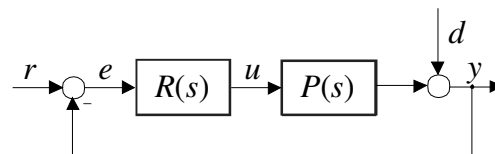


Bild 7.1: Standardregelkreis

$$\bar{y}(s) = T(s) \bar{r}(s) + S(s) \bar{d}(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \bar{r}(s) + \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \bar{d}(s). \quad (7.1)$$

Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  und Störübertragungsfunktion  $S(s)$  können offensichtlich *nicht* unabhängig voneinander gewählt werden, denn es gilt

$$T(s) + S(s) = 1.$$

Erweitert man nun den Standardregelkreis, wie in Bild 7.2 dargestellt, um einen Vors-

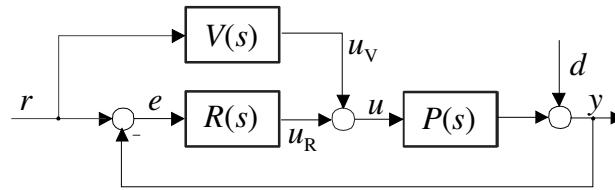


Bild 7.2: Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden

teuerungszweig mit der Übertragungsfunktion  $V(s)$ , so gilt

$$\bar{y}(s) = \frac{R(s)P(s) + V(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \bar{r}(s) + \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \bar{d}(s). \quad (7.2)$$

In Form der Übertragungsfunktion  $V(s)$  steht somit ein zusätzlicher Freiheitsgrad zur Verbesserung des Regelkreisverhaltens zur Verfügung. Aus diesem Grund spricht man auch von einem Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden. Diese Regelkreisstruktur, die auch in industriellen Anwendungen häufig eingesetzt wird, besitzt einige interessante Eigenschaften: Mittels  $V(s)$  kann das Führungsverhalten verbessert werden, ohne die Stabilität des Regelkreises zu beeinflussen. Das bedeutet weiters, dass die Vorsteuerung  $V(s)$  und der Regler  $R(s)$  weitgehend unabhängig voneinander entworfen werden können.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} = \frac{\mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2 + \dots + \mu_m s^m}{\nu_0 + \nu_1 s + \nu_2 s^2 + \dots + \nu_n s^n} \quad \text{mit} \quad m < n, \quad (7.3)$$

wobei die Koeffizienten von Zählerpolynom  $\mu(s)$  und Nennerpolynoms  $\nu(s)$  als reell vorausgesetzt werden. Die Differenz von Nennergrad und Zählergrad, also

$$\delta := n - m \quad (7.4)$$

nennt man auch den relativen Grad des Systems, wobei offensichtlich  $0 < \delta \leq n$  gilt. Zur Ermittlung der Vorsteuerung wird nun untersucht, wie - unter Annahme von  $u_R = 0$  - das Signal  $u_V$  gewählt werden muss, damit die Regelgröße  $y$  der vorgegebenen Referenzgröße  $r$  entspricht.

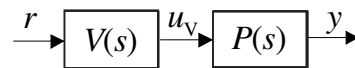
### 7.2.1 Entwurf durch „direkte Inversion“ der Regelstrecke

Es wird die in Bild 7.3 dargestellte Anordnung betrachtet, d.h. es gilt

$$\bar{y}(s) = P(s) \bar{u}_V(s) = P(s) V(s) \bar{r}(s). \quad (7.5)$$

Offensichtlich stimmen Regel- und Referenzgröße überein, wenn die Bedingung

$$V(s) = P^{-1}(s) = \frac{\nu(s)}{\mu(s)} = \frac{\nu_0 + \nu_1 s + \nu_2 s^2 + \dots + \nu_n s^n}{\mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2 + \dots + \mu_m s^m} \quad (7.6)$$

Bild 7.3: Ermittlung des Stellsignals  $u_V$ 

erfüllt ist. Daraus folgt unmittelbar

$$\bar{u}_V(s) = V(s) \bar{r}(s) = \frac{\nu(s)}{\mu(s)} \bar{r}(s) \quad (7.7)$$

bzw.

$$(\mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2 + \dots + \mu_m s^m) \bar{u}_V(s) \stackrel{!}{=} (\nu_0 + \nu_1 s + \nu_2 s^2 + \dots + \nu_n s^n) \bar{r}(s). \quad (7.8)$$

Im Zeitbereich wird der Zusammenhang zwischen der zu ermittelnden Größe  $u_V$  und der vorgegebenen Referenzgröße  $r$  also durch die Differentialgleichung

$$\mu_0 u_V + \mu_1 \frac{du_V}{dt} + \dots + \mu_m \frac{d^m u_V}{dt^m} = \nu_0 r + \nu_1 \frac{dr}{dt} + \dots + \nu_n \frac{d^n r}{dt^n} \quad (7.9)$$

beschrieben. Die zeitlichen Ableitungen von  $r$  können aus dem vorgegebenen Verlauf der Referenzgröße ermittelt werden, d.h. die rechte Seite der Differentialgleichung (7.9) kann als

$$w := \nu_0 r + \nu_1 \frac{dr}{dt} + \dots + \nu_n \frac{d^n r}{dt^n} \quad \text{bzw.} \quad \bar{w}(s) = \nu(s) \bar{r}(s) \quad (7.10)$$

zusammengefasst werden. Damit lautet die Berechnungsvorschrift für  $u_V$  im Zeitbereich

$$\mu_0 u_V + \mu_1 \frac{du_V}{dt} + \dots + \mu_m \frac{d^m u_V}{dt^m} = w, \quad (7.11)$$

bzw. im Bildbereich

$$\bar{u}_V(s) = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2 + \dots + \mu_m s^m} \bar{w}(s). \quad (7.12)$$

Die Struktur des resultierenden Regelkreises ist in Bild 7.4 dargestellt, wobei die geeignete Wahl der hinreichend oft differenzierbaren Referenzgröße  $r$  hier als „Planung“ bezeichnet wird. Man beachte, dass vorausgesetzt werden muss, dass das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (7.11), also das Zählerpolynom von  $P(s)$  ein Hurwitzpolynom ist. Anderenfalls führt die numerische Ermittlung von  $u_V$  zu exponentiell wachsenden numerischen Fehlern. Außerdem kann die Größe  $u_V$  sehr große Werte annehmen bzw. über alle Grenzen wachsen, was die Methodik praktisch unbrauchbar macht.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke

$$P(s) = \frac{s+1}{s(s-2)} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}.$$

Die Differentialgleichung zur Ermittlung von  $u_V$  lautet somit

$$u_V + \frac{du_V}{dt} = -2 \frac{dr}{dt} + \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

■

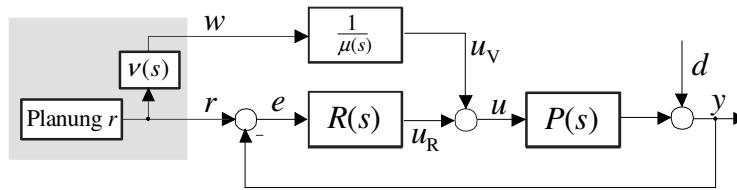


Bild 7.4: Mögliche Ermittlung von  $u_V$ , wenn  $\mu(s)$  ein Hurwitzpolynom ist

### 7.2.2 Flachheitsbasierter Entwurf

Die Vorgangsweise zum Entwurf einer Vorsteuerung wird nun so modifiziert, dass auch eine Anwendung auf Regelstrecken möglich ist, deren Zählerpolynom kein Hurwitzpolynom ist. Es wird - wieder unter der Annahme  $u_R = 0$  - ermittelt, wie denn  $u_V$  gewählt werden muss, damit der Verlauf der Regelgröße  $y$  zufriedenstellend ist. So soll beispielsweise bei einem Arbeitspunktwechsel die Regelgröße innerhalb einer vorgebbaren „Transitzeit“  $T_T$  von einem konstanten Ausgangswert  $y_A$  in einen konstanten Endwert  $y_E$  übergeführt werden.

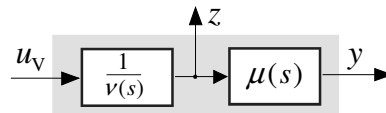


Bild 7.5: Einführung der Hilfsgröße  $z$

Dazu wird gemäß Bild 7.5 eine Hilfsgröße  $z$  so eingeführt, dass gilt

$$\bar{z}(s) := \frac{1}{\nu(s)} \bar{u}_V(s) = \frac{1}{\mu(s)} \bar{y}(s). \tag{7.13}$$

Interpretiert man  $z$  als Ausgang der Strecke, so besitzt das zugehörige Eingangs-, Ausgangsverhalten den relativen Grad  $n$ . Ein solcher Ausgang wird auch *flacher* Ausgang bezeichnet.

Man kann nun Regelgröße  $y$  und Stellsignal  $u_V$  im Bild- und Zeitbereich als Funktion der Hilfsgröße  $z$  darstellen, es gilt

$$\bar{y}(s) = (\mu_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2 + \dots + \mu_m s^m) \bar{z}(s) \quad \text{bzw.} \quad y = \mu_0 z + \mu_1 \frac{dz}{dt} + \dots + \mu_m \frac{d^m z}{dt^m} \tag{7.14}$$

und

$$\bar{u}_V(s) = (\nu_0 + \nu_1 s + \nu_2 s^2 + \dots + \nu_n s^n) \bar{z}(s) \quad \text{bzw.} \quad u_V = \nu_0 z + \nu_1 \frac{dz}{dt} + \dots + \nu_n \frac{d^n z}{dt^n}. \tag{7.15}$$

Die Idee der Methodik besteht nun darin, mit Hilfe von (7.14) einen Soll-Verlauf  $z^*$  für die Größe  $z$  zu konstruieren, der mit den gewünschten Eigenschaften von  $y$  konsistent ist. Mittels (7.15) wird dann das zur Erreichung von  $z = z^*$  erforderliche Stellsignal ermittelt. Eine zentrale Bedeutung kommt somit der geschickten Konstruktion der Zeitfunktion  $z^*$  zu, man spricht in diesem Zusammenhang auch von „Trajektorienplanung“.

### Trajektorienplanung

Eine Möglichkeit besteht darin,  $z^*$  als Polynom

$$z^*(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_p t^p \quad (7.16)$$

mit einem geeigneten Polynomgrad  $p$  anzusetzen. Die Polynomkoeffizienten  $\gamma_i$  müssen so bestimmt werden, dass - unter Annahme von  $z = z^*$  - die Regelgröße  $y$  einen zufriedenstellenden Verlauf besitzt. Bei einem durch  $y_A$ ,  $y_E$  und  $T_T$  charakterisierten Arbeitspunktwechsel sind gemäß (7.14) die Polynomkoeffizienten also so zu bestimmen, dass die Bedingungen

$$z^*(0) = \frac{y_A}{\mu_0} =: z_A^*, \quad z^*(T_T) = \frac{y_E}{\mu_0} =: z_E^* \quad (7.17)$$

und - im Sinne eines hinreichend glatten Verlaufes von  $z^*$  und  $y$  -

$$\left. \frac{d^i z^*}{dt^i} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^i z^*}{dt^i} \right|_{t=T_T} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, \varkappa. \quad (7.18)$$

erfüllt sind. Die Erfüllung der obigen  $(2\varkappa + 2)$  Bedingungen ist prinzipiell nur dann möglich, wenn für den Polynomgrad  $p \geq 2\varkappa + 1$  gilt. Setzt man  $\varkappa = n$  und wählt  $p = 2n + 1$ , so besitzt gemäß (7.14) die Größe  $y$  die Eigenschaften

$$y(0) = y_A, \quad y(T_T) = y_E \quad \text{und} \quad \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=T_T} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, \delta, \quad (7.19)$$

wobei  $\delta$  der relative Grad ist, siehe (7.4). Nimmt man an, dass für  $t \geq T_T$  die Regelgröße  $y$  den konstanten Wert  $y_E$  beibehalten soll, d.h.  $z^*(t) = \frac{y_E}{\mu_0}$  für  $t \geq T_T$ , so weist für die Wahl  $p = 2n + 1$  gemäß (7.15) das Stellsignal  $u_V$  an der Stelle  $t = T_T$  keine Unstetigkeit auf, da dann alle Ableitungen von  $z^*$  bis zur Ordnung  $n$  verschwinden.

**B** Gegeben sei eine Regelstrecke der Ordnung  $n = 1$ . Die Ausgangsgröße  $y$  der Strecke soll ausgehend von  $y(0) = y_A$  innerhalb der vorgebbaren Zeit  $T_T$  in den Wert  $y(T_T) = y_E$  übergeführt werden. Für  $z^*$  wird ein Polynom (7.16) mit dem Polynomgrad  $p = 2n + 1 = 3$  angesetzt, d.h.

$$z^*(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3.$$

Die vier Koeffizienten werden nun so bestimmt, dass gemäß (7.17) und (7.18) die vier Bedingungen

$$z^*(0) = z_A^* = \frac{y_A}{\mu_0}, \quad z^*(T_T) = z_E^* = \frac{y_E}{\mu_0}, \quad \left. \frac{dz^*}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{dz^*}{dt} \right|_{t=T_T} = 0$$

erfüllt werden. Wie man leicht überprüfen kann, folgt daraus unmittelbar

$$\gamma_0 = z_A^*, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{3}{T_T^2} (z_E^* - z_A^*), \quad \gamma_3 = -\frac{2}{T_T^3} (z_E^* - z_A^*)$$

bzw.

$$z^*(t) = z_A^* + (z_E^* - z_A^*) \left( 3 \frac{t^2}{T_T^2} - 2 \frac{t^3}{T_T^3} \right). \quad (7.20)$$

■

Allgemein ergibt sich aus (7.17) und (7.18) für eine Strecke der Ordnung  $n$  und eine Polynomordnung  $p = 2n + 1$  eine Solltrajektorie

$$z^*(t) = z_A^* + (z_E^* - z_A^*) \sum_{i=n+1}^{2n+1} \tilde{\gamma}_i \frac{t^i}{T_T^i}, \quad (7.21)$$

die Koeffizienten  $\tilde{\gamma}_i$  sind in folgender Tabelle für  $n = 1$  bis  $n = 5$  angegeben. Für  $n = 1$  entspricht  $z^*(t)$  dem in (7.20) angegebenen Polynom.

$n$	$\tilde{\gamma}_{n+1}$	$\tilde{\gamma}_{n+2}$	$\tilde{\gamma}_{n+3}$	$\tilde{\gamma}_{n+4}$	$\tilde{\gamma}_{n+5}$	$\tilde{\gamma}_{n+6}$
1	3	-2				
2	10	-15	6			
3	35	-84	70	-20		
4	126	-420	540	-315	70	
5	462	-1980	3465	-3080	1386	-252

(7.22)

Das Stellsignal  $u_V$ , das bewirkt, dass die Größe  $z$  ihrem Wunschverlauf  $z^*$  entspricht, kann mit Hilfe von (7.15) berechnet werden, es gilt

$$u_V = \nu_0 z^* + \nu_1 \frac{dz^*}{dt} + \dots + \nu_n \frac{d^n z^*}{dt^n}. \quad (7.23)$$

Dabei ist natürlich zu darauf achten, dass beim Arbeitspunktwechsel der zur Verfügung stehende Stellbereich gut ausgenutzt wird. Dies kann durch entsprechende Wahl der Transitzeit  $T_T$  erreicht werden.

Der resultierende Regelkreis ist in Bild 7.6 dargestellt. Die eingezeichnete „Referenzgröße“  $r$

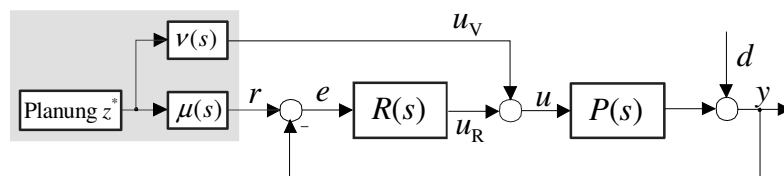


Bild 7.6: Prinzip der flachheitsbasierten Vorsteuerung

ist derjenige Verlauf der Regelgröße  $y$ , der sich für  $z = z^*$  ergibt, d.h.

$$r(t) = y(t)|_{z=z^*} = \mu_0 z^* + \mu_1 \frac{dz^*}{dt} + \dots + \mu_m \frac{d^m z^*}{dt^m}. \quad (7.24)$$

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke

$$P(s) = \frac{s-1}{s(s+2)} = \frac{\mu(s)}{\nu(s)},$$

d.h.  $n = 2$ . Die Ausgangsgröße soll in der Transitzeit  $T_T = 3$  von einem Anfangswert  $y_A = 0$  in einen Endwert  $y_E = 4$  gebracht werden. Aus diesen Vorgaben ergibt sich mit (7.21) nach kurzer Rechnung die Solltrajektorie

$$z^*(t) = -\frac{40}{27}t^3 + \frac{60}{81}t^4 - \frac{24}{243}t^5.$$

Daraus können nun mit (7.23) und (7.24) das Steuersignal und die Referenzgröße für den Regelkreis berechnet werden:

$$u_V = 2\frac{dz^*}{dt} + \frac{d^2z^*}{dt^2} \quad \text{und} \quad r = -z^* + \frac{dz^*}{dt}$$

Die Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = -4\frac{s+2}{s+8}$$

wurde so ermittelt, dass die Störübertragungsfunktion zwei Pole bei  $s = -2$  besitzt. In Bild 7.7 sind Ergebnisse einer numerischen Simulation des Regelkreises abgebildet. Es ist zu erkennen, dass durch die Vorsteuerung die Regelgröße wie gewünscht in der vorgegebenen Zeit  $T_T = 3$  von  $y_A = 0$  nach  $y_E = 4$  gebracht wird. In dieser Phase leistet der Regler keinen sichtbaren Beitrag  $u_R$  zur Stellgröße. Erst beim Einwirken einer Störung  $d$  ab  $t \geq 4$  ist ein deutlicher Reglereingriff  $u_R$  zu erkennen. ■

## 7.3 Entwurf für Zustandsregelungen

Analog zu dem oben vorgestellten Verfahren kann auch eine Zustandsregelung um eine modellbasierte Vorsteuerung ergänzt werden. Der Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das steuerbare Streckenmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}. \quad (7.25)$$

Der relative Grad  $\delta$  gibt an, wie oft  $y$  nach der Zeit abgeleitet werden muss, bis eine explizite Abhängigkeit von  $u$  gegeben ist, d.h.

$$\mathbf{c}^T\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{c}^T\mathbf{A}\mathbf{b} = 0, \quad \dots \quad \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{\delta-2}\mathbf{b} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{\delta-1}\mathbf{b} \neq 0. \quad (7.26)$$

Man kann zeigen, dass  $0 < \delta \leq n$  gilt. Das System (7.25) wird *flach* genannt, wenn es einen so genannten flachen Ausgang

$$z = \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{x} \quad (7.27)$$

gibt, der einen relativen Grad  $n$  besitzt, d.h.

$$\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{b} = 0, \quad \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}\mathbf{b} = 0, \quad \dots \quad \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} = \kappa \neq 0, \quad (7.28)$$



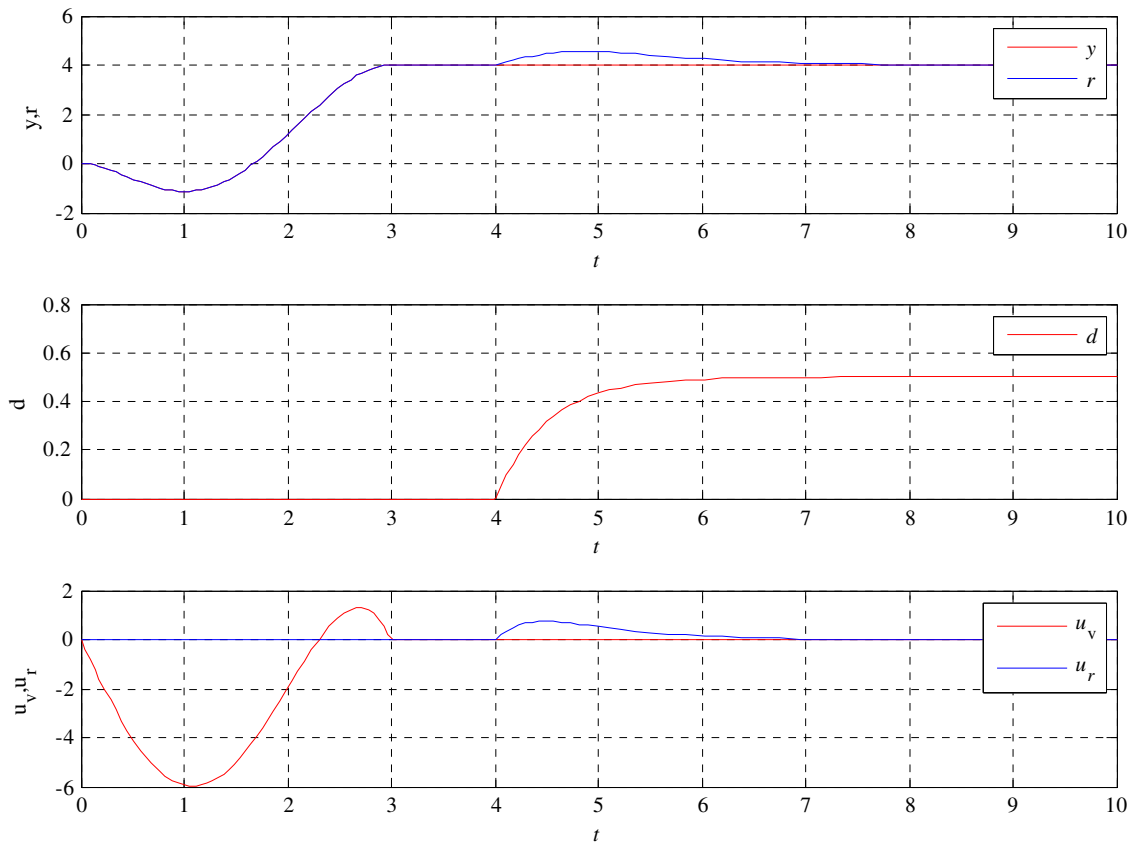


Bild 7.7: Signalverläufe in einem Regelkreis gemäß Bild 7.6

wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\kappa = 1$  gesetzt werden kann. Aus (7.28) folgt, dass der gesuchte Vektor  $\lambda^T$  der Bedingung

$$\lambda^T [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1],$$

d.h.

$$\lambda^T \mathbf{S}_u = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad (7.29)$$

genügen muss, wobei  $\mathbf{S}_u$  die zu (7.25) gehörige Steuerbarkeitsmatrix ist. Da das System (7.25) steuerbar ist, gilt

$$\lambda^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{S}_u^{-1}, \quad (7.30)$$

d.h.  $\lambda^T$  ist die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix. Für Systeme der Form (7.25) ist Flachheit somit gleichbedeutend mit Steuerbarkeit.

Für die Ableitungen des gefundenen flachen Ausgangs (7.27) erhält man unter Berücksichtigung von (7.28)

$$z = \lambda^T \mathbf{x}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} = \lambda^T \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} = \lambda^T \mathbf{A}^2 \mathbf{x}, \dots, \quad \frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} = z^{(n-1)} = \lambda^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^T \\ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}. \quad (7.31)$$

Wie aus Abschnitt 5.2.4 bekannt ist, liegt das transformierte System mit den Zustandsgrößen  $z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}$  in der Regelungsnormalform vor, d.h.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (7.32)$$

wobei  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms  $\Delta(s)$  der Matrix  $\mathbf{A}$  sind. Eine Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$  der Regelstrecke wird in den transformierten Zustandsgrößen durch  $z = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}_R$ ,  $z^{(i)} = 0$  für  $i > 0$  dargestellt. Das bedeutet, dass der Übergang zwischen den Ruhelagen  $\mathbf{x}_A$  und  $\mathbf{x}_E$  durch eine polynomiale Solltrajektorie  $z^*$  für den flachen Ausgang  $z$  beschrieben werden kann, wobei das Polynom den Bedingungen (7.18) und

$$z^*(0) = z_A^* = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}_A \quad \text{und} \quad z^*(T_T) = z_E^* = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}_E. \quad (7.33)$$

genügen muss. Analog zu den Betrachtungen in den vorigen Abschnitten wird auch hier die Solltrajektorie (7.21) herangezogen, wobei die Polynomkoeffizienten der in (7.22) angegebenen Tabelle entnommen werden können.

Diejenige Stellgröße  $u = u_V$ , die zum geplanten Verlauf  $z^*$  der Größe  $z$  führt, kann aus der letzten Differentialgleichung in (7.32) ermittelt werden, d.h.

$$u_V = \alpha_0 z^* + \alpha_1 \frac{dz^*}{dt} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} z^*}{dt^{n-1}} + \frac{d^n z^*}{dt^n} \quad \text{bzw.} \quad \bar{u}_v(s) = \Delta(s) \bar{z}^*(s). \quad (7.34)$$

Über (7.31) können die zugehörigen Verläufe des Streckenzustands und der Ausgangsgröße  $y$  ermittelt werden, es gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \dots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}^T \quad (7.35)$$

und

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \dots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}^T = \tilde{\mathbf{c}}^T \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \dots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix}^T. \quad (7.36)$$

Man beachte, dass der Vektor  $\tilde{\mathbf{c}}^T$  die Struktur

$$\tilde{\mathbf{c}}^T = [ c_0 \quad \dots \quad c_{n-\delta} \quad 0 \quad \dots \quad 0 ]$$

besitzt, wobei aufgrund von (7.4)  $c_{n-\delta} \neq 0$  gewährleistet ist. Der resultierende Regelkreis, bestehend aus einem Zustandsregler und einer Vorsteuerung ist in Bild 7.8 abgebildet. Man

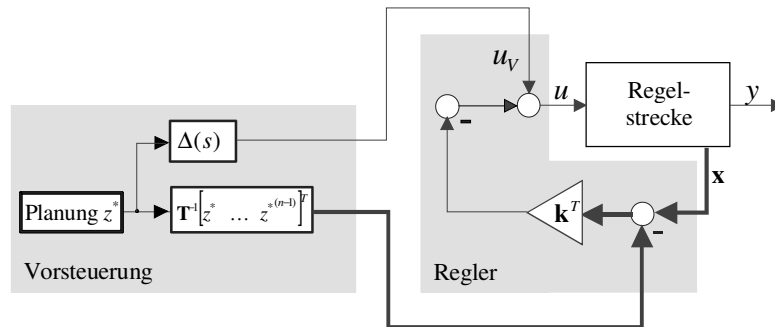


Bild 7.8: Zustandsregelung, ergänzt um eine Vorsteuerung

beachte, dass die dargestellte Struktur aus dem in Bild 5.2 dargestellten Regelkreis hervorgeht. Anstelle von  $u_R$  und  $\mathbf{x}_R$  werden die von der Vorsteuerung generierten Größen (7.34) und (7.35) aufgeschaltet. Im Idealfall liefert die Zustandsrückführung keinen Beitrag zur Stellgröße.

**B** Für die Regelstrecke zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

wurde ein Zustandsregler  $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = -\begin{bmatrix} 1\frac{2}{3} & 7\frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x}$  so entworfen, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei  $s_1 = s_2 = -2$  liegen. Das System befindet sich zunächst in der durch  $\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ ,  $u_A = 0$  charakterisierten Ruhelage und soll innerhalb der Transitzeit  $T_T = 2$  in die Ruhelage  $\mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \end{bmatrix}^T$ ,  $u_E = 0$  übergeführt werden. Hierfür wird die Zustandsregelung um eine flachheitsbasierte Vorsteuerung ergänzt.

Gemäß (7.27) und (7.30) gilt für den flachen Ausgang

$$z = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

wobei der Sollverlauf  $z^*$  unter Berücksichtigung von (7.33), d.h.

$$z_A^* = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}_A = 1 \quad \text{und} \quad z_E^* = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}_E = -0.5$$

gemäß (7.21) ermittelt wird, d.h.

$$z^*(t) = z_A^* + (z_E^* - z_A^*) \left( 10 \frac{t^3}{T_T^3} - 15 \frac{t^4}{T_T^4} + 6 \frac{t^5}{T_T^5} \right).$$

Nach (7.34) errechnet sich die Stellgröße zu

$$u_V = \frac{d^2 z^*}{dt^2} - 5 \frac{dz^*}{dt}$$

und für die zugehörigen Werte des Streckenzustands gilt gemäß (7.35)

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}.$$

In Bild 7.9 sind die Verläufe der Zustandsgrößen und der Stellgröße dargestellt. Zum Vergleich sind auch die entsprechenden Verläufe für den Regelkreis ohne Vorsteuerung eingezeichnet.

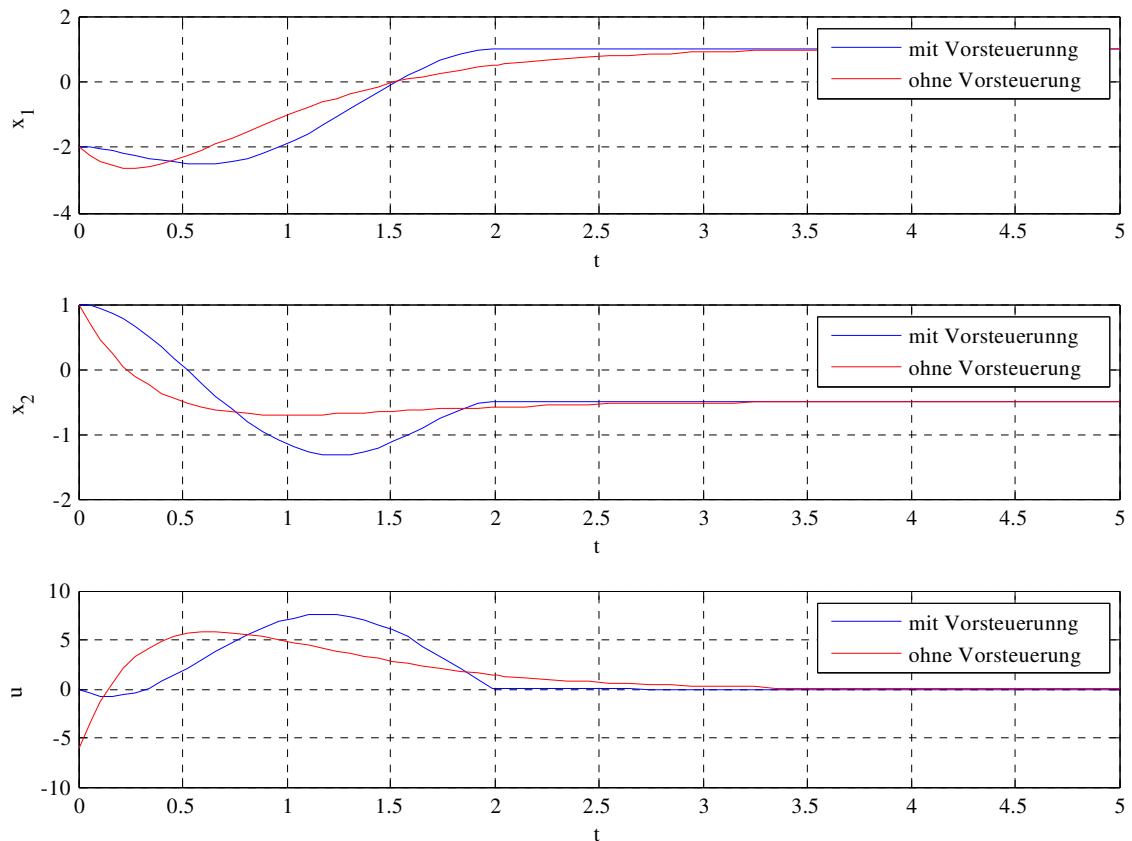


Bild 7.9: Verläufe von  $x_1$ ,  $x_2$  und  $u$  in einem Regelkreis *mit* (blau) und *ohne* Vorsteuerung.

Man beachte auch, dass der Zusammenhang zwischen den Ruhelagen  $\mathbf{x}_A$ ,  $u_A$  und  $\mathbf{x}_E$ ,  $u_E$  und zugehörigen konstanten Werten  $y_A$  und  $y_E$  der Regelgröße durch die Relationen

$$y_A = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_A \quad \text{und} \quad y_E = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_E$$

und

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_A + \mathbf{b}u_A \quad \text{und} \quad \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_E + \mathbf{b}u_E,$$

gegeben ist. Will man beispielsweise für die gegebene Regelstrecke die Ausgangsgröße  $y$  von  $y_A = 0$  nach  $y_E = 5$  überführen, so folgt

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad u_A = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad u_E = 0$$



# Literaturverzeichnis

- [1] CHEN C.T.: Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing, 1993
- [2] CHEN C.T.: Linear System Theory and Design, Saunders College Publishing, 1984
- [3] FOELLINGER O.: Regelungstechnik, 11. Auflage, VDE Verlag, 2013
- [4] FRIEDLAND B.: Control System Design: An Introduction to State-Space Methods, McGraw-Hill, 1986
- [5] HORN M., DOURDOUMAS N.: Regelungstechnik, Pearson Verlag, 2004
- [6] KAILATH T.: Linear Systems, Prentice Hall, 1980
- [7] LANDGRAF C., SCHNEIDER G.: Elemente der Regelungstechnik, Springer Verlag, 1970
- [8] LUNZE J.: Regelungstechnik 1, 3. Auflage, Springer Verlag, 2001
- [9] REINSCHKE K.: Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie, Springer Verlag, 2007
- [10] ZEITZ M.: Differenzielle Flachheit: Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-Systeme, at - Automatisierungstechnik 58, Heft 1, 2010