

# Regelungstechnik 1



Institut für Regelungs- und  
Automatisierungstechnik





(c) Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

Technische Universität Graz

**Hinweis:** Dieses Skriptum dient als Lernbehelf und ersetzt den Besuch der Lehrveranstaltung *nicht!* Prüfungsrelevant sind ausschließlich die in der Lehrveranstaltung behandelten Themen.

Version vom 16. 11. 2020



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen der Systemtechnik</b>	<b>5</b>
1.1 Einführung . . . . .	5
1.2 Grundlegende Begriffe . . . . .	5
1.3 Linearität . . . . .	10
1.4 Beispiele für dynamische Systeme . . . . .	13
1.4.1 Elektrische Systeme . . . . .	13
1.4.2 Mechanische Systeme . . . . .	14
1.4.3 Räuber-Beute Modell . . . . .	16
<b>2 Laplace-Transformation</b>	<b>19</b>
2.1 Einführung . . . . .	19
2.2 Eigenschaften und Sätze der Laplace-Transformation . . . . .	20
2.2.1 Linearität . . . . .	20
2.2.2 Dämpfungsregel . . . . .	21
2.2.3 Verschiebungssatz . . . . .	21
2.2.4 Faltungsregel . . . . .	23
2.2.5 Differentiation im Zeitbereich . . . . .	26
2.2.6 Differentiation im Bildbereich . . . . .	27
2.2.7 Integration im Zeitbereich . . . . .	27
2.2.8 Anfangswertsatz . . . . .	28
2.2.9 Endwertsatz . . . . .	29
2.3 Inverse Laplace-Transformation . . . . .	30
2.3.1 Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	30
2.3.2 Partialbruchzerlegung . . . . .	32
2.4 Anwendung der Laplace-Transformation . . . . .	39
2.4.1 Lösung von Differentialgleichungen . . . . .	39
2.4.2 Gekoppelte Differentialgleichungen . . . . .	41
2.4.3 Anwendung auf Vektoren und Matrizen . . . . .	41
2.5 Korrespondenztabelle für reellwertige Funktionen . . . . .	44
<b>3 Zeitkontinuierliche Systeme</b>	<b>45</b>
3.1 Einführung . . . . .	45
3.2 Lösung der Systemgleichungen . . . . .	45
3.2.1 Freie Lösung . . . . .	46

3.2.2	Erzwungene Lösung . . . . .	47
3.3	Linearisierung um eine Ruhelage . . . . .	48
3.4	Übertragungsfunktion . . . . .	52
3.5	Deutung von $G(s)$ im Zeitbereich . . . . .	53
3.6	Pole und Nullstellen . . . . .	54
3.6.1	PN-Plan . . . . .	56
3.7	BIBO-Stabilität . . . . .	57
3.8	Das Routh-Schema . . . . .	59
3.9	Zusammenschaltung von Übertragungssystemen . . . . .	62
3.9.1	Reihenschaltung . . . . .	62
3.9.2	Parallelschaltung . . . . .	64
3.9.3	Rückkopplung . . . . .	65
3.9.4	Allgemeine Strukturen . . . . .	66
3.10	Wichtige Übertragungsglieder . . . . .	68
3.10.1	Proportionalglied . . . . .	68
3.10.2	Verzögerungsglied erster Ordnung . . . . .	69
3.10.3	Verzögerungsglied zweiter Ordnung . . . . .	70
3.10.4	Integrator . . . . .	70
3.10.5	Differenzierer . . . . .	70
3.10.6	Vorhalteglied . . . . .	71
3.11	Frequenzgang . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Grundlagen der Regelungstechnik</b>	<b>75</b>
4.1	Einführung . . . . .	75
4.2	Begriffe der Regelungstechnik . . . . .	75
4.3	Beispiele . . . . .	78
4.3.1	Drehzahlregelung mit Hilfe des Fliehkraftreglers . . . . .	78
4.3.2	Der Pupillenapparat des Menschen . . . . .	78
<b>5</b>	<b>PID - Regler</b>	<b>81</b>
5.1	Einführung . . . . .	81
5.2	Parallelrealisierung - die Lehrbuchform . . . . .	81
5.3	Windup-Effekt und Gegenmaßnahmen . . . . .	84
5.3.1	Anti-Windup-Maßnahmen . . . . .	85
5.4	Einstellregeln für PID-Regler . . . . .	86
5.4.1	Einstellregeln nach Ziegler-Nichols . . . . .	87
5.4.2	Methode der Summenzeitkonstante („T-Summen Regel“) . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Englische Fachbegriffe</b>	<b>91</b>

# Kapitel 1

## Grundlagen der Systemtechnik

### 1.1 Einführung

Die Vorlesung „Regelungstechnik 1“ verfolgt das Ziel, Studierenden die Grundlagen der System- und Regelungstechnik zu vermitteln. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Systembegriff, der in zahlreichen Fachdisziplinen von elementarer Bedeutung ist. Ganz allgemein versteht man unter einem System die Verbindung von interagierenden Komponenten zu einer zweckgebundenen Einheit. Im Bereich der Elektrotechnik kann dies beispielweise eine aus elektronischen Bauteilen bestehende elektrische Schaltung sein. Ein Beispiel aus der Medizin ist das kardiovaskuläre System, das aus Herz und Blutgefäßen besteht und für die Aufrechterhaltung des Blutkreislaufs verantwortlich ist.

Mit Hilfe geeigneter mathematischer Modelle kann das Verhalten von Systemen nachgebildet werden. Solche Modelle können z.B. bei technischen Systemen durch Anwendung physikalischer Gesetzmäßigkeiten, wie etwa den Newtonschen Axiomen hergeleitet oder aus experimentell gewonnenen Daten abgeleitet werden. Die resultierende mathematische Beschreibung ermöglicht die Analyse und Simulation der betrachteten Systeme und bildet die Grundlage für zahlreiche Methoden der System- und Regelungstheorie.

### 1.2 Grundlegende Begriffe

Die Wechselwirkung eines Systems mit seiner Umgebung erfolgt mittels seiner so genannten **Eingangs- und Ausgangsgrößen**, siehe hierzu Bild 1.1. Die Eingangsgrößen  $u_1, \dots, u_p$  wirken von der Umgebung auf das System ein und beeinflussen somit dessen Verhalten. Je nachdem, ob diese Beeinflussung gewollt oder ungewollt ist, spricht man von **Stell- oder Störgrößen**. Die Ausgangsgrößen  $y_1, \dots, y_q$  wirken vom System auf die Umgebung ein und beeinflussen so diese. In vielen Fällen besitzen Systeme *eine* Eingangsgröße  $u$  und *eine* Ausgangsgröße  $y$ , man nennt sie **Eingrößensysteme**<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>In Anlehnung an die englische Bezeichnung „single input - single output system“ spricht man auch von **SISO-Systemen**.

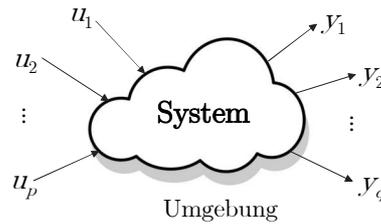


Bild 1.1: Interaktion zwischen einem System und seiner Umgebung

Im vorliegenden Skriptum wird das zeitliche Verhalten von Systemen untersucht. Das bedeutet, dass die Eingangs- und Ausgangsgrößen Funktionen des Zeitparameters  $t$  sind.

Man nennt ein System **kausal**, wenn die Werte der Ausgangsgrößen zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_1$  unabhängig von den zukünftigen Verläufen der Eingangsgrößen sind. Das bedeutet, dass die Werte  $y_1(t_1), \dots, y_q(t_1)$  ausschließlich von den Verläufen  $u_1(t), \dots, u_p(t)$  für  $t \leq t_1$  abhängen. Bei realen technischen Systemen trifft dies zu, d.h. sie sind kausal.

Systeme, bei denen die Werte  $y_1(t_1), \dots, y_q(t_1)$  ausschließlich von  $u_1(t_1), \dots, u_p(t_1)$ , also von den Momentanwerten der Eingangsgrößen abhängen, werden **statische Systeme** genannt.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$y(t) = K u(t)$$

eines System mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$ . Der Parameter  $K$  sei eine (reelle) Konstante. Offensichtlich handelt es sich hier um ein statisches System. ■

Im Gegensatz dazu sind kausale **dynamische Systeme** dadurch charakterisiert, dass die Werte der Ausgangsgrößen zum Zeitpunkt  $t_1$  nicht nur von den Momentanwerten der Eingangsgrößen abhängen, sondern auch von deren Verläufen in der Vergangenheit, also für  $t < t_1$ .

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t)$$

eines zeitkontinuierlichen Systems mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$ . Zur Ermittlung des Wertes der Ausgangsgröße zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_1$  ist die Kenntnis des Wertes der Ausgangsgröße zu einem Anfangszeitpunkt  $t_0$  sowie der Verlauf der Eingangsgröße im Intervall  $t_0 \leq t \leq t_1$  erforderlich, was unmittelbar aus

$$y(t_1) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt$$

ersichtlich ist. Der Anfangswert  $y(t_0)$  repräsentiert gewissermaßen die gesamte „Vorgeschichte“ des Systems für  $t < t_0$ .

So genannte **Zustandsmodelle** spielen in der System- und Regelungstechnik eine besondere Rolle. Sie stellen eine einheitliche, von der Natur des Systems unabhängige, mathematische Beschreibung dar und bilden die Grundlage vieler regelungstechnischer Methoden. Für das Verständnis dieser Beschreibungsform ist der Begriff der so genannten **Zustandsgrößen** essentiell. ■

Wenn es möglich ist, für ein dynamisches System die Zeitfunktionen  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  so anzugeben, dass die Werte der Ausgangsgrößen  $y_1(t), \dots, y_q(t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_1$  aus den Verläufen der Eingangsgrößen  $u_1(t), \dots, u_p(t)$  im Intervall  $t_0 \leq t \leq t_1$  und den (konstanten) Werten  $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$  berechnet werden können, so bezeichnet man  $x_1, \dots, x_n$  als Zustandsgrößen des Systems.

Die natürliche Zahl  $n$ , d.h. die Anzahl der Zustandsgrößen wird auch **Systemordnung** genannt. Man beachte, dass die Wahl der Zustandsgrößen für ein gegebenes System *nicht* eindeutig ist. Vielmehr gibt es für ein und dasselbe System *unendlich viele* Möglichkeiten, die benötigten  $n$  Zustandsgrößen zu wählen. Diese Freiheiten bei der Festlegung der Zustandsgrößen werden bei zahlreichen Verfahren der System- und Regelungstechnik vorteilhaft ausgenützt.

□ Wählt man im vorangegangenen Beispiel exemplarisch

$$x := 3y$$

so gilt für die Systembeschreibung

$$\frac{dx}{dt} = 3u, \quad y = \frac{1}{3}x.$$

Der Verlauf der Ausgangsgröße  $y(t)$  kann somit über die Beziehung

$$y(t) = \frac{1}{3}x(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau.$$

ermittelt werden. Offensichtlich kann  $y(t)$  aus dem Verlauf von  $u(\tau)$  im Intervall  $t_0 \leq \tau \leq t$  und dem Wert  $x(t_0)$  eindeutig berechnet werden, d.h.  $x$  ist eine Zustandsgröße des Systems. Auf analoge Weise kann gezeigt werden, dass sich im vorliegenden Beispiel jede beliebige Wahl  $x = \alpha y$  mit  $\alpha \neq 0$  als Zustandsgröße qualifiziert. ■

In weiterer Folge wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Systeme eine *endliche* Ordnung  $n$  besitzen und durch gewöhnliche **Differentialgleichungen** der Form

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned} \tag{1.1}$$

sowie  $q$  algebraische Ausgangsgleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ y_q &= g_q(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \end{aligned} \quad (1.2)$$

beschrieben werden können. Man sagt, dass durch (1.1) und (1.2) ein **Zustandsmodell** des betrachteten Systems gegeben ist. Der Zustand des Systems zum Anfangszeitpunkt  $t_0$ , d.h. die „Vorgeschichte“ des Systems, wird durch die Anfangswerte  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  repräsentiert.

Fasst man die Zustands-, Eingangs- und Ausgangsgrößen zu Vektoren

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

zusammen, sowie die (skalarwertigen) Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  bzw.  $g_1, \dots, g_q$  zu den Vektoren

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix},$$

so erhält man die Systembeschreibung (1.1) und (1.2) in kompakter Matrixschreibweise

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.4)$$

wobei für den Anfangszustand

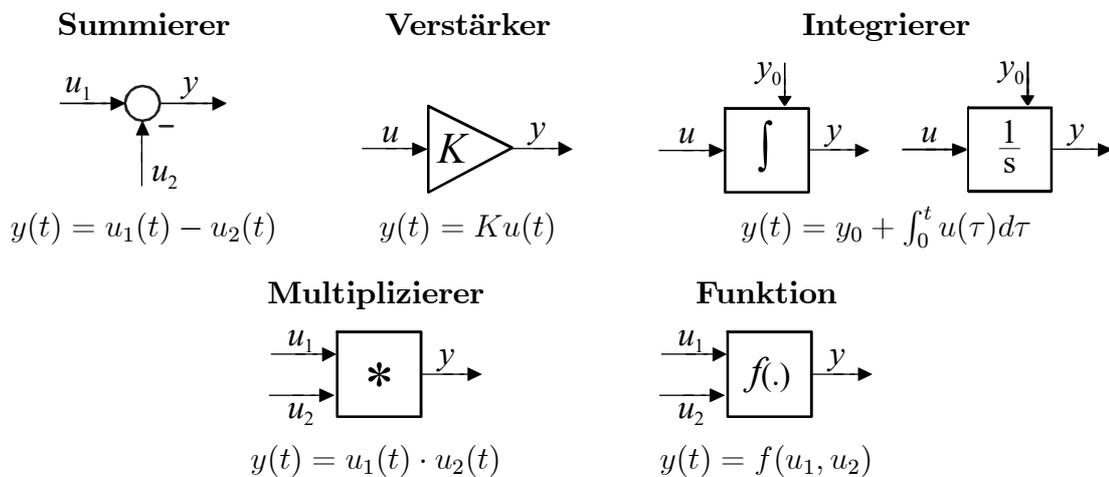
$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

gilt.

Man beachte, dass die rechte Seite der Differentialgleichung (1.3) sowie die Ausgangsgleichung (1.4) nicht explizit vom Zeitparameter  $t$  abhängen. Solche Systeme nennt man **zeitinvariant**. Die Dynamik des Systems, d.h. seine Reaktion auf Eingangsgrößen und Anfangszustände ist somit *unabhängig* vom Zeitpunkt der Durchführung eines Experimentes. Das bedeutet, dass bei gleichzeitiger zeitlicher Verschiebung der Verläufe der Eingangsgrößen sowie des Anfangszustands auch die Ausgangsgröße die gleiche zeitliche Verschiebung erfährt. Der Anfangszeitpunkt kann somit ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu  $t_0 = 0$  gesetzt werden. Hängt die rechte Seite der Differentialgleichungen und/oder die Ausgangsgleichung in (1.3)

hingegen explizit vom Zeitparameter  $t$  ab, so spricht man von einem **zeitvarianten** bzw. **zeitvariablen System**.

Häufig werden so genannte **Strukturbilder** zur Visualisierung von mathematischen Modellen eingesetzt. Dabei werden mathematische Operationen, wie z.B. Integration, Multiplikation und Addition durch entsprechende Blöcke dargestellt, die gemäß der Modellbeschreibung kombiniert werden. Da auch Simulationswerkzeuge, wie z.B. Simulink<sup>2</sup> auf einer solchen „block-orientierten“ Eingabe basieren, stellen Strukturbilder oft die Grundlage für eine numerische Simulation des Systemverhaltens dar. Exemplarisch werden an dieser Stelle einige häufig verwendete Funktionsblöcke angegeben:



Aus (1.3) folgt, dass der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  prinzipiell durch Integration der rechten Seite der Differentialgleichung (1.3) ermittelt werden kann, d.h.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau. \quad (1.6)$$

Hierbei ist die Integration elementweise auf  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$  anzuwenden. Aus (1.6) kann auch der wichtige Schluss gezogen werden, dass die Zustandsvariablen<sup>3</sup> *stetige* Funktionen der Zeit sind. In Bild 1.2 ist das zu (1.3) gehörige Strukturbild dargestellt, wobei vektorielle Größen überlicherweise durch fett gezeichnete Verbindungslinien dargestellt werden.

Die Lösungen  $\mathbf{x}(t)$  der Systemgleichungen (1.3) hängen offensichtlich vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  und vom Verlauf der Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(\tau)$  im Intervall  $t_0 \leq \tau \leq t$  ab. Diese Abhängigkeit wird im Folgenden durch

$$\mathbf{x}(t) = \Gamma \left( \begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}(\tau), t_0 \leq \tau \leq t \end{array} \right) \quad \text{oder kurz} \quad \mathbf{x} = \Gamma \left( \begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} \end{array} \right) \quad (1.7)$$

symbolisiert. Systeme, deren rechte Seite ausschließlich vom Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  abhängt, werden **autonom** genannt. Nach einer anfänglichen Anregung durch den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$

<sup>2</sup>www.mathworks.de

<sup>3</sup>hierbei werden (praktisch nicht realisierbare) Eingangsgrößen, die so genannte Dirac-Impulse enthalten, explizit ausgeschlossen.

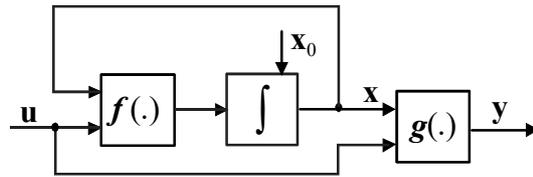


Bild 1.2: Strukturbild zu System (1.3), (1.4)

verläuft die „Bewegung“ eines autonomen Systems ohne weitere Beeinflussung von außen. Das System ist „sich selbst überlassen“. Die Beschreibung von autonomen Systemen ergibt sich unter der Annahme von  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  aus (1.3) zu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{x} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Die Zustandsvariablen können als Koordinaten eines  $n$ -dimensionalen Koordinatensystems, dem so genannten **Zustandsraum** interpretiert werden. Im Falle  $n = 2$  spricht man von der **Zustandsebene**. Die Kurve, die eine Lösung  $\mathbf{x}(t)$  im Zustandsraum beschreibt, wenn der Zeitparameter  $t$  variiert, wird **Bahnkurve** oder **Trajektorie** genannt. Der Richtungssinn von Trajektorien für wachsende Zeiten  $t$  wird bei der graphischen Darstellung durch Pfeile gekennzeichnet. In Bild 1.3 ist exemplarisch eine Trajektorie eines Systems dritter Ordnung im Zustandsraum dargestellt, der Anfangszustand ist durch  $\mathbf{x}_0$  gekennzeichnet.

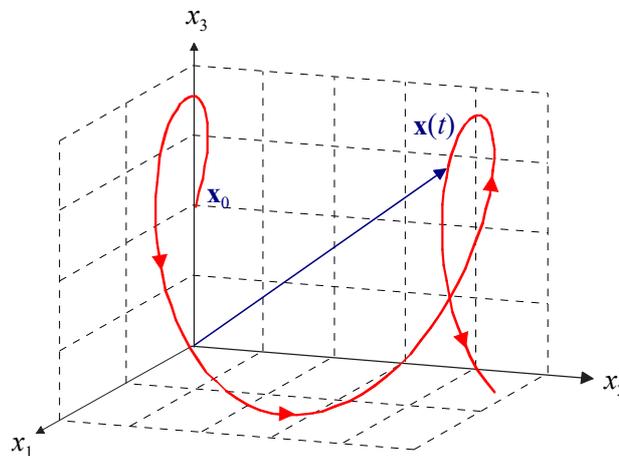


Bild 1.3: Trajektorie im dreidimensionalen Zustandsraum

### 1.3 Linearität

Ein System (1.3) heißt **linear**, wenn es bezüglich seiner Anfangszustände  $\mathbf{x}_0$  und seiner Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  dem **Superpositionsprinzip** genügt. Das bedeutet, dass die zu beliebigen

Anfangszuständen und Eingangsgrößen gehörigen Lösungen (1.7) für beliebige Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \\
 \text{(ii)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{x}_{0,1} + \beta \mathbf{x}_{0,2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \alpha \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{0,1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \beta \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{0,2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 \text{(iii)} \quad & \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \alpha \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} + \beta \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Außerdem muss gegebenenfalls die Ausgangsgleichung  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  entsprechende Eigenschaften besitzen. In Analogie zu (1.9) wird die Abhängigkeit der Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}$  von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  durch

$$\mathbf{y} = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

symbolisiert. Es muss dann gelten:

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad & \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \\
 \text{(v)} \quad & \Upsilon \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \alpha \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \beta \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 \text{(vi)} \quad & \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \alpha \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} + \beta \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ein System, das den Bedingungen (1.9) und / oder (1.11) *nicht* genügt, nennt man **nichtlinear**.

**B** Gegeben sei das autonome System

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad x(0) =: x_0.$$

Es soll untersucht werden, ob das System linear ist. Da auf das System keine Eingangsgröße wirkt, muss lediglich Bedingung (1.9,ii) überprüft werden. Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$x(t) = e^{-t} x_0.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Linearitätsbedingung erfüllt ist. ■

**B** Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= x - u, & x(0) &=: x_0 \\
 y &= x^2
 \end{aligned}$$

Die Ausgangsgleichung erfüllt die Bedingung (1.11) nicht, das System ist somit nichtlinear. ■

Eine große Klasse von Systemmodellen, die den Bedingungen (1.9) und (1.11) genügen, besitzt die Form

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},\end{aligned}\tag{1.12}$$

wobei  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  konstante Matrizen passender Dimensionen sind. Systeme der Form (1.12) repräsentieren eine wichtige Klasse von **linearen, zeitinvarianten Systemen**, die oft auch **LZI-Systeme** genannt werden. Für ein System der Ordnung  $n$  ist die **System- oder Dynamikmatrix**  $\mathbf{A}$  eine  $n \times n$  Matrix<sup>4</sup>, die **Eingangsmatrix**  $\mathbf{B}$  ist eine  $n \times p$  Matrix, wobei  $p$  die Zahl der Eingangsgrößen ist. Unter der Annahme von  $q$  Ausgangsgrößen ist die **Ausgangsmatrix**  $\mathbf{C}$  eine  $q \times n$  Matrix und die **Durchgriffsmatrix**  $\mathbf{D}$  hat die Dimension  $q \times p$ . Im Falle eines Eingrößensystems, d.h. für  $p = q = 1$  lautet die Systembeschreibung

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Der **Eingangsvektor**  $\mathbf{b}$  ist ein  $n$ -dimensionaler Spaltenvektor, der **Ausgangsvektor**  $\mathbf{c}^T$  ein  $n$ -dimensionaler Zeilenvektor und der **Durchgriff**  $d$  eine skalare Größe. Das zu (1.13) gehörige Strukturbild ist in Bild 1.4 dargestellt.

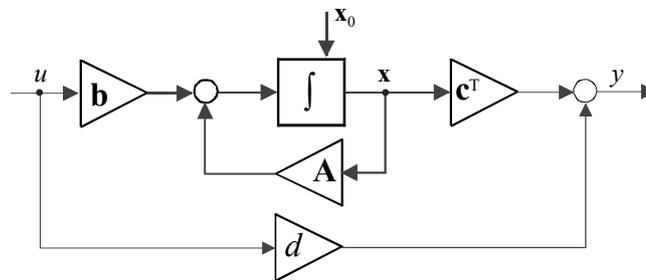


Bild 1.4: Strukturbild eines zeitkontinuierlichen Zustandsmodells der Form (1.13)

Die Gründe, warum diese Systemklasse in der System- und Regelungstechnik eine herausragende Rolle spielt, sind vielfältig:

- die Systeme sind aus mathematischer Sicht „gutmütig“, d.h. die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen sind gesichert
- viele reale Systeme können hinreichend genau durch Systeme dieser Form beschrieben werden

<sup>4</sup>oft wird auch die Schreibweise  $(n, n)$ -Matrix verwendet

- es existieren viele bewährte Verfahren, die für diese Systemklasse maßgeschneidert sind

Aus den oben genannten Gründen wird die Klasse der linearen, zeitinvarianten Systeme auch im Mittelpunkt aller weiteren Ausführungen in diesem Skriptum stehen. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, können nichtlineare Systeme durch lineare Systeme approximiert werden, was in weiterer Folge die Anwendung von „linearen“ Methoden erlaubt.

## 1.4 Beispiele für dynamische Systeme

### 1.4.1 Elektrische Systeme

Die Herleitung von Zustandsmodellen zur Beschreibung von idealisierten elektrischen Netzwerken, bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen ist ziemlich geradlinig. Die Systemordnung  $n$  wird im Allgemeinen durch die Anzahl der „Energiespeicher“ bestimmt, also durch die Zahl der Kapazitäten und Induktivitäten. Es bietet sich an, als Zustandsvariablen die Spannungsabfälle an Kapazitäten und Ströme durch Induktivitäten zu wählen. Das Zustandsmodell ergibt sich dann aus der Anwendung der Kirchhoffschen<sup>5</sup> Regeln.

**B** Gegeben sei das in Bild 1.5 dargestellte ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus einer Spannungsquelle, zwei Ohmschen Widerständen  $R_1$  und  $R_2$ , der Kapazität  $C$  und der Induktivität  $L$ . Die Eingangsgröße sei die Spannung  $u$ , die Ausgangsgröße ist der Spannungsabfall am Widerstand  $R_2$ .

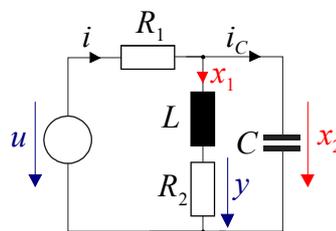


Bild 1.5: Elektrisches Netzwerk mit zwei Energiespeichern

Als Zustandsvariablen werden - wie oben erläutert - der Strom  $x_1$  und die Spannung  $x_2$  gewählt. Offensichtlich gilt dann

$$x_2 = L \frac{dx_1}{dt} + R_2 x_1,$$

d.h. die erste Zustandsdifferentialgleichung lautet

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{R_2}{L} x_1 + \frac{1}{L} x_2.$$

Weiters gilt

$$u = R_1 i + x_2,$$

<sup>5</sup>benannt nach dem deutschen Physiker Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887)

wobei sich der Strom  $i$  gemäß

$$i = i_C + x_1 = C \frac{dx_2}{dt} + x_1$$

errechnet. Daraus folgt

$$u = R_1 C \frac{dx_2}{dt} + R_1 x_1 + x_2,$$

und für die zweite Differentialgleichung gilt

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_1 C}x_2 + \frac{1}{R_1 C}u.$$

Die Ausgangsgleichung ist durch

$$y = R_2 x_1$$

gegeben. Zusammenfassend lautet somit das Zustandsmodell des elektrischen Systems

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{R_2}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_1 C}x_2 + \frac{1}{R_1 C}u, \\ y &= R_2 x_1. \end{aligned}$$

■

Das vorangegangene Beispiel verdeutlicht, dass die Komponenten des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  verschiedene physikalische Dimensionen besitzen können. Im Beispiel ist  $x_1$  ein elektrischer Strom (Einheit Ampère) während  $x_2$  eine elektrische Spannung (Einheit Volt) darstellt.

## 1.4.2 Mechanische Systeme

Bei der translatorischen Bewegung von Massen ist es zweckmäßig, deren Positionen und Geschwindigkeiten als Zustandsvariablen einzuführen. Analog dazu können bei rotatorischen Bewegungen von Massen deren Drehwinkel und Winkelgeschwindigkeiten gewählt werden.

**B** Gegeben sei das in Bild 1.6, links dargestellte Masse-Feder System, bestehend aus einem Körper mit der Masse  $m$  und einer Feder mit linearer Federkennlinie, charakterisiert durch die Federkonstante  $c$ . Die Position der Masse wird mit  $y$  bezeichnet, wobei  $y = 0$  der Lage bei entspannter Feder entspricht. Für die Reibung zwischen Körper und Untergrund wird Coulombsche<sup>6</sup> Reibung angenommen, der Reibungskoeffizient wird mit  $\mu$  bezeichnet. Weiters wirkt auf den Körper eine äußere Kraft  $F$ . Die Anwendung des zweiten Newtonschen<sup>7</sup> Gesetzes liefert die Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = -cy - \mu mg \operatorname{sign} v + F$$

<sup>6</sup>benannt nach dem französischen Physiker Charles Augustin de Coulomb (1736 - 1806)

<sup>7</sup>benannt nach dem englischen Forscher Isaac Newton (1642 - 1727)

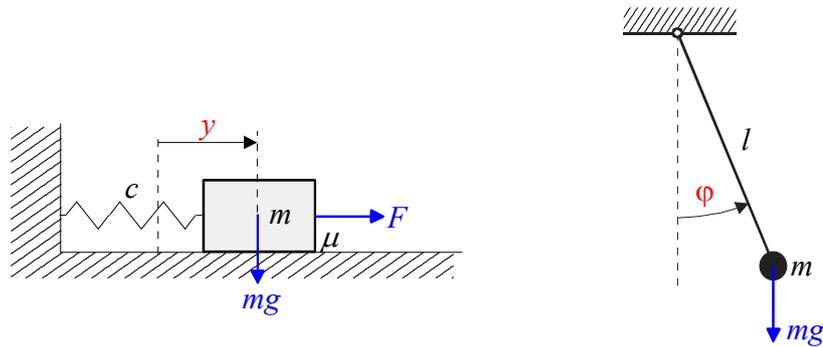


Bild 1.6: Mechanische Systeme: Masse-Feder System und Pendel

wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Körpers ist und  $g$  die Erdbeschleunigung repräsentiert. Führt man nun die Zustandsvariablen

$$x_1 = y \quad \text{und} \quad x_2 = v$$

ein, so erhält man mit der Schreibweise  $u := F$  die Systembeschreibung

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{c}{m} x_1 - \mu g \operatorname{sign} x_2 + \frac{1}{m} u, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

■

**B** Das mathematische Modell des in Bild 1.6, rechts dargestellten Pendels soll aufgestellt werden. Dabei wird idealisierend vorausgesetzt, dass das Pendel aus einem drehbar gelagerten, masselosen Stab der Länge  $l$  und einer punktförmigen Masse  $m$  am Stabende besteht. Das der Pendelbewegung entgegenwirkende Reibungsmoment (Lagerreibung) sei der Winkelgeschwindigkeit proportional (Proportionalitätsfaktor  $k$ ). Mit Hilfe des Drallsatzes ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad ml^2 \frac{d\omega}{dt} = -mgl \sin \varphi - k\omega \quad \text{mit } k \geq 0,$$

wobei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ist. Führt man als Zustandsvariablen den Pendelwinkel und die Winkelgeschwindigkeit ein, d.h.

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \omega,$$

so ergibt sich das folgende Zustandsmodell:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{ml^2} x_2, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Die zum Pendelmodell gehörigen Trajektorien sind in Bild 1.7 für  $k = 0$ , d.h. für den reibungsfreien Fall, dargestellt. Die ungedämpften Pendelbewegungen sind hier deutlich zu erkennen. In Bild 1.8 sind die entsprechenden Trajektorien für  $k > 0$  dargestellt.

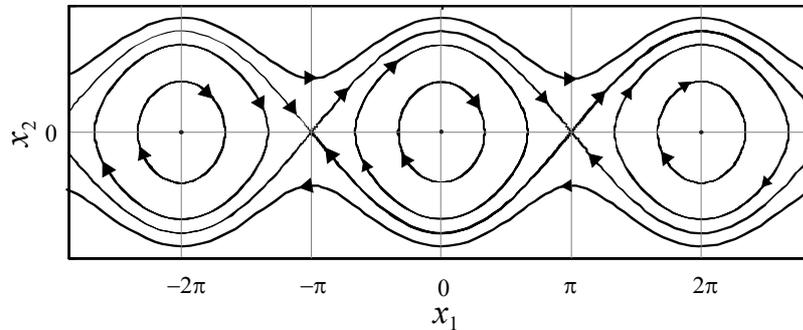


Bild 1.7: Trajektorien des Pendelmodells für  $k = 0$

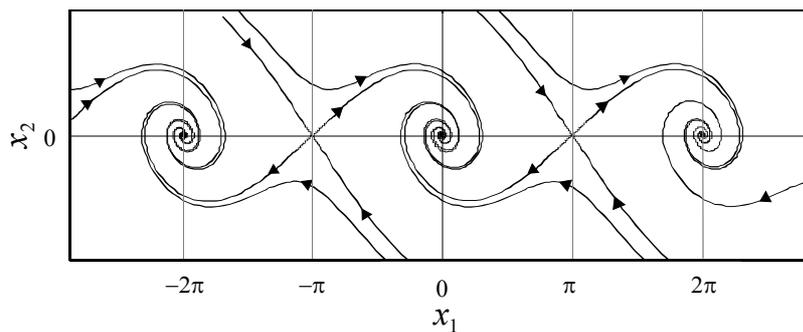


Bild 1.8: Trajektorien des Pendelmodells für  $k > 0$

■

### 1.4.3 Räuber-Beute Modell

Nach Volterra und Lotka kann die Räuber-Beute Beziehung zweier (hinreichend großer) Populationen mit Hilfe der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - bx_1x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -cx_2 + dx_1x_2\end{aligned}$$

mit den positiven Konstanten  $a, b, c, d > 0$  beschrieben werden. Hierbei repräsentiert  $x_1$  die „Anzahl“ der Beutetiere und  $x_2$  stellt die „Anzahl“ der Räuber dar. Das Modell beruht auf der Annahme, dass sich ohne natürliche Feinde, d.h. für  $x_2 = 0$ , die Beutetiere exponentiell mit der Rate  $a$  vermehren. Umgekehrt nimmt die Population der Räuber für  $x_1 = 0$  wegen

Nahrungsmangels exponentiell mit der Rate  $c$  ab. Die Wechselwirkungen zwischen den beiden Populationen werden durch die Terme  $bx_1x_2$  und  $dx_1x_2$  charakterisiert. In Bild 1.9 sind die zeitlichen Verläufe von  $x_1$  und  $x_2$  für  $x_1(0) = 40$  und  $x_2(0) = 20$  und die Modellparameter  $a = 0.5$ ,  $b = d = 0.01$ ,  $c = 0.8$  dargestellt. Weiters ist für die gleichen Anfangswerte der Verlauf der Trajektorie in der Zustandsebene eingezeichnet. Man erkennt, dass sich eine geschlossene Trajektorie ergibt. Das bedeutet, dass  $x_1$  und  $x_2$  periodische Funktionen der Zeit sind.

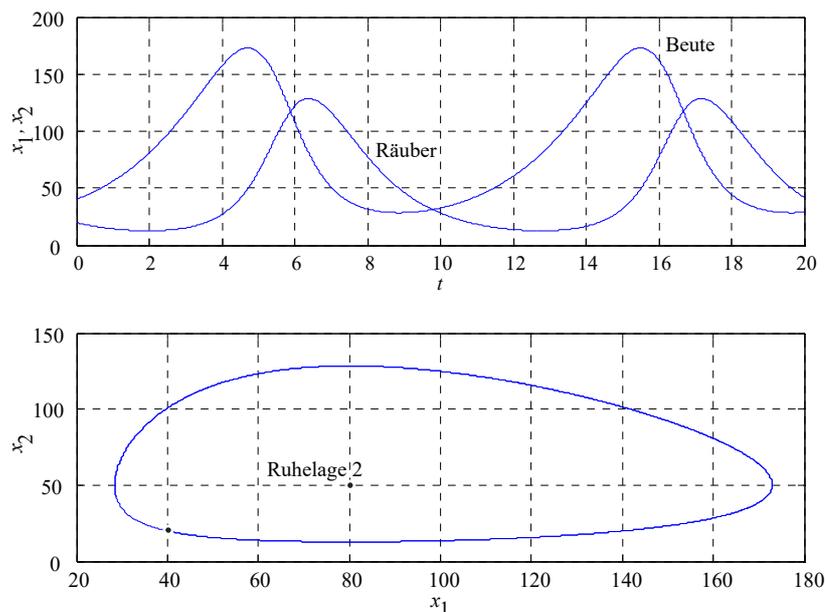


Bild 1.9: Räuber - Beute Beziehung

Weiters ist in Bild 1.9 eine so genannte Ruhelage des Systems eingezeichnet. Sie ist durch  $x_{1,R}(t) = x_1(0) = \text{konst.}$  und  $x_{2,R}(t) = x_2(0) = \text{konst.}$  charakterisiert. Das bedeutet, dass sich die beiden Populationen in einem Gleichgewicht befinden. Dieser spezielle Zustand ergibt sich aus den algebraischen Gleichungen

$$\frac{dx_{1,R}}{dt} = 0 = ax_{1,R} - bx_{1,R}x_{2,R} \quad \text{und} \quad \frac{dx_{2,R}}{dt} = 0 = -cx_{2,R} + dx_{1,R}x_{2,R}.$$

Die Ruhelage  $x_{1,R} = x_{2,R} = 0$  stellt hier den „trivialen Fall“ dar, für die praktisch relevante Ruhelage ergibt sich

$$x_{1,R} = \frac{c}{d}, \quad x_{2,R} = \frac{a}{b}.$$



# Kapitel 2

## Laplace-Transformation

### 2.1 Einführung

Die (einseitige) **Laplace-Transformation**<sup>1</sup> ordnet einer Zeitfunktion  $f(t)$  über die Berechnungsvorschrift („Laplace-Integral“)

$$\bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.1)$$

eine Funktion  $\bar{f}(s)$  der komplexen Variable  $s$  zu. Dabei wird an dieser Stelle vereinfachend angenommen, dass  $f(t)$  für negative Werte des Parameters  $t$  verschwindet, d.h.

$$f(t) = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

Weiters wird vorausgesetzt, dass  $f(t)$  auf jedem endlichen Zeitintervall stückweise stetig ist und - für geeignet gewählte reelle Konstanten  $M$  und  $\gamma$  - der Ungleichung

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad (2.2)$$

genügt. Dann ist das Integral (2.1) für alle  $s$  mit  $\operatorname{Re}\{s\} > \gamma$  absolut konvergent<sup>2</sup>, man spricht auch vom Existenzbereich von  $\bar{f}(s)$ . Jeder transformierbaren Funktion  $f(t)$  im **Zeitbereich** wird durch (2.1) eine Funktion  $\bar{f}(s)$  im **Bildbereich** zugeordnet. Diese Korrespondenz zwischen der **Originalfunktion**  $f(t)$  und der zugehörigen **Bildfunktion**  $\bar{f}(s)$  wird durch

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{und} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} \quad (2.3)$$

bzw. durch das „Hantelsymbol“

$$f(t) \circ \bullet \bar{f}(s) \quad (2.4)$$

angegeben.

---

<sup>1</sup>benannt nach Pierre Simon Laplace (1749 - 1827)

<sup>2</sup>das Laplace-Integral ist also in einer rechten Halbebene absolut konvergent. In den meisten Fällen kann die Funktion  $\bar{f}(s)$  in die gesamte komplexe Ebene analytisch fortgesetzt werden.

**B** Gegeben sei die Sprungfunktion bzw. der **Einheitssprung**

$$f(t) = \sigma(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} .$$

Die zugehörige Laplace-Transformierte errechnet sich gemäß (2.1) zu

$$\bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}\{s\} > 0.$$

Damit ergibt sich die Korrespondenz

$$\sigma(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s} . \quad (2.5)$$

■

**B** Zu der (komplexen) Exponentialfunktion

$$f(t) = e^{\alpha t} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C}$$

kann die zugehörige Laplace-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{für } \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{\alpha\}$$

berechnet werden, d.h. es gilt

$$e^{\alpha t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s-\alpha} . \quad (2.6)$$

■

## 2.2 Eigenschaften und Sätze der Laplace-Transformation

### 2.2.1 Linearität

Wie man aus (2.1) erkennen kann, ist die Laplace-Transformation eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \quad (2.7)$$

für beliebige komplexe Konstanten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ .

**B** Die Laplace-Transformierten der Sinus- und Cosinusfunktion ergeben sich aus der bereits bekannten Korrespondenz (2.6) für die Exponentialfunktion. Dabei wird die so genannte Eulersche<sup>3</sup> Identität, also

$$f(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

<sup>3</sup>benannt nach dem Mathematiker Leonhard Euler (1707 - 1783)

ausgenützt, d.h. in (2.6) wird  $\alpha = j\omega$  gesetzt. Daraus resultiert unmittelbar

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s - j\omega}.$$

Die komplexe Exponentialfunktion kann aber auch als Linearkombination zweier Zeitfunktionen gedeutet werden, nämlich

$$f(t) = e^{j\omega t} = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) = 1 \cdot \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t.$$

Zerlegt man also  $\bar{f}(s)$  entsprechend, dann ergibt sich.

$$\bar{f}(s) = 1 \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + j \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Daraus folgen unter Anwendung von (2.7) die Korrespondenzen

$$\cos \omega t \text{ } \circ \text{---} \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \sin \omega t \text{ } \circ \text{---} \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.8)$$

■

### 2.2.2 Dämpfungsregel

Sei  $f(t)$  eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter  $\bar{f}(s)$ . Es gilt dann

$$\mathcal{L} \{ f(t) e^{\alpha t} \} = \bar{f}(s - \alpha), \quad (2.9)$$

wobei  $\alpha$  eine beliebige komplexe Konstante ist.

**B** Mit Hilfe von (2.9) können mühelos die beiden Korrespondenzen

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \text{ } \circ \text{---} \bullet \frac{(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad e^{\alpha t} \sin \omega t \text{ } \circ \text{---} \bullet \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \quad (2.10)$$

angegeben werden.

■

Das Ergebnis (2.9) kann leicht mittels (2.1) hergeleitet werden, denn es gilt

$$\mathcal{L} \{ f(t) e^{\alpha t} \} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-\alpha)t} dt = \bar{f}(s - \alpha).$$

### 2.2.3 Verschiebungssatz

Sei  $f(t)$  eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter  $\bar{f}(s)$ . Für die Laplace-Transformierte der auf der Zeitachse um  $\tau > 0$  (nach rechts) verschobenen Funktion  $f(t - \tau)$  lautet

$$\mathcal{L} \{ f(t - \tau) \} = e^{-s\tau} \mathcal{L} \{ f(t) \}. \quad (2.11)$$

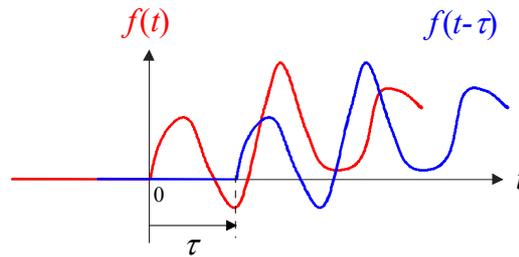


Bild 2.1: zur Illustration des Verschiebungssatzes

Man beachte hierzu auch die Darstellung in Bild 2.1, die verdeutlichen soll, dass die verschobene Funktion  $f(t - \tau)$  für  $t < \tau$  identisch Null ist.

**B** Für die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \tau \\ e^{-(t-\tau)} & \text{für } t \geq \tau \end{cases}$$

gilt unter Zuhilfenahme von (2.6) und (2.11)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s+1} e^{-s\tau}.$$

■

Das Ergebnis (2.11) kann wieder mittels (2.1) hergeleitet werden, denn es gilt

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt \stackrel{\xi=t-\tau}{=} \int_{-\tau}^{+\infty} f(\xi) e^{-s(\xi+\tau)} d\xi = e^{-s\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} f(\xi) e^{-s\xi} d\xi$$

Da  $f(\xi) = 0$  für  $\xi < 0$  vorausgesetzt wird, folgt unmittelbar (2.11).

Im nachfolgenden Beispiel wird die Laplace-Transformierte des so genannten **Dirac<sup>4</sup>-Impulses** ermittelt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Darstellung des Dirac-Impulses als unendlich schmale und unendlich hohe Differenz zweier Sprungfunktionen keinen Anspruch auf mathematische Exaktheit erhebt. Eine mathematisch exakte Behandlung von Dirac-Impulsen kann im Rahmen der so genannten Distributionentheorie erfolgen.

**B** Gegeben sei eine Zeitfunktion (siehe Bild 2.2)

$$f(t) = \delta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} [\sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon)]$$

aus der durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  der Dirac-Impuls hervorgeht, d.h.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t).$$

<sup>4</sup>benannt nach dem Physiker Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984)

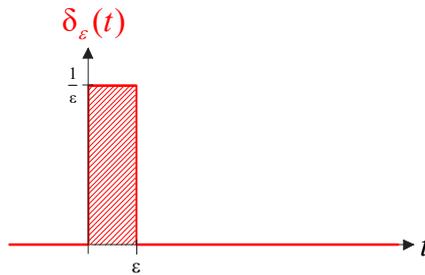


Bild 2.2: Dirac-Impuls

Für die Laplace-Transformierte von  $f(t)$  gilt nun unter Anwendung von (2.5)

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{\varepsilon s} [1 - e^{-s\varepsilon}].$$

Führt man nun obigen Grenzübergang ein, so erhält man den unbestimmten Ausdruck

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{f}(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} \right) = \frac{0}{0},$$

die Anwendung der Regel von de l'Hospital<sup>5</sup> liefert

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-s\varepsilon}}{s} = 1,$$

d.h.

$$\delta(t) \text{ --- } \bullet \text{ --- } 1. \quad (2.12)$$

■

### 2.2.4 Faltungsregel

Gegeben seien zwei Zeitfunktionen mit den zugehörigen Laplace-Transformierten, also  $\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  und  $\bar{g}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ . Es gilt dann

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\bar{g}(s)\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (2.13)$$

Man spricht in diesem Zusammenhang von der Faltung der Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  und verwendet häufig die Kurzschreibweise

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

<sup>5</sup>benannt nach dem Mathematiker Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hospital (1661 - 1704)

**B** Die inverse Laplace-Transformierte von

$$\bar{h}(s) = \frac{1}{s^2}$$

kann mit Hilfe der Faltungsregel leicht ermittelt werden. Stellt man nämlich  $\bar{h}(s)$  als Produkt zweier identischer Funktionen  $\bar{f}(s)$  und  $\bar{g}(s)$  dar, d.h.

$$\bar{h}(s) = \bar{f}(s) \bar{g}(s) \quad \text{mit} \quad \bar{f}(s) = \bar{g}(s) = \frac{1}{s},$$

so erhält man mit (2.13)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \int_0^t \sigma(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau = \int_0^t d\tau = t,$$

d.h.

$$t \circ \bullet \frac{1}{s^2} \tag{2.14}$$

Mit diesem Ergebnis kann man nun auch die inverse Laplace-Transformierte von

$$\bar{h}(s) = \frac{1}{s^3}$$

ermitteln, denn

$$\bar{h}(s) = \bar{f}(s) \bar{g}(s) \quad \text{mit} \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad \bar{g}(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Die Anwendung von (2.13) liefert

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\} = \int_0^t \sigma(t-\tau) \tau d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2},$$

also

$$\frac{t^2}{2} \circ \bullet \frac{1}{s^3}. \tag{2.15}$$

Eine wiederholte Durchführung obiger Schritte liefert für  $n \geq 0$  die Korrespondenz

$$\frac{t^n}{n!} \circ \bullet \frac{1}{s^{n+1}}. \tag{2.16}$$

■

Für die Herleitung des Faltungssatzes wird das Produkt  $\bar{h}(s)$  der Laplace-Transformierten  $\bar{f}(s)$  und  $\bar{g}(s)$ , also

$$\bar{h}(s) = \bar{f}(s) \bar{g}(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st} dt$$

analysiert mit dem Ziel,  $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{h}(s) \}$  zu berechnen. Dazu wird  $\bar{h}(s)$  unter Verwendung der Transformationsvorschrift (2.1) als

$$\bar{h}(s) = \int_0^\infty f(\varepsilon) e^{-s\varepsilon} d\varepsilon \int_0^\infty g(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

angeschrieben. Man beachte, dass - im Sinne der nachfolgenden Berechnungen - die Integrationsvariablen mit  $\varepsilon$  und  $\tau$  bezeichnet wurden. Das Produkt der beiden Integrale kann zu einem Doppelintegral

$$\bar{h}(s) = \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{\varepsilon=0}^{\infty} f(\varepsilon)g(\tau)e^{-s(\varepsilon+\tau)} d\varepsilon d\tau$$

zusammengefasst werden. Mit der Substitution

$$t = \varepsilon + \tau \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = t - \tau$$

und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass  $\tau$  im inneren Integral nur ein Parameter ist, d.h.

$$d\varepsilon = dt$$

erhält man den Ausdruck

$$\bar{h}(s) = \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{t=\tau}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)e^{-st} dt d\tau.$$

Der Integrationsbereich des obigen Doppelintegrals ist in Bild 2.3 in der  $t - \tau$ -Ebene grau

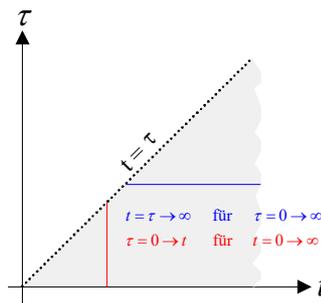


Bild 2.3: Zur Herleitung der Faltungsregel

dargestellt. Vertauscht man die Reihenfolge der Integration so ergibt sich gemäß Bild 2.3

$$\bar{h}(s) = \int_0^{\infty} \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)e^{-st} d\tau dt = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt.$$

Daraus folgt unmittelbar die gesuchte Zeitfunktion

$$h(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Man beachte auch, dass bei der Faltungsoperation natürlich das Kommutativgesetz, also

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \tag{2.17}$$

gilt.

### 2.2.5 Differentiation im Zeitbereich

Sei  $f(t)$  eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter  $\bar{f}(s)$ . Für die Laplace-Transformierte der zeitlichen Ableitung von  $f(t)$  gilt dann

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = s\bar{f}(s) - f(0). \quad (2.18)$$

**B** Die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \sin \omega t$$

lautet gemäß (2.8)

$$\bar{f}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Für die zeitliche Ableitung von  $f(t)$ , also

$$\frac{df(t)}{dt} = \omega \cos \omega t$$

gilt dann nach (2.18)

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \mathcal{L} \{ \omega \cos \omega t \} = s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Dieses Ergebnis deckt sich erwartungsgemäß mit (2.8). ■

Relation (2.18) kann mit Hilfe von (2.1) abgeleitet werden. Unter Anwendung der partiellen Integration gilt dann

$$\int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} [-s f(t)e^{-st}] dt = s\bar{f}(s) - f(0).$$

Für die zweite Ableitung von  $f(t)$  gilt unter Anwendung von (2.18) analog

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{df(t)}{dt} \right) \right\} = s \mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0},$$

d.h.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = s^2 \bar{f}(s) - s f(0) - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (2.19)$$

Eine wiederholte Anwendung des Differentiationssatzes liefert für die  $n$ -te Ableitung von  $f(t)$  die Korrespondenz

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n \bar{f}(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} \frac{d^i f}{dt^i} \Big|_{t=0}. \quad (2.20)$$

Man beachte, dass sich im Falle verschwindender Anfangswerte obige Relation zu

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n \bar{f}(s) \quad (2.21)$$

vereinfacht. Eine  $n$ -fache Differentiation im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation im Bildbereich mit  $s^n$ .

### 2.2.6 Differentiation im Bildbereich

Sei  $f(t)$  eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter  $\bar{f}(s)$ . Es gilt dann die Relation

$$-\mathcal{L}\{t f(t)\} = \frac{d\bar{f}(s)}{ds} \quad (2.22)$$

**B** Gegeben sei eine Zeitfunktion und die zugehörige Laplace-Transformierte:

$$f(t) = \sin \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \bar{f}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Über die Ableitung von  $\bar{f}(s)$ , also

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = -\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

kann mittels (2.22) die Korrespondenz

$$t \sin \omega t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (2.23)$$

hergeleitet werden. ■

Die Beziehung (2.22) kann unmittelbar mit (2.1) hergeleitet werden. Leitet man nämlich  $\bar{f}(s)$  nach  $s$  ab, so ergibt sich unmittelbar

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\},$$

was der Relation (2.22) entspricht. Eine weitere Differentiation nach  $s$  führt auf das Ergebnis

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2 \bar{f}(s)}{ds^2}, \quad (2.24)$$

bzw. bei  $n$ -facher Differentiation auf

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \bar{f}(s)}{ds^n}. \quad (2.25)$$

### 2.2.7 Integration im Zeitbereich

Sei  $f(t)$  eine Zeitfunktion mit zugehöriger Laplace-Transformierter  $\bar{f}(s)$ . Es gilt dann

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \bar{f}(s). \quad (2.26)$$

**B** Gegeben sei eine Zeitfunktion und ihre Laplace-Transformierte

$$f(t) = t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s^2},$$

siehe hierzu (2.14). Die Laplace-Transformierte von

$$\int_0^t \tau \, d\tau = \frac{t^2}{2}$$

errechnet sich mit Hilfe von (2.26) zu

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^2}{2} \right\} = \frac{1}{s^3},$$

was mit dem Ergebnis (2.15) übereinstimmt. ■

Der Integrationssatz kann besonders leicht mit Hilfe der Faltungsregel (2.13) hergeleitet werden, also

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) \, d\tau \right\} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) \, d\tau \right\} = \bar{f}(s)\bar{g}(s).$$

Wählt man nun  $g(t) = \sigma(t)$ , d.h.  $\bar{g}(s) = \frac{1}{s}$  so erhält man unmittelbar (2.26). Die Integration im Zeitbereich entspricht also im Bildbereich einer Multiplikation mit  $\frac{1}{s}$ . Diese Erkenntnis erklärt auch, warum in Strukturbildern (und z.B. auch in Simulink) der Integrationsblock mit  $\frac{1}{s}$  beschriftet ist (siehe Bild 2.4). Eine  $n$ -fache Integration im Zeitbereich entspricht einer Multiplikation mit  $\frac{1}{s^n}$  im Bildbereich.



Bild 2.4: Blockdarstellung eines Integrators

### 2.2.8 Anfangswertsatz

Gegeben sei die Laplace-Transformierte  $\bar{f}(s)$  einer Zeitfunktion  $f(t)$ . Der Wert der Zeitfunktion  $f(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  kann mit Hilfe des so genannten Anfangswertsatzes

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{f}(s) \quad (2.27)$$

berechnet werden. Man beachte, dass mit Hilfe des Anfangswertsatzes  $f(0)$  direkt aus  $\bar{f}(s)$  ermittelt werden kann, ohne  $f(t)$  explizit berechnen zu müssen.

**B** Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Der Wert der zugehörigen Zeitfunktion  $f(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  lautet somit (nach zweifacher Anwendung der Regel von de l'Hospital)

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = 1.$$

Dass dieses Ergebnis korrekt ist, zeigt auch Korrespondenz (2.8). ■

### 2.2.9 Endwertsatz

Gegeben sei die Laplace-Transformierte  $\bar{f}(s)$  einer Zeitfunktion  $f(t)$ . Der Wert der Zeitfunktion  $f(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  kann mit Hilfe des so genannten Endwertsatzes

$$f_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{f}(s) \quad (2.28)$$

ermittelt werden. Ähnlich wie beim Anfangswertsatz (2.27) ist die Ermittlung von  $f(t)$  nicht erforderlich. Man beachte aber, dass die Anwendung von (2.28) nur dann zulässig ist, wenn der Grenzwert von  $f(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  existiert. Dies kann ebenfalls im Bildbereich überprüft werden. Ist die Funktion  $\bar{g}(s) := s \bar{f}(s)$  eine gebrochene rationale Funktion, d.h.

$$\bar{g}(s) = \frac{\kappa(s)}{\lambda(s)},$$

wobei  $\kappa(s)$  und  $\lambda(s)$  so genannte teilerfremde (gekürzte) Polynome sind, so existiert  $f_\infty$  genau dann, wenn das Polynom  $\lambda(s)$  ausschließlich Nullstellen mit negativem Realteil besitzt. Ein solches Polynom wird auch **Hurwitzpolynom**<sup>6</sup> genannt. Näheres dazu folgt im Abschnitt 2.3 über die inverse Laplace-Transformation.

**B** Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Der Wert der zugehörigen Zeitfunktion  $f(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  lautet

$$f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)} = 1.$$

Dieses Ergebnis ist korrekt, da die entsprechende Zeitfunktion

$$f(t) = 1 - e^{-t}$$

lautet. ■

---

<sup>6</sup>benannt nach dem deutschen Mathematiker Adolf Hurwitz (1859-1919)

Dass der Endwertsatz bei Nichtbeachtung der Existenz von  $f_\infty$  falsche Ergebnisse liefert, zeigt das folgende Beispiel.

**B** Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Der (vermeintliche) Wert der zugehörigen Zeitfunktion  $f(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  lautet

$$f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s-1} = 0.$$

Man beachte, dass das Polynom  $\lambda(s) = (s-1)$  eine Nullstelle bei  $s=1$  besitzt, d.h.  $f_\infty$  existiert *nicht*. Das mit dem Endwertsatz gefundene Ergebnis ist somit falsch! Dies bestätigt auch die Rücktransformation von  $\bar{f}(s)$ , sie lautet

$$f(t) = e^t.$$

■

Man beachte, dass Anfangs- und Endwertsatz im folgenden Abschnitt genauer erläutert werden.

## 2.3 Inverse Laplace-Transformation

Zu einer gegebenen Bildfunktion  $\bar{f}(s)$  kann mit Hilfe der komplexen Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\kappa-j\infty}^{\kappa+j\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds \quad \text{wobei} \quad \kappa > \gamma \quad (2.29)$$

die zugehörige Originalfunktion  $f(t)$  ermittelt werden. Dabei ist  $\gamma$  so zu wählen, dass (2.2) erfüllt ist. Die inverse Laplace-Transformation wird oft nicht über das Umkehrintegral (2.29) bewerkstelligt, da dieser Weg aufwändig sein kann. Die bevorzugte Vorgangsweise besteht üblicherweise darin, eine gegebene (komplizierte) Funktion  $\bar{f}(s)$  in einfache - und somit leicht rücktransformierbare - Terme zu zerlegen. Ist  $\bar{f}(s)$  eine gebrochen rationale Funktion, so kann diese Zerlegung auf besonders einfache Weise mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erfolgen.

### 2.3.1 Gebrochen rationale Funktionen

In vielen praktisch relevanten Fällen ist  $\bar{f}(s)$  eine so genannte **gebroschen rationale Funktion**, kann also als Quotient zweier Polynome dargestellt werden, d.h.

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}. \quad (2.30)$$

Hierbei stellen  $\mu(s)$  und  $\nu(s)$  Polynome in der Variablen  $s$  dar,  $\mu(s)$  wird **Zählerpolynom** genannt und  $\nu(s)$  ist das **Nennerpolynom**. Es wird vorausgesetzt, dass die Polynomkoeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom *reell* sind. Eine wichtige Konsequenz dieser Annahme

ist, dass die Nullstellen von  $\mu(s)$  bzw.  $\nu(s)$  rein reell und/oder paarweise konjugiert komplex sind.

**B** Gegeben sei die (gebrochen rationale) Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} = \frac{2s^4 - 2s^3 + 14s^2 - 18s - 36}{s^5 + 3s^4 + 16s^3 + 32s^2 + 63s + 45}.$$

Die vier Nullstellen  $s = n_{i=1,2,3,4}$  des Zählerpolynoms  $\mu(s)$  liegen bei

$$n_1 = -1, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = j3 \quad \text{und} \quad n_4 = n_3^* = -j3,$$

für die fünf Nullstellen  $s = p_{k=1,2,3,4,5}$  des Nennerpolynoms  $\nu(s)$  gilt

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -1 + j2, \quad p_3 = p_2^* = -1 - j2, \quad p_4 = j3, \quad p_5 = p_4^* = -j3.$$

Mit der Kenntnis von Zähler- und Nennernullstellen kann eine gebrochen rationale Funktion in **faktorisierter Darstellung** angegeben werden.

**B** Die Funktion  $\bar{f}(s)$  aus dem vorangegangenen Beispiel lautet in faktorisierter Darstellung

$$\bar{f}(s) = \frac{2(s+1)(s-2)(s-j3)(s+j3)}{(s+1)(s+1-j2)(s+1+j2)(s-j3)(s+j3)}.$$

Wenn  $\mu(s)$  und  $\nu(s)$  keine gemeinsamen Faktoren haben, so nennt man die Polynome **teilerfremd**. Das bedeutet, dass in  $\bar{f}(s)$  alle möglichen Kürzungen durchgeführt wurden.

**B** Die gekürzte Funktion  $\bar{f}(s)$  aus dem vorangegangenen Beispiel lautet

$$\bar{f}(s) = \frac{2(s-2)}{(s+1-j2)(s+1+j2)} = \frac{2s-4}{s^2+2s+5}.$$

In weiterer Folge wird davon ausgegangen, dass  $\bar{f}(s)$  in der faktorisierten Darstellung

$$\bar{f}(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad (2.31)$$

gegeben ist. Hierbei sind  $s = n_i$  die Nullstellen von  $\mu(s)$  und  $s = p_k$  die Nullstellen von  $\nu(s)$ . Für die Polynomgrade der beiden Polynome gilt

$$\text{Grad } \nu(s) = n \quad \text{und} \quad \text{Grad } \mu(s) = m < n. \quad (2.32)$$

Man beachte, dass der Fall  $m > n$  bei unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden kann, allerdings kann der Fall  $m = n$  durchaus auftreten. Dennoch stellt die obige Annahme (2.32) keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, da für  $m = n$  die Funktion  $\bar{f}(s)$  als Summe einer Konstanten und einer Funktion der Form (2.31) dargestellt werden kann.

**B** Die gebrochen rationale Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{3s^2 - s + 1}{s^2 - s}$$

kann (mittels einer Polynomdivision) auch in der Form

$$\bar{f}(s) = \frac{3s^2 - s + 1}{s^2 - s} = 3 + \frac{2s + 1}{s^2 - s}$$

angeschrieben werden. ■

### 2.3.2 Partialbruchzerlegung

Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung kann  $\bar{f}(s)$  in eine Summe „einfacher“ Terme zerlegt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden dabei zwei Fälle unterschieden.

#### Fall 1: $\nu(s)$ besitzt lauter einfache Nullstellen

Das bedeutet, dass das Nennerpolynom lauter voneinander verschiedene Nullstellen besitzt. Liegt dieser Fall vor, so kann die Partialbruchzerlegung von  $\bar{f}(s)$  in der Form

$$\bar{f}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i} \quad (2.33)$$

dargestellt werden, wobei  $c_i$  (komplexe) Konstanten sind.

**B** Für die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{d.h.} \quad n_1 = 0 \quad \text{und} \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -2$$

wird somit der Ansatz

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{(s+1)} + \frac{c_2}{(s+2)}$$

gewählt. Zur Bestimmung der Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  wird die rechte Seite obiger Relation auf gleichen Nenner gebracht, d.h.

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1(s+2) + c_2(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

Prinzipiell können  $c_1$  und  $c_2$  nun durch einen einfachen Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome gewonnen werden, d.h. es muss gelten

$$c_1 + c_2 = 1 \quad \text{und} \quad 2c_1 + c_2 = 0,$$

woraus sofort

$$c_1 = -1 \quad \text{und} \quad c_2 = 2$$

folgt. Die Partialbruchzerlegung von  $\bar{f}(s)$  lautet somit

$$\bar{f}(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}$$

und unter Anwendung von (2.6) findet man die zugehörige Zeitfunktion

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{f}(s) \} = -e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Man beachte, dass der zweite Weg zur Bestimmung der Konstanten auch durch die Relation

$$(s+1)\bar{f}(s) = \frac{s}{(s+2)} = c_1 + c_2 \frac{(s+1)}{(s+2)}$$

beschrieben wird, d.h. für  $s = -1$  ergibt sich

$$-1 = c_1.$$

Analog ergibt sich aus

$$(s+2)\bar{f}(s) = \frac{s}{(s+1)} = c_1 \frac{(s+2)}{(s+1)} + c_2$$

für  $s = -2$  die Konstante

$$2 = c_2.$$

■

Die Erkenntnisse aus obigem Beispiel können auf die allgemeine Darstellung (2.33) übertragen werden, es gilt

$$c_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) \bar{f}(s). \quad (2.34)$$

Im Falle komplexer Werte  $p_i$  ergeben sich im Allgemeinen auch komplexe Konstanten  $c_i$ . Dies wird durch die beiden folgenden Beispiele verdeutlicht.

**B** Gegeben sei die Laplace-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} \quad \text{d.h.} \quad p_1 = 0, \quad p_2 = j, \quad p_3 = -j.$$

Für die Partialbruchzerlegung wird wieder der Ansatz

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s-j} + \frac{c_3}{s+j}$$

gewählt, unter Anwendung von (2.34) ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 1} = 1, \\ c_2 &= \lim_{s \rightarrow j} \frac{1}{s(s+j)} = \frac{1}{j(2j)} = -\frac{1}{2}, \\ c_3 &= \lim_{s \rightarrow -j} \frac{1}{s(s-j)} = \frac{1}{-j(-2j)} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-j} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+j}$$

und weiter

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{jt} - \frac{1}{2}e^{-jt} = 1 - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}j\sin t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}j\sin t = 1 - \cos t.$$

Man beachte, dass aus der Tatsache  $p_3 = p_2^*$  auch direkt gefolgert werden kann, dass  $c_3 = c_2^*$ . Damit kann der Aufwand für die Berechnung der gesuchten Koeffizienten reduziert werden. ■

Das folgende Beispiel zeigt, dass komplexe Koeffizienten die Rücktransformation durchaus erschweren können.

**B** Gegeben sei die Laplace-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} \quad \text{d.h.} \quad p_1 = -1, \quad p_2 = j, \quad p_3 = -j.$$

Für die Partialbruchzerlegung wird der Ansatz

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s-j} + \frac{c_3}{s+j}$$

gewählt, unter Anwendung von (2.34) ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{2}, \\ c_2 &= \lim_{s \rightarrow j} \frac{1}{(s+1)(s+j)} = \frac{1}{(j+1)(2j)} = -\frac{1}{4}(1+j), \quad c_3 = c_2^* = -\frac{1}{4}(1-j) \end{aligned}$$

d.h.

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{4}(1+j) \frac{1}{(s-j)} - \frac{1}{4}(1-j) \frac{1}{(s+j)}.$$

Für die zugehörige Zeitfunktion gilt dann

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{4}(1+j)e^{jt} - \frac{1}{4}(1-j)e^{-jt} = \dots = \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin t - \cos t).$$

Komplexe Konstanten  $c_i$  können, wenn erforderlich, umgangen werden, wenn die Partialbruchzerlegung für komplexe Nullstellen  $p_i$  etwas modifiziert wird. Die Vorgangsweise wird am folgenden Beispiel erläutert.

**B** Gegeben sei wieder die Laplace-Transformierte

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} \quad \text{d.h.} \quad p_1 = -1, p_2 = j, p_3 = -j.$$

Für die Partialbruchzerlegung wird - im Gegensatz zum vorigen Beispiel - der Ansatz

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2 + s c_3}{s^2 + 1}$$

gewählt. Bringt man nun die rechte Seite auf gleichen Nenner, so ergibt sich

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{c_1(s^2+1) + (c_2 + s c_3)(s+1)}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{s^2(c_1 + c_3) + s(c_2 + c_3) + (c_1 + c_2)}{(s+1)(s^2+1)}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$c_1 + c_3 = 0 \quad \text{und} \quad c_2 + c_3 = 0 \quad \text{und} \quad c_1 + c_2 = 1,$$

deren Auflösung ergibt die reellen(!) Koeffizienten

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad c_3 = -\frac{1}{2},$$

d.h.

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s^2+1)} - \frac{1}{2} \frac{s}{(s^2+1)}.$$

Die zugehörige Zeitfunktion lautet somit

$$f(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin t - \cos t).$$

■

### Fall 2: $\nu(s)$ besitzt mehrfache Nullstellen

Im Falle mehrfacher Nullstellen von  $\nu(s)$  muss der Ansatz für die Partialbruchzerlegung modifiziert werden. Die entsprechende Vorgangsweise wird im folgenden Beispiel demonstriert.

**B** Gegeben sei eine Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}, \quad \text{d.h.} \quad p_1 = 0, p_2 = p_3 = -1.$$

Die Partialbruchzerlegung wird als

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{(s+1)^2}$$

angesetzt. Natürlich können die Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  wieder über einen Koeffizientenvergleich ermittelt werden. Analog zu Fall 1 soll aber auch hier der zweite Weg zur Bestimmung der Konstanten erläutert werden. Da  $s = p_1$  eine *einfache* Nullstelle von  $\nu(s)$  ist, kann die Konstante  $c_1$  gemäß (2.34) ermittelt werden, d.h.

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{f}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)^2} = 1.$$

Zur Ermittlung der beiden noch fehlenden Konstanten wird  $\bar{f}(s)$  mit  $(s+1)^2$  multipliziert, also

$$(s+1)^2 \bar{f}(s) = \frac{1}{s} = c_1 \frac{(s+1)^2}{s} + c_2(s+1) + c_3.$$

Offensichtlich kann nun  $c_3$  ermittelt werden, indem  $s = -1$  gesetzt wird, d.h.

$$s = -1 : \quad -1 = c_3.$$

Die Bestimmung von  $c_2$  kann bewerkstelligt werden, indem die gesamte Gleichung

$$(s+1)^2 \bar{f}(s) = \frac{1}{s} = c_1 \frac{(s+1)^2}{s} + c_2(s+1) + c_3$$

nach  $s$  abgeleitet wird, d.h.

$$\frac{d}{ds} [(s+1)^2 \bar{f}(s)] = \frac{d}{ds} \left[ \frac{c_1(s+1)^2}{s} + c_2(s+1) + c_3 \right] = c_1 \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s+1)^2}{s} \right] + c_2 \frac{d}{ds} (s+1).$$

Offensichtlich gilt für die linke Seite der obigen Relation

$$\frac{d}{ds} [(s+1)^2 \bar{f}(s)] = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{s^2},$$

für die rechte Seite erhält man

$$c_1 \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s+1)^2}{s} \right] + c_2 \frac{d}{ds} (s+1) + \frac{dc_3}{ds} = c_1 \frac{2(s+1)s - (s+1)^2}{s^2} + c_2.$$

Man erhält somit die Gleichung

$$-\frac{1}{s^2} = c_1 \frac{2(s+1)s - (s+1)^2}{s^2} + c_2.$$

Wenn man nun in obiger Gleichung  $s = -1$  setzt, so wird der Sinn der durchgeführten Manipulationen klar, denn - ähnlich wie bei der Ermittlung der anderen Konstanten - es verschwindet der mit  $c_1$  multiplizierte Ausdruck und man erhält

$$-1 = c_2.$$

Man beachte, dass die Ermittlung von  $c_2$  kompakt auch als

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [(s+1)^2 \bar{f}(s)] = -1$$

angeschrieben werden kann. Die Partialbruchzerlegung von  $\bar{f}(s)$  lautet somit

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

und für die zugehörige Zeitfunktion findet man nach Anwendung von (2.6), (2.14) und (2.9)

$$f(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

■

Analog zu Fall 1 können die im letzten Beispiel gefundenen Ergebnisse verallgemeinert werden. Besitzt nämlich das Polynom  $\nu(s)$  eine  $q$ -fache Nullstelle<sup>7</sup> bei  $s = p_i$ , so können die zur Partialbruchzerlegung

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \dots + \frac{c_i}{s-p_i} + \frac{c_{i+1}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{c_{i+q-1}}{(s-p_i)^q} + \dots$$

benötigten Konstanten  $c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+q-1}$  über die Relationen

$$\begin{aligned} c_i &= \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} [(s-p_i)^q \bar{f}(s)] \\ c_{i+1} &= \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{d^{q-2}}{ds^{q-2}} [(s-p_i)^q \bar{f}(s)] \\ &\vdots \\ c_{i+q-1} &= \lim_{s \rightarrow p_i} (s-p_i)^q \bar{f}(s) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ermittelt werden. Die Anwendung dieser Formeln wird im folgenden Beispiel demonstriert.

**B** Gegeben sei die Funktion

$$\bar{f}(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s-1)^2} \quad \text{d.h.} \quad n_1 = -2, \quad p_1 = p_2 = -1, \quad p_3 = p_4 = +1.$$

Für die Partialbruchzerlegung gilt

$$\bar{f}(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s-1} + \frac{c_4}{(s-1)^2}.$$

Die Anwendung von (2.35) liefert

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+2}{(s-1)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow -1} -\frac{s+5}{(s-1)^3} = \frac{1}{2}, \\ c_2 &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+2}{(s-1)^2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

<sup>7</sup>d.h.  $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+q-1}$

sowie

$$\begin{aligned} c_3 &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+2}{(s+1)^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 1} -\frac{s+3}{(s+1)^3} = -\frac{1}{2}, \\ c_4 &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s+2}{(s+1)^2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Partialbruchzerlegung

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \frac{1}{(s-1)^2}$$

und für die zugehörige Zeitfunktion gilt

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}te^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{4}te^t.$$

■

### Herleitung von Anfangs- und Endwertsatz

Sei  $\bar{f}(s)$  eine gebrochen rationale Funktion der Form (2.30). Weiters wird vereinfachend vorausgesetzt, dass  $\mu(s)$  und  $\nu(s)$  teilerfremd sind und das Nennpolynom  $\nu(s)$  lauter voneinander verschiedene Nullstellen besitzt<sup>8</sup>. Dann kann  $\bar{f}(s)$  in der Form (2.33) angeschrieben werden. Für die zugehörige Zeitfunktion gilt dann

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}. \quad (2.36)$$

Für  $t = 0$  erhält man den Anfangswert

$$f(0) = \sum_{i=1}^n c_i.$$

Dieses Ergebnis kann auch direkt aus  $\bar{f}(s)$  ermittelt werden. Hierzu wird zunächst  $\bar{f}(s)$  mit  $s$  multipliziert, d.h.

$$s \bar{f}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{s c_i}{s - p_i}. \quad (2.37)$$

Lässt man nun  $s$  gegen unendlich streben, so erhält man nach einmaliger Anwendung der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{f}(s) = \sum_{i=1}^n c_i = f(0),$$

was dem Anfangswertsatz (2.27) entspricht.

<sup>8</sup>die Beweise für mehrfache Nennernullstellen können analog durchgeführt werden, erfordern aber wesentlich mehr Schreibaarbeit.

Auf analoge Weise lässt sich der Endwertsatz (2.28) herleiten. Aus (2.36) ist zu erkennen, dass der Grenzwert  $f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  *nicht* existiert, wenn das Nennerpolynom  $\nu(s)$  Nullstellen mit positivem Realteil besitzt. Wenn  $\bar{f}(s)$  lauter Nennernullstellen mit negativem Realteil besitzt (Fall 1), dann folgt aus (2.36) unmittelbar  $f_\infty = 0$ . Wenn es außer den Nennernullstellen mit negativem Realteil noch *eine* Nennernullstelle bei  $s = p_1 = 0$  gibt (Fall 2), so gilt  $f_\infty = c_1$ . In beiden Fällen besitzt das Nennerpolynom von

$$\bar{g}(s) := s \bar{f}(s) = \frac{\kappa(s)}{\lambda(s)}, \quad \text{wobei } \kappa(s), \lambda(s) \dots \text{ teilerfremd}$$

ausschließlich (einfache) Nullstellen mit negativen Realteilen,  $\lambda(s)$  ist also ein Hurwitzpolynom.

**B** Gegeben seien die Laplace-Transformierten

$$\bar{f}_1(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \quad (\text{Fall 1}) \quad \text{und} \quad \bar{f}_2(s) = \frac{s-1}{s(s+1)} \quad (\text{Fall 2}).$$

Daraus folgen die Funktionen

$$\bar{g}_1(s) = s \bar{f}_1(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)(s+2)} \quad \text{und} \quad \bar{g}_2(s) = s \bar{f}_2(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

■

Wie aus obigem Beispiel zu erkennen ist, besitzt  $\bar{g}(s)$  im ersten Fall mindestens eine Zählernullstelle bei  $s = 0$ , d.h. es gilt  $\lim_{s \rightarrow 0} \bar{g}(s) = 0 = f_\infty$ . Im zweiten Fall gilt nach (2.34)  $\lim_{s \rightarrow 0} \bar{g}(s) = c_1 = f_\infty$ .

## 2.4 Anwendung der Laplace-Transformation

### 2.4.1 Lösung von Differentialgleichungen

Die Laplace-Transformation kann dazu verwendet werden, auf äußerst geradlinige Art und Weise gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Zunächst werden die zu lösenden Differentialgleichungen unter Anwendung der beschriebenen Sätze der Laplace-Transformation in den Bildbereich transformiert. Danach wird durch Umformungen im Bildbereich die Laplace-Transformierte der gesuchten Zeitfunktion berechnet. Schließlich erfolgt die Rücktransformation in den Zeitbereich.

**B** Gesucht ist die Zeitfunktion  $f(t)$ , die der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + f = 0$$

genügt und die Anfangswerte

$$f_0 := f(0) \quad \text{und} \quad \dot{f}_0 := \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0}$$

besitzt. Zunächst wird die Differentialgleichung mit Hilfe von (2.20) in den Bildbereich transformiert, d.h.

$$s^2 \bar{f}(s) - s f_0 - \dot{f}_0 + \bar{f}(s) = 0.$$

Daraus folgt nach einigen Umformungen

$$\bar{f}(s) = \frac{s f_0}{s^2 + 1} + \frac{\dot{f}_0}{s^2 + 1}.$$

Der letzte Schritt ist die Rücktransformation in den Zeitbereich. Im vorliegenden Fall kann auf die Korrespondenzen (2.8) zurückgegriffen werden, mit ihrer Hilfe findet man mühelos die gesuchte Lösung

$$f(t) = f_0 \cos t + \dot{f}_0 \sin t. \quad \blacksquare$$

Im folgenden Beispiel wird eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst. Es stellt eine einfache Erweiterung des vorangegangenen Beispiels dar.

**B** Gesucht ist die Zeitfunktion  $f(t)$ , die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + f = \cos t$$

genügt und die Anfangswerte

$$f_0 := f(0) \quad \text{und} \quad \dot{f}_0 := \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0}$$

besitzt. Zunächst wird wieder die Differentialgleichung in den Bildbereich transformiert, d.h.

$$s^2 \bar{f}(s) - s f_0 - \dot{f}_0 + \bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Danach wird  $\bar{f}(s)$  berechnet, d.h.

$$\bar{f}(s) = \frac{s f_0}{s^2 + 1} + \frac{\dot{f}_0}{s^2 + 1} + \frac{s}{(s^2 + 1)^2}.$$

Der letzte Schritt ist die Rücktransformation in den Zeitbereich. Mit Hilfe von (2.23) ergibt sich die gesuchte Lösung

$$f(t) = f_0 \cos t + \dot{f}_0 \sin t + \frac{1}{2} t \sin t. \quad \blacksquare$$

### 2.4.2 Gekoppelte Differentialgleichungen

Die angewandten Methoden lassen sich auch zur Lösung von Systemen von Differentialgleichungen einsetzen. Wie sich später zeigen wird, erweist sich hier die Einführung der Vektor- bzw. Matrixschreibweise als besonders effizient.

**B** Gesucht sind die beiden Zeitfunktion  $f_1(t)$  und  $f_2(t)$ , die den gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{df_1}{dt} = f_1 + f_2 \quad \text{und} \quad \frac{df_2}{dt} = -f_2 \quad (2.38)$$

genügen und die Anfangswerte

$$f_{1,0} := f_1(t=0) \quad \text{und} \quad f_{2,0} := f_2(t=0)$$

besitzen. Die Anwendung der Laplace-Transformation ergibt

$$s\bar{f}_1(s) - f_{1,0} = \bar{f}_1(s) + \bar{f}_2(s) \quad \text{und} \quad s\bar{f}_2(s) - f_{2,0} = -\bar{f}_2(s).$$

Nach einigen Umformungen findet man

$$\bar{f}_1(s) = \frac{f_{1,0}}{s-1} + \frac{f_{2,0}}{(s-1)(s+1)} \quad \text{und} \quad \bar{f}_2(s) = \frac{f_{2,0}}{s+1}.$$

Für die Rücktransformation in den Zeitbereich muss  $\bar{f}_1(s)$  in Partialbrüche zerlegt werden, also

$$\bar{f}_1(s) = \frac{f_{1,0}}{s-1} + \frac{f_{2,0}}{2} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right).$$

Daraus resultieren die beiden gesuchten Funktionen

$$f_1(t) = \left( f_{1,0} + \frac{f_{2,0}}{2} \right) e^t - \frac{f_{2,0}}{2} e^{-t} \quad \text{und} \quad f_2(t) = f_{2,0} e^{-t}.$$

■

### 2.4.3 Anwendung auf Vektoren und Matrizen

Die Laplace-Transformation kann auch im Falle vektorieller Zeitfunktionen eingesetzt werden. Dazu ist die Transformation *elementweise* anzuwenden, d.h.

$$\mathcal{L}\{\mathbf{f}(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{f_1(t)\} \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{f_n(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(s) \\ \bar{f}_2(s) \\ \vdots \\ \bar{f}_n(s) \end{bmatrix} =: \bar{\mathbf{f}}(s)$$

**B** Die Laplace-Transformierte  $\bar{\mathbf{f}}(s)$  von

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ t \\ e^t \end{bmatrix}$$

kann mit den Korrespondenzen (2.8), (2.14) und (2.6) berechnet werden, es gilt

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s - 1} \end{bmatrix}.$$

■

Ganz analog kann mit zeitabhängigen Matrizen  $\mathbf{F}(t)$  verfahren werden, d.h.

$$\mathcal{L}\{\mathbf{F}(t)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{f_{11}(t)\} & \dots & \mathcal{L}\{f_{1m}(t)\} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{L}\{f_{n1}(t)\} & \dots & \mathcal{L}\{f_{nm}(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_{11}(s) & \dots & \bar{f}_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{f}_{n1}(s) & \dots & \bar{f}_{nm}(s) \end{bmatrix} =: \bar{\mathbf{F}}(s).$$

**B** Die Laplace-Transformierte von

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} e^t & t \\ e^{-t} & \sin t \\ \cos t & e^{2t} \end{bmatrix}$$

lautet

$$\bar{\mathbf{F}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}.$$

■

Die Anwendung der Laplace-Transformation auf Vektoren bzw. Matrizen erlaubt die effiziente Lösung von Differentialgleichungssystemen.

**B** Es wird wieder die Aufgabenstellung (2.38) betrachtet, diesmal soll allerdings Vektor- bzw. Matrixnotation verwendet werden. Zunächst wird der Vektor  $\mathbf{f}(t)$  und die zugehörige Laplace-Transformierte eingeführt, d.h.

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad \circ \bullet \quad \bar{\mathbf{f}}(s) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(s) \\ \bar{f}_2(s) \end{bmatrix}.$$

Das Differentialgleichungssystem (2.38) kann nun in der Form

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{f}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}_0 := \mathbf{f}(t=0) = \begin{bmatrix} f_{1,0} \\ f_{2,0} \end{bmatrix}$$

angeschrieben werden. Die Anwendung von (2.18) ergibt

$$s \bar{\mathbf{f}}(s) - \mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(s),$$

wobei zu beachten ist, dass

$$s \bar{\mathbf{f}}(s) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(s)$$

gilt. Damit ergibt sich

$$\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \bar{\mathbf{f}}(s) = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}(s) = \mathbf{f}_0,$$

und der Vektor  $\bar{\mathbf{f}}(s)$  kann gemäß

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}(s) &= \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{f}_0 = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \mathbf{f}_0 = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)} & \frac{1}{(s-1)(s+1)} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)} \end{bmatrix} \mathbf{f}_0 \end{aligned}$$

berechnet werden. Nach einer Partialbruchzerlegung findet man

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \mathbf{f}_0.$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich liefert den gesuchten Vektor

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{f}_0.$$

■

## 2.5 Korrespondenztabelle für reellwertige Funktionen

$f(t)$		$\bar{f}(s)$
$\delta(t)$		1
$\sigma(t)$		$\frac{1}{s}$
$t$		$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^2}{2}$		$\frac{1}{s^3}$
$\frac{t^n}{n!}, n \geq 0$		$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$		$\frac{1}{s - \alpha}$
$te^{\alpha t}$		$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$\frac{t^2}{2}e^{\alpha t}$		$\frac{1}{(s - \alpha)^3}$
$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}, n \geq 0$		$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$\cos \omega t$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} \cos \omega t$		$\frac{(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} \sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$
$t \cos \omega t$		$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$		$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$te^{\alpha t} \cos \omega t$		$\frac{(s - \alpha)^2 - \omega^2}{[(s - \alpha)^2 + \omega^2]^2}$
$te^{\alpha t} \sin \omega t$		$\frac{2\omega(s - \alpha)}{[(s - \alpha)^2 + \omega^2]^2}$
$\cosh \alpha t$		$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$
$\sinh \alpha t$		$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$

# Kapitel 3

## Zeitkontinuierliche Systeme

### 3.1 Einführung

In diesem Kapitel werden lineare, zeitinvariante Eingrößensysteme der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (3.1)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d u \quad (3.2)$$

mit dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0 = 0)$$

analysiert. Mit  $\mathbf{x}$  wird der  $n$ -dimensionale Zustandsvektor bezeichnet,  $u$  ist die Eingangsgröße und  $y$  die Ausgangsgröße des Systems. Die Zeitinvarianz von (3.1) impliziert, dass die Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , der Eingangsvektor  $\mathbf{b}$ , der Ausgangsvektor  $\mathbf{c}$  und der Durchgriff  $d$  konstante Größen passender Dimensionen sind.

### 3.2 Lösung der Systemgleichungen

Da es sich bei den Zustandsgleichungen (3.1) um lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten handelt, kann die Laplace-Transformation eingesetzt werden. Wendet man (2.18) auf (3.1) an, so erhält man

$$s\bar{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

wobei

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} \quad \text{und} \quad \bar{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}\bar{u}(s),$$

wobei  $\mathbf{E}$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix repräsentiert. Nach einer Multiplikation mit  $(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$  von links findet man

$$\bar{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\bar{u}(s). \quad (3.3)$$

Definiert man die  $n \times n$  - Matrix

$$\bar{\phi}(s) := (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \quad \text{d.h.} \quad \phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \}, \quad (3.4)$$

so gilt - nach Anwendung des Faltungssatzes (2.13) - für die Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \phi(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Der Lösungsvektor  $\mathbf{x}(t)$  repräsentiert das zeitliche Verhalten des Systems (3.1) als Reaktion auf einen Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $u(t)$ . Das Systemverhalten (3.5) kann in zwei additive Anteile zerlegt werden. Der erste Anteil rührt von der „Vorgeschichte“ des Systems her, also vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$ , man spricht von der **freien Lösung**  $\mathbf{x}_{frei}(t)$ . Im Gegensatz dazu wird der zweite Anteil durch den Verlauf der Eingangsgröße  $u(\tau)$  im Intervall  $0 \leq \tau \leq t$  geprägt, man spricht von der **erzwungenen Lösung**  $\mathbf{x}_{erzw}(t)$ . Diese Erkenntnis kann man - unter Verwendung der in (1.7) eingeführten Notation - folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathbf{x} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u \end{pmatrix} = \mathbf{x}_{frei} + \mathbf{x}_{erzw} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Aufgrund der Struktur von (3.5) ist unmittelbar einzusehen, dass auch die restlichen Eigenschaften der Linearitätsbedingung (1.9) erfüllt sind.

### 3.2.1 Freie Lösung

Unter der freien Lösung eines Systems versteht man diejenige Lösung  $\mathbf{x}(t)$ , die sich ergibt, wenn das System *ausschließlich* durch den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  angeregt wird. Somit ist hier das autonome System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.7)$$

zu untersuchen. Gemäß (3.5) gilt für die Lösung dann

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0. \quad (3.8)$$

Die Matrix  $\phi(t)$  wird **Transitionsmatrix**<sup>1</sup> genannt, sie beschreibt den Übergang des Zustandsvektors von seinem Anfangswert zu seinem Wert zum Zeitpunkt  $t$ . Ihre Berechnung kann mit Hilfe von Formel (3.4) erfolgen.

**B** Für das autonome System zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

<sup>1</sup>lat. *transire* = übergehen

ergibt sich die Laplace-Transformierte der Transitionsmatrix gemäß (3.4) zu

$$\bar{\phi}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s(s-3)} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}.$$

Eine Partialbruchzerlegung und anschließende Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt

$$\phi(t) = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{s} + \frac{1}{s-3} & -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-3} \\ -\frac{2}{s} + \frac{2}{s-3} & \frac{1}{s} + \frac{2}{s-3} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Für den zeitlichen Verlauf des Zustandsvektors gilt somit

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \right) x_{1,0} + \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} \right) x_{2,0} \\ \left( -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \right) x_{1,0} + \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} \right) x_{2,0} \end{bmatrix}.$$

■

### 3.2.2 Erzwungene Lösung

Die erzwungene Lösung oder Bewegung eines Systems ist diejenige Lösung  $\mathbf{x}(t)$ , die sich ergibt, wenn das System bei *verschwindendem* Anfangszustand<sup>2</sup>  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  durch die Eingangsgröße  $u(t)$  angeregt wird. Nach (3.5) gilt unter diesen Umständen

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \phi(t-\tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau. \quad (3.9)$$

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dx}{dt} = -x + u$$

eines linearen, zeitinvarianten Systems erster Ordnung mit der Eingangsgröße  $u$ . Mit Hilfe von (3.9) findet man mit  $\phi(t) = e^{-t}$  für die erzwungene Lösung

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot 1 \cdot u(\tau) d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} u(\tau) d\tau.$$

Wählt man beispielsweise als Eingangsgröße einen Einheitssprung, d.h.  $u(t) = \sigma(t)$ , so gilt

$$x(t) = 1 - e^{-t}.$$

<sup>2</sup>man sagt: "Das System befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe"

Die Ausgangsgröße kann mittels Relation (3.2) berechnet werden, im Bildbereich gilt mit (3.3)

$$\bar{y}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \bar{u}(s), \quad (3.10)$$

bzw. unter Verwendung von (3.5) im Zeitbereich

$$y(t) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{c}^T \boldsymbol{\phi}(t - \tau) \mathbf{b} u(\tau) d\tau + d u(t). \quad (3.11)$$

Analog zu (3.5) kann die Ausgangsgröße also in einen Anteil, der vom Anfangszustand herrührt und einen Anteil, der vom Verlauf der Eingangsgröße geprägt wird, zerlegt werden. Unter Verwendung der Notation (1.10) kann man schreiben

$$y = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u \end{pmatrix} = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Wie man sich überzeugen kann, sind auch die weiteren Eigenschaften von (1.11) gegeben.

Für die Ausgangsgröße folgt unter der Annahme  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  aus (3.10) im Bildbereich unmittelbar

$$\bar{y}(s) = [\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d] \bar{u}(s). \quad (3.13)$$

Der Ausdruck

$$G(s) := \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (3.14)$$

ist die so genannte **Übertragungsfunktion** des Systems. Sie beschreibt das Übertragungsverhalten eines linearen, zeitinvarianten Systems im Bildbereich.

**B** Gegeben sei das Zustandsmodell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1] \mathbf{x} + 2u.$$

Für die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des Systems gilt dann

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 = \frac{2s^2 - 8s - 3}{s^2 - 5s - 2}.$$

### 3.3 Linearisierung um eine Ruhelage

In vielen Fällen führt die mathematische Modellierung von Systemen auf nichtlineare Modelle der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad (3.15)$$

$$y = g(\mathbf{x}, u). \quad (3.16)$$

Eine naheliegende Idee besteht darin, das Verhalten des nichtlinearen Systems durch ein lineares System zu approximieren. Eine solche Approximation wird im Allgemeinen nicht global, d.h. im gesamten Zustandsraum gültig sein. Eine in der Praxis bewährte Methode ist die so genannte **Linearisierung um einen Arbeitspunkt**. Ein Arbeitspunkt des nichtlinearen Systems ist hier dadurch charakterisiert, dass alle Systemgrößen, also Eingangsgröße, Zustandsgrößen und damit auch die Ausgangsgröße konstante Werte annehmen, d.h.

$$u(t) = u_R = \text{konst.}, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_R = \text{konst.}$$

Das System befindet sich also in einem „Gleichgewichtszustand“, der auch **Ruhelage** genannt wird. Die konstanten Systemgrößen müssen die aus (3.15) resultierenden Bedingungen

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) \quad (3.17)$$

erfüllen, für die zugehörige Ausgangsgröße gilt dann

$$y_R = g(\mathbf{x}_R, u_R). \quad (3.18)$$

Da das Systemverhalten „in der Nähe“ des Arbeitspunktes beschrieben werden soll, ist es zweckmäßig, mit Abweichungen aus der betrachteten Ruhelage zu operieren. Aus diesem Grund setzt man

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \quad u = u_R + \Delta u, \quad (3.19)$$

wobei  $\Delta\mathbf{x}$ ,  $\Delta u$  Auslenkungen aus der Ruhelage repräsentieren. Damit lautet die Systembeschreibung (3.15) nun

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, u_R + \Delta u).$$

Mit dem Ziel der Linearisierung um den Arbeitspunkt wird die nichtlineare Funktion  $\mathbf{f}$  in eine Taylor-Reihe<sup>3</sup> entwickelt, d.h.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, u_R + \Delta u) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u + \text{T.h.O.}$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung (T.h.O.) und unter Berücksichtigung von (3.17) erhält man somit das vereinfachte System

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u. \quad (3.20)$$

Dabei gilt

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

<sup>3</sup>benannt nach dem britischen Mathematiker Brook Taylor (1685 - 1731)

wobei die  $n \times n$  Matrix  $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right)$  die so genannte Jacobi<sup>4</sup>-Matrix ist. Für die Ausgangsgröße  $y$  folgt auf analoge Weise nach einer Taylor-Reihenentwicklung, also

$$y = g(\mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}, u_R + \Delta u) = g(\mathbf{x}_R, u_R) + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u + \text{T.h.O.},$$

nach Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung und unter Berücksichtigung von (3.18)

$$\Delta y = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \Delta u. \quad (3.22)$$

Man erkennt, dass es sich bei (3.20), (3.22) um ein lineares, zeitinvariantes System der Form (1.13) handelt, wobei

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R}, \quad \mathbf{b} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R}, \quad \mathbf{c}^T = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R} \quad \text{und} \quad d = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}_R, u_R}$$

gilt. Dieses System approximiert das Verhalten des nichtlinearen Systems (3.15) in einer Umgebung der betrachteten Ruhelage.

**B** Es wird wieder das in Bild (1.6) dargestellte Pendel untersucht. Wie bereits gezeigt, lautet das zugehörige mathematische Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{ml^2} x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Die Ruhelagen des (autonomen) Systems sind durch

$$x_{2,R} = 0 \quad \text{und} \quad \sin x_{1,R} = 0$$

charakterisiert. Für

$$x_{1,R} = \pm 2i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

befindet sich das Pendel in der „hängenden“ Ruhelage, während

$$x_{1,R} = \pm(2i + 1)\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

die „aufrechte“ Ruhelage beschreibt. Für die Linearisierung um diese Arbeitspunkte berechnet man die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix},$$

<sup>4</sup>benannt nach dem deutschen Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851)

d.h. das linearisierte mathematische Modell lautet

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{ml^2} \end{array} \right] \Bigg|_{\mathbf{x}_R} \Delta\mathbf{x}.$$

Daraus folgen unmittelbar die linearisierten Systembeschreibungen

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{array} \right] \Delta\mathbf{x} \quad \text{„hängende“ Position} \qquad \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{array} \right] \Delta\mathbf{x} \quad \text{„aufrechte“ Position}$$

In Bild 3.1 sind die Verläufe des Pendelwinkels von nichtlinearem und linearisiertem Modell dargestellt. Als Anfangsauslenkungen wurde  $x_{1,0} = 0.35$  rad ( $=20^\circ$ ) bzw.  $x_{1,0} = 1.05$  rad ( $=60^\circ$ ) gewählt, das Pendel befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Stillstand, d.h.  $x_{2,0} = 0$  rad s $^{-1}$ . ■

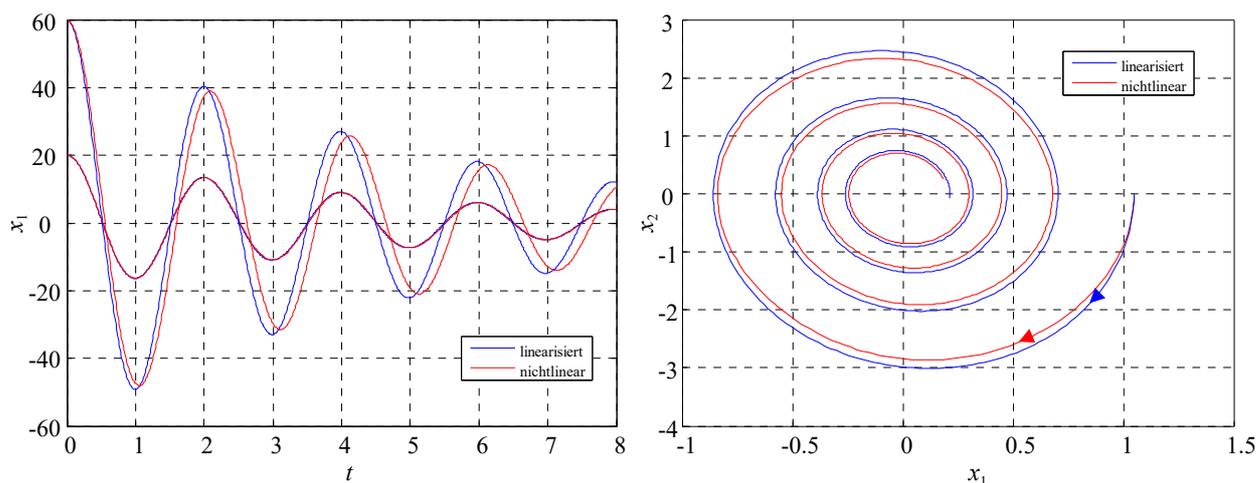


Bild 3.1: Gegenüberstellung des linearisierten Pendelmodells und des nichtlinearen Modells (rot). linkes Bild: Pendelwinkel über Zeit rechtes Bild: Verlauf der Trajektorien

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\frac{dx}{dt} = -(x-2)^2 + 9u^2, \quad y = x^2 + u$$

eines Systems mit der Eingangsgröße  $u$ , der Ausgangsgröße  $y$  und der Zustandsgröße  $x$ . Ruhelagen müssen die Bedingung  $(x_R - 2)^2 = 9u_R^2$  erfüllen. Für einen vorgegebenen Wert  $u_R = 1$  ergeben sich somit die beiden Ruhelagen

$$x_{R,1} = 5 \quad \text{und} \quad x_{R,2} = -1.$$

Die zugehörigen Ausgangsgrößen nehmen die Werte  $y_{R,1} = 26$  bzw.  $y_{R,2} = 2$  an. Mit  $f(x, u) = -(x - 2)^2 + 9u^2$  und  $g(x, u) = x^2 + u$  folgt unmittelbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 4, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 18u, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 1.$$

Für die (willkürlich gewählte) erste Ruhelage folgt somit die linearisierte Systembeschreibung

$$\frac{d\Delta x}{dt} = -6\Delta x + 18\Delta u, \quad \Delta y = 10\Delta x + \Delta u.$$

■

### 3.4 Übertragungsfunktion

Die **Übertragungsfunktion**  $G(s)$  beschreibt das Übertragungsverhalten von linearen, zeitinvarianten Systemen im Bildbereich. Sie ist definiert als der Quotient der Laplace-Transformierten von Ausgangs- und Eingangsgröße, d.h.

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}. \quad (3.23)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe befindet. Im Rahmen dieses Skriptums wird davon ausgegangen, dass die Übertragungsfunktion stets eine gebrochen rationale Funktion ist. Sie kann somit als Quotient zweier Polynome  $\beta(s)$  und  $\alpha(s)$  dargestellt werden, d.h.

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \quad (3.24)$$

wobei die Koeffizienten der Polynome  $\alpha(s)$  und  $\beta(s)$  als reell vorausgesetzt werden. Systeme, bei denen die Polynomgrade von Zähler- und Nennerpolynom der Bedingung

$$\text{Grad } \beta(s) \leq \text{Grad } \alpha(s) \quad (3.25)$$

genügen, nennt man **realisierbar**. Alle praktisch relevanten Systeme erfüllen die Realisierbarkeitsbedingung. Im Falle

$$\text{Grad } \beta(s) = \text{Grad } \alpha(s)$$

spricht man von einem **sprungfähigen System**. Sprunghafte Änderungen der Eingangsgröße  $u$  haben hier auch eine sprunghafte Änderung der Ausgangsgröße  $y$  zur Folge.

Für Systeme der Form (3.1), (3.2) kann die Übertragungsfunktion unter der Annahme  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  gemäß

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d \quad (3.26)$$

berechnet werden, vgl. (3.14). Aus dieser Berechnungsvorschrift kann unmittelbar gefolgert werden, dass  $G(s)$  eine gebrochen rationale Funktion ist und (3.25) gilt. Man beachte, dass das System genau dann sprungfähig ist, wenn für den Durchgriff  $d \neq 0$  gilt. Dann gibt es

nämlich eine direkte Verbindung zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße, siehe hierzu auch Bild 1.4.

In Strukturbildern wird eine Übertragungsfunktion  $G(s)$  üblicherweise durch einen Block, wie er in Bild 3.2 dargestellt ist, repräsentiert.

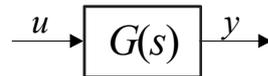


Bild 3.2: Blockdarstellung einer Übertragungsfunktion  $G(s)$

▣ Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)}.$$

Die **Sprungantwort** des Systems, d.h. seine Reaktion auf  $u(t) = \sigma(t)$  kann mittels

$$\bar{y}(s) = G(s) \bar{u}(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

berechnet werden. Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\bar{y}(s) = -\frac{1/2}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3/2}{s+2},$$

was im Zeitbereich der Funktion

$$y(t) = -\frac{1}{2} + 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

entspricht. ■

### 3.5 Deutung von $G(s)$ im Zeitbereich

Gemäß (3.23) gilt für den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße  $y$  nach Anwendung des Faltungssatzes

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) \bar{u}(s)\} = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.27)$$

wobei

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\}. \quad (3.28)$$

Die Ausgangsgröße  $y$  entspricht also dem Integral über die gewichtete Eingangsgröße  $u$ . Aus diesem Grund nennt man  $g(t)$  auch **Gewichtsfunktion**. Wählt man als Eingangsgröße des Systems einen Dirac-Impuls, also  $u(t) = \delta(t)$ , so gilt

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s) \mathcal{L} \{\delta(t)\}\} = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\} = g(t),$$

die Ausgangsgröße entspricht dann  $g(t)$ . Deshalb wird  $g(t)$  auch **Impulsantwort** des Systems genannt.

**B** Die Impulsantwort des Systems mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right)$$

lautet

$$g(t) = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}).$$

■

### 3.6 Pole und Nullstellen

Man beachte, dass in (3.24) die Polynome  $\alpha(s)$  und  $\beta(s)$  nicht notwendigerweise teilerfremd sind. Das bedeutet, dass unter Umständen Kürzungen durchgeführt werden können, wie das folgende Beispiel veranschaulicht.

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2}.$$

Gibt man  $G(s)$  in der faktorisierten Darstellung an, d.h.

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2},$$

so erkennt man, dass eine Kürzung möglich ist.

■

Geht man nun von einer teilerfremden Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)} \quad \text{mit} \quad \mu(s), \nu(s) \dots \text{teilerfremd} \quad (3.29)$$

aus, so sind diejenigen Werte von  $s$ , für die  $\mu(s) = 0$  gilt, die so genannten **Nullstellen** von  $G(s)$ . Die **Pole** oder **Polstellen** der Übertragungsfunktion sind durch  $\nu(s) = 0$  charakterisiert. In der *faktorisierten* Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad \text{mit} \quad m \leq n \quad (3.30)$$

ist  $s = n_i$  eine Nullstelle und  $s = p_k$  eine Polstelle von  $G(s)$ . Tritt der Faktor  $(s - n_i)$  bzw.  $(s - p_k)$  mehrfach auf, so besitzt das System eine mehrfache Nullstelle bzw. einen mehrfachen

Pol. Da die Koeffizienten der Polynome  $\mu(s)$  und  $\nu(s)$  reell sind, treten Pole bzw. Nullstellen reell und/oder paarweise konjugiert komplex auf. Aus (3.30) folgt unmittelbar.

$$G(s) = 0 \quad \text{für } s = n_i \quad \text{und} \quad |G(s)| \rightarrow \infty \quad \text{für } s \rightarrow p_k \quad (3.31)$$

**B** Die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - 0.5}{s^2 + 1}$$

besitzt eine Nullstelle bei  $s = 0.5$  und ein konjugiert komplexes Polpaar bei  $s = \pm j$ . In Bild 3.3 ist  $|G(s)|$  über der komplexen  $s$ -Ebene dargestellt. Die in (3.31) angeführten Eigenschaften sind deutlich zu erkennen. ■

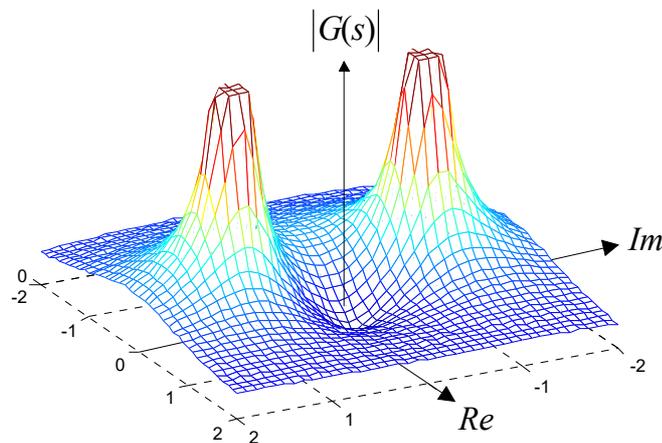


Bild 3.3: Graphische Darstellung von  $|G(s)|$  über der komplexen  $s$ -Ebene zur Illustration von Pol- und Nullstellen.

**B** Die faktorisierte Darstellung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s(s + 1)^2}$$

ist gegeben durch

$$G(s) = 2 \frac{(s + 1 - j)(s + 1 + j)}{s(s + 1)(s + 1)}$$

Daraus resultiert ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar an der Stelle

$$s = -1 \pm j,$$

ein reeller Pol bei

$$s = 0$$

sowie ein doppelter Pol an der Stelle

$$s = -1.$$

■

Man beachte, dass die Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  von (3.1) und die Pole der zugehörigen Übertragungsfunktion  $G(s)$  in enger Relation zueinander stehen. Die Eigenwerte sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0,$$

die Pole sind die Nullstellen des Nennerpolynoms der gekürzten(!) rationalen Funktion

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{1}{\Delta(s)} \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})_{adj} \mathbf{b} + d.$$

Daraus kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die Pole von  $G(s)$  eine Teilmenge der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  darstellen.

**B** Gegeben sei das mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u. \end{aligned}$$

Die zwei Eigenwerte lauten

$$s_1 = -1 \quad \text{und} \quad s_2 = -2.$$

Aus der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

ist zu erkennen, dass es einen Pol bei

$$s = -1$$

gibt.

■

### 3.6.1 PN-Plan

Die graphische Darstellung der Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene wird PN-Plan genannt. Hierbei werden Pole durch ein  $\mathbf{X}$  und Nullstellen durch ein  $\mathbf{O}$  symbolisiert.

**B** Gegeben sei das System

$$G(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 6s - 4}{s^5 - 4s^4 + 3s^3 + 14s^2 + 26s} = \frac{(s-2)(s^2 - 2s + 2)}{s(s^2 + 2s + 2)(s^2 - 6s + 13)} \quad (3.32)$$

mit

$$\text{Nullstellen} \quad \{2, 1 \pm j\}$$

$$\text{Pole} \quad \{0, -1 \pm j, 3 \pm j2\}$$

Der zugehörige PN-Plan ist in Bild 3.4 zu sehen. Man beachte, dass aufgrund der Symmetrie des PN-Plans prinzipiell die Darstellung des grau hinterlegten Bereiches ausreicht.

■

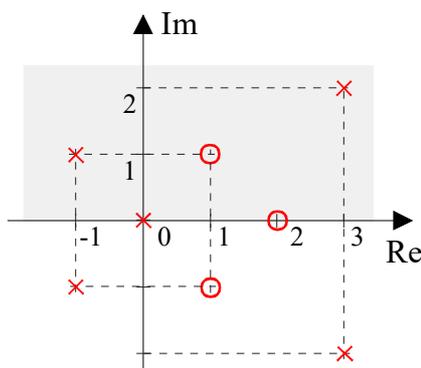


Bild 3.4: PN-Plan zu der Übertragungsfunktion (3.32)

### 3.7 BIBO-Stabilität

Ein lineares, zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  wird **BIBO-stabil** („bounded input - bounded output“) genannt, wenn es auf *jede* beschränkte Eingangsgröße  $u(t)$  mit einer beschränkten Ausgangsgröße  $y(t)$  reagiert, d.h.

$$|u(t)| \leq M < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq N < \infty \quad \forall t \geq 0. \quad (3.33)$$

Mit (3.27) gilt nun unter Annahme einer beschränkten Eingangsgröße

$$|y(t)| = \left| \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau \stackrel{(3.33)}{\leq} M \int_0^t |g(\tau)| d\tau.$$

Offensichtlich tritt der größtmögliche Wert von  $|y(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$  auf, d.h. zur Erfüllung von (3.33) muss

$$M \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq N$$

gelten. Das bedeutet, dass die Impulsantwort absolut integrierbar sein muss, d.h.

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty. \quad (3.34)$$

Man beachte, dass es sich bei (3.34) um eine notwendige und hinreichende Bedingung handelt!

**B** Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s - \kappa} \quad \text{mit} \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

die zugehörige Impulsantwort lautet

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{\kappa t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}.$$

Das Integral über den Absolutbetrag von  $g(t)$ , also

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt = \int_0^{\infty} |e^{\kappa t}| dt = \int_0^{\infty} e^{\kappa t} dt$$

existiert offensichtlich nur für negative Werte von  $\kappa$ . Daraus kann gefolgert werden, dass das betrachtete System genau dann BIBO-stabil ist, wenn sein Pol  $s = \kappa$  in der linken offenen Halbebene der komplexen  $s$ -Ebene liegt, d.h.  $\operatorname{Re}\{s\} < 0$ . ■

Die Erkenntnis aus obigem Beispiel kann auf den allgemeinen Fall ausgeweitet werden. Um dies zu zeigen wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Impulsantwort  $g(t)$  und der Übertragungsfunktion betrachtet, d.h.

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt.$$

Daraus kann folgende Abschätzung abgeleitet werden

$$|G(s)| = \left| \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |g(t)| |e^{-st}| dt.$$

Gilt  $\operatorname{Re}\{s\} \geq 0$ , so kann weiter geschrieben werden

$$|G(s)| \leq \int_0^{\infty} |g(t)| dt.$$

Das bedeutet, dass im Falle eines BIBO-stabilen Systems - (3.34) ist also erfüllt - der Ausdruck  $|G(s)|$  für  $\operatorname{Re}\{s\} \geq 0$  *endliche* Werte annimmt. Daraus kann mit Hilfe von (3.31) gefolgert werden, dass  $G(s)$  ausschließlich Pole in der linken, offenen komplexen Halbebene besitzt.

Ein System mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$  ist somit genau dann BIBO-stabil, wenn *alle* Pole von  $G(s)$  einen negativen Realteil besitzen. Das bedeutet, dass in der gekürzten Darstellung (3.29) das Nennerpolynom von  $G(s)$  ein Hurwitzpolynom sein muss.

**B** Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 4}{s(s + 1)(s + 2)}.$$

Das System ist nicht BIBO-stabil, da es einen Pol mit nicht-negativem Realteil besitzt. ■

**B** Gegeben sei ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)^2(s + 2)(s + 4)}.$$

Das System ist BIBO-stabil, da alle Pole von  $G(s)$  einen negativen Realteil besitzen. ■

### 3.8 Das Routh-Schema

Die asymptotische Stabilität erfordert es, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix einen negativen Realteil besitzen. Weiters ist ein Übertragungssystem genau dann BIBO-stabil, wenn seine Übertragungsfunktion ausschließlich Pole mit negativen Realteilen besitzen. Man beachte, dass die beiden Stabilitätskriterien die Kenntnis der Lage der Eigenwerte bzw. Pole *nicht* erfordern. Vielmehr ist zu überprüfen, ob das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix bzw. das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion ein Hurwitzpolynom ist. Hierfür gibt es eine Reihe von Verfahren, die ohne die explizite Berechnung der Polynomnullstellen auskommen. Exemplarisch wird an dieser Stelle das so genannte **Routh-Schema**<sup>5</sup> vorgestellt, wobei auf den Beweis verzichtet wird.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das zu untersuchende Polynom

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (3.35)$$

Eine notwendige Bedingung dafür, dass  $p(s)$  ein Hurwitzpolynom ist, besteht darin, dass kein Polynomkoeffizient verschwindet und alle Polynomkoeffizienten das gleiche Vorzeichen besitzen. Ist diese Bedingung verletzt, so ist  $p(s)$  sicher kein Hurwitzpolynom. Man beachte, dass für Polynome mit  $\text{Grad } p(s) \leq 2$  die angegebene Bedingung sogar *notwendig und hinreichend* ist.

**B** Gegeben seien die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 2s^4 + 2s^2 + s + 1, \\ p_2(s) &= s^5 + 3s^4 - 2s^3 + s^2 + 1, \\ p_3(s) &= 5s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 7s^3 + s^2 + 9s + 1, \\ p_4(s) &= -2s^2 - 2s - 1, \\ p_5(s) &= s^2 + 4s - 3, \\ p_6(s) &= s^2 + s + 1, \\ p_7(s) &= s + 8. \end{aligned}$$

Die Polynome  $p_1(s)$ ,  $p_2(s)$ ,  $p_5(s)$  erfüllen die angegebene notwendige Bedingung nicht, sie sind also keine Hurwitzpolynome. Das Polynom  $p_3(s)$  erfüllt die Bedingung, der Nachweis ob es sich um ein Hurwitzpolynom handelt, erfordert allerdings weitere Schritte (siehe weiter unten). Die Polynome  $p_4(s)$ ,  $p_6(s)$  und  $p_7(s)$  können direkt als Hurwitzpolynome klassifiziert werden, da sie die Bedingung erfüllen und einen Polynomgrad kleiner oder gleich 2 besitzen. ■

Zunächst werden beim Routh-Schema die Koeffizienten des Polynoms (3.35) in folgendem „Zick-Zack-Muster“ angeordnet

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & & \dots \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\ a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & & \dots \end{array}, \quad (3.36)$$

<sup>5</sup>benannt nach dem englischen Mathematiker Edward Routh (1831 - 1907)

wobei bei geradem Polynomgrad  $n$  die letzte Spalte mit einem Nullelement aufgefüllt bzw. bei ungeradem Polynomgrad eine Nullspalte hinzugefügt wird.

**B** Für das Polynom

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5,$$

ergibt sich nach (3.36)

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} \cdot$$

Hingegen ergibt sich für

$$p_2(s) = 6s^5 + 7s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 10s + 11$$

die Koeffizientenanzordnung

$$\begin{array}{cccc} 6 & 8 & 10 & 0 \\ 7 & 9 & 11 & 0 \end{array} \cdot$$

■

Ausgehend von der 2-zeiligen Anordnung (3.36) werden weitere Zeilen nach folgendem Schema berechnet bis insgesamt  $(n + 1)$  Zeilen vorliegen: Der Koeffizient in der  $k$ -ten Spalte einer neuen Zeile entspricht der zweireihigen Determinante aus den Elementen der ersten und  $(k + 1)$ -ten Spalte der beiden darüberliegenden Zeilen, geteilt durch das negative erste Element der darüberliegenden Zeile. Mit Hilfe des so entstehenden **Routh-Tableaus** kann nun entschieden werden, ob ein Hurwitzpolynom vorliegt:

Das Polynom (3.35) ist *genau dann* ein Hurwitzpolynom, wenn alle  $(n + 1)$  Elemente der ersten Spalte sich von Null unterscheiden und das gleiche Vorzeichen besitzen.

**B** Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5.$$

Die oben angegebene notwendige Bedingung ist erfüllt. Ob das Polynom tatsächlich ein Hurwitzpolynom ist, kann nun mit dem Routh-Schema überprüft werden. Zunächst werden die ersten beiden Zeilen gemäß (3.36) aufgestellt, d.h.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} \cdot$$

Der oben angegebenen Berechnungsvorschrift folgend ermittelt man nun die dritte und vierte Zeile, d.h. es ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3}{(-2)} = 1 & \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 5}{(-2)} = 5 & \\ \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 4}{(-1)} = -6 & & \end{array} \cdot$$

Da das erste Element der vierten Zeile ein anderes Vorzeichen hat als die übrigen Elemente der ersten Spalte, ist  $p(s)$  kein Hurwitzpolynom. Das Routh-Tableau muss hier also nicht vollständig berechnet werden. ■

**B** Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 1.$$

Es soll mit dem Routh-Schema überprüft werden, ob ein Hurwitzpolynom vorliegt. Zunächst werden wieder die ersten beiden Zeilen gemäß (3.36) aufgestellt, d.h.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \cdot$$

Gemäß obiger Berechnungsvorschrift erhält man für die dritte Zeile

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{1 \cdot 1 - 3 \cdot 2}{(-3)} = \frac{5}{3} & \frac{1 \cdot 0 - 3 \cdot 0}{(-3)} = 0 & \end{array} \cdot$$

Da das erste Element der dritten Zeile das gleiche Vorzeichen hat wie die übrigen Elemente, wird die nächste (und hier auch zugleich letzte) Zeile ermittelt und man findet

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & \\ \frac{3 \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 1}{(-\frac{5}{3})} = 1 & & \end{array} \cdot$$

Alle Elemente der ersten Spalte sind von Null verschieden und haben das gleiche Vorzeichen, d.h.  $p(s)$  ist ein Hurwitzpolynom. ■

Besonders von Vorteil ist der Einsatz des Routh-Schemas, wenn die Koeffizienten des zu untersuchenden Polynoms von freien Parametern abhängen.

**B** Gegeben sei das Polynom

$$p(s) = s^3 + Ks^2 + s + 1.$$

Es soll mit Hilfe des Routh-Schemas überprüft werden, für welche Werte des reellen Parameters  $K$  das Polynom  $p(s)$  ein Hurwitzpolynom ist. Aus der Forderung, dass alle Polynomkoeffizienten das gleiche Vorzeichen besitzen, folgt unmittelbar die notwendige Bedingung, dass  $K$  positiv sein muss. Die ersten beiden Zeilen des Routh-Tableaus ergeben sich zu

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ K & 1 & 0 \end{array} \cdot$$

Für die weiteren Zeilen erhält man

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ \frac{1 \cdot 1 - K \cdot 1}{(-K)} = \frac{K-1}{K} & \frac{1 \cdot 0 - K \cdot 0}{(-K)} = 0 & . \\ \frac{K \cdot 0 - \frac{K-1}{K} \cdot 1}{-\frac{K-1}{K}} = 1 & & \end{array}$$

Damit alle Elemente der ersten Spalte gleiches Vorzeichen besitzen, muss

$$\frac{K-1}{K} > 0$$

gelten. Da  $K$  sicher positiv ist, folgt daraus unmittelbar der gesuchte Wertebereich

$$K > 1.$$

■

### 3.9 Zusammenschaltung von Übertragungssystemen

Die Übertragungsfunktion eines aus mehreren Übertragungssystemen rückwirkungsfrei(!) zusammengesetzten Gesamtsystems kann durch Anwendung der folgenden „Rechenregeln für Übertragungsfunktionen“ systematisch ermittelt werden.

#### 3.9.1 Reihenschaltung

Für die in Bild 3.5 dargestellte Serienschaltung zweier Systeme mit den Übertragungsfunktionen  $A(s)$  und  $B(s)$  gilt

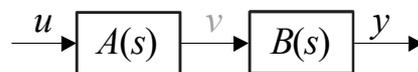


Bild 3.5: Reihenschaltung von Übertragungsfunktionen

$$\bar{y}(s) = B(s) \bar{v}(s) = B(s) A(s) \bar{u}(s).$$

Für die Gesamtübertragungsfunktion gilt somit

$$G(s) = A(s) B(s). \quad (3.37)$$

Die Übertragungsfunktion einer Serienschaltung entspricht also dem *Produkt* der einzelnen Übertragungsfunktionen. Man beachte, dass  $G(s)$  ausschließlich Pole bzw. Nullstellen besitzt, die auch Pole bzw. Nullstellen von  $A(s)$  und/oder  $B(s)$  sind.

**B** Aus der Serienschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{und} \quad B(s) = \frac{s+2}{s}$$

ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s)B(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}.$$

Die Pole von  $G(s)$  liegen bei  $s_1 = 0$  und  $s_2 = -1$ , die Nullstelle bei  $s = -2$ . ■

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, dass eine „Stabilisierung“ mittels einer Serienschaltung nicht möglich ist.

**B** Gegeben sei ein instabiles<sup>6</sup> System mit der Übertragungsfunktion

$$B(s) = \frac{1}{s-5}.$$

Mit der Wahl

$$A(s) = \frac{s-5}{s+1}$$

gelingt es, ein BIBO-stabiles Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s)B(s) = \frac{(s-5)}{(s+1)} \frac{1}{(s-5)} = \frac{1}{s+1}$$

zu erzeugen. Der „instabile“ Pol von  $B(s)$  wird durch eine entsprechende Nullstelle von  $A(s)$  kompensiert, man spricht von einer „**instabilen Kürzung**“. In der Realität muss allerdings davon ausgegangen werden, dass das Signal  $v$  mit einer Störung überlagert ist, was in Bild 3.6 durch eine Störgröße  $d$  angedeutet ist. Damit gilt

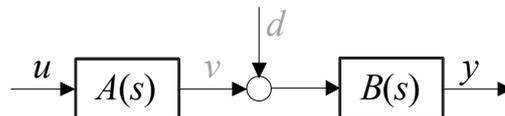


Bild 3.6: Zur Serienschaltung von Systemen

$$\bar{y}(s) = B(s) [\bar{v}(s) + \bar{d}(s)] = B(s) A(s) \bar{u}(s) + B(s) \bar{d}(s).$$

<sup>6</sup>unter einem instabilen System verstehen wir hier ein System, das nicht BIBO-stabil ist.

Das bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen Störung und Ausgangsgröße durch die instabile Übertragungsfunktion  $B(s)$  beschrieben wird, das Gesamtsystem ist somit praktisch unbrauchbar. Diese Problematik tritt auch bei der numerischen Simulation der Serienschaltung auf. Aufgrund der numerischen Darstellung von Zahlen mit endlicher Genauigkeit ist die Größe  $v$  mit einem Fehler überlagert, der als Störung  $d$  interpretiert werden kann. ■

Das obige Beispiel veranschaulicht, dass instabile Kürzungen *unter keinen Umständen* durchgeführt werden dürfen. Ein weiterer Grund hierfür besteht darin, dass Übertragungsfunktionen stets nur Modelle der Realität darstellen und daher immer mit Unsicherheiten behaftet sind. *Exakte* Kürzungen sind somit grundsätzlich nicht möglich.

### 3.9.2 Parallelschaltung

Die Übertragungsfunktion  $G(s)$  der in Bild 3.7 dargestellten Parallelschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen  $A(s)$  und  $B(s)$  kann mit Hilfe der Zusammenhänge

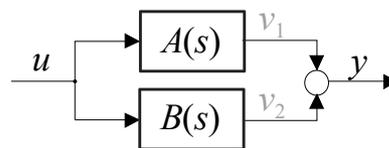


Bild 3.7: Parallelschaltung von Übertragungsfunktion

$$\bar{v}_1(s) = A(s) \bar{u}(s) \quad \text{und} \quad \bar{v}_2(s) = B(s) \bar{u}(s)$$

sowie

$$\bar{y}(s) = A(s) \bar{u}(s) + B(s) \bar{u}(s)$$

ermittelt werden, es gilt

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = A(s) + B(s). \quad (3.38)$$

Die Übertragungsfunktion der Parallelschaltung entspricht also der *Summe* der einzelnen Übertragungsfunktionen. Man beachte, dass  $G(s)$  ausschließlich Pole besitzt, die auch Pole von  $A(s)$  und/oder  $B(s)$  sind.

**B** Aus der Parallelschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{und} \quad B(s) = \frac{s+2}{s}$$

ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = A(s) + B(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+1)}.$$

Die Übertragungsfunktion besitzt Pole bei  $s = 0$  und  $s = -1$  sowie Nullstellen bei  $s = 2 + \sqrt{2} = 3.4142$  und  $s = 2 - \sqrt{2} = 0.5858$ . ■

### 3.9.3 Rückkopplung

Die in Bild 3.8 dargestellte rückgekoppelte Struktur spielt vor allem in der Regelungstechnik eine bedeutende Rolle.

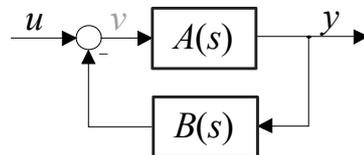


Bild 3.8: Rückgekoppelte Struktur

Es gilt

$$\bar{y}(s) = A(s) \bar{v}(s) \quad \text{und} \quad \bar{v}(s) = \bar{u}(s) - B(s) \bar{y}(s),$$

d.h.

$$\bar{y}(s) = A(s) \bar{u}(s) - A(s) B(s) \bar{y}(s).$$

Daraus folgt die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)}. \quad (3.39)$$

Als Hilfestellung für die Ermittlung der Übertragungsfunktion von rückgekoppelten Strukturen kann die Merkgel

$$G_{\text{gesamt}} = \frac{G_{\text{Vorwärtszweig}}}{1 + G_{\text{Schleife}}} \quad (3.40)$$

dienen, siehe hierzu auch Bild 3.9.



Bild 3.9: Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion rückgekoppelter Systeme

**B** Aus der Zusammenschaltung der Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$A(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{und} \quad B(s) = \frac{1}{s}$$

gemäß Bild 3.8 ergibt sich ein Gesamtsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)^2}.$$

Bemerkenswert ist, dass die Pole  $s_{1,2} = -1$  von  $G(s)$  weder Pole von  $A(s)$  noch von  $B(s)$  sind. Diese Möglichkeit, die Pole des „geschlossenen Kreises“ zu beeinflussen, wird in der Regelungstechnik beim Entwurf von Regelgesetzen ausgenutzt. ■

### 3.9.4 Allgemeine Strukturen

Ein Algorithmus zu Berechnung der Übertragungsfunktion von komplexen Zusammenschaltungen von Übertragungssystemen ist die so genannte Mason-Formel<sup>7</sup>, siehe z.B. [1]. Durch geschickte Anwendung der bereits eingeführten Rechenregeln für Übertragungsfunktionen (Serien-, Parallelschaltung und Rückkopplung) können komplizierte Strukturen auch ohne den etwas schwerfälligen Algorithmus von Mason problemlos aufgelöst werden.

**B** Die Übertragungsfunktion des in Bild 3.10 dargestellten Systems soll ermittelt werden. Es

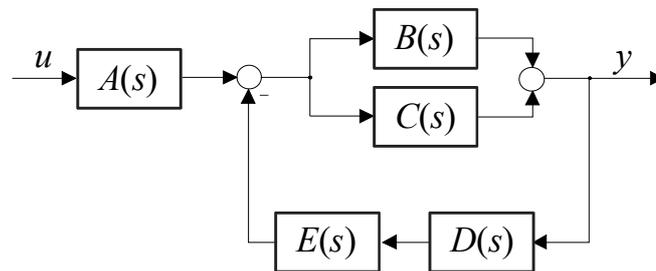


Bild 3.10: Zusammenschaltung mehrerer Übertragungsfunktionen

handelt sich um die Reihenschaltung der Übertragungsfunktion  $A(s)$  und einer Rückkopplung mit

$$G_{\text{Vorwärtszweig}} = B(s) + C(s) \quad \text{und} \quad G_{\text{Schleife}} = [B(s) + C(s)] D(s) E(s).$$

Für die Gesamtübertragungsfunktion gilt somit

$$G(s) = A(s) \frac{B(s) + C(s)}{1 + [B(s) + C(s)] D(s) E(s)}.$$

■

Bei der Ermittlung der Übertragungsfunktion eines komplexen Systems aus den Übertragungsfunktionen der Teilsysteme ist unbedingt darauf zu achten, dass die Teilsysteme rückwirkungs-frei gekoppelt sind. Im folgenden Beispiel wird diese Problematik illustriert.

**B** Gegeben sei das in Bild 3.11 dargestellte Netzwerk, bestehend aus idealen Bauelementen. Die Eingangsgröße des Systems ist die Spannung  $u$ , die Ausgangsgröße ist die Spannung  $y$ . Diese Schaltung kann als Serienschaltung zweier RC-Tiefpass-Schaltungen interpretiert werden. Für den RC-Tiefpass erster Ordnung mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $x = x_1$  gilt

$$u = Ri + x = RC \frac{dx}{dt} + x$$

<sup>7</sup>benannt nach dem amerikanischen Ingenieur Samuel Jefferson Mason (1921 - 1974)

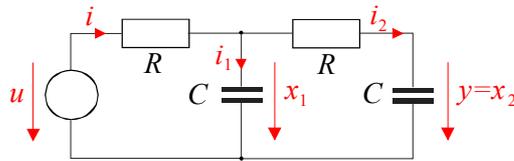


Bild 3.11: Netzwerk, bestehend aus zwei RC-Tiefpass-Schaltungen erster Ordnung

und es kann die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

ermittelt werden. Die Anwendung der Relation (3.37) über die Serienschaltung zweier Übertragungssysteme liefert dann die (vermeintliche) Übertragungsfunktion der Schaltung aus Bild 3.11, nämlich

$$H(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = G(s)G(s) = \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{s^2 + \frac{2}{RC}s + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}. \quad (3.41)$$

Zur Kontrolle wird nun die Übertragungsfunktion der Schaltung aus Bild 3.11 direkt berechnet. Es gilt

$$x_1 = Ri_2 + x_2 = RC \frac{dx_2}{dt} + x_2$$

sowie

$$u = Ri + x_1 = RC \frac{dx_1}{dt} + RC \frac{dx_2}{dt} + x_1.$$

Aus diesen beiden Relationen ergibt sich das mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die zugehörige Übertragungsfunktion lautet

$$T(s) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + \frac{2}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & s + \frac{1}{RC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(RC)^2} \frac{1}{s^2 + s \frac{3}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}}.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit (3.41), so erkennt man, dass

$$T(s) \neq H(s),$$

d.h. die Formel (3.37) darf hier offenbar nicht angewandt werden! Der Grund hierfür liegt darin, dass (3.41) impliziert, dass zwei unbelastete(!) RC-Tiefpassschaltungen in Serie geschaltet sind. Dies trifft aber bei der betrachteten Schaltung *nicht* zu. Wird zur „Entkopplung“ der beiden Tiefpass-Schaltungen ein Spannungsfolger (Impedanzwandler) eingesetzt, wie in Bild 3.12 dargestellt, so ist die vorausgesetzte Rückwirkungsfreiheit gegeben und es gilt

$$T(s) = H(s).$$

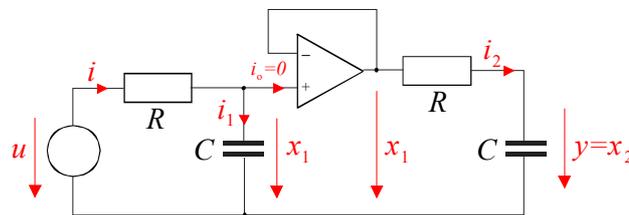


Bild 3.12: Modifikation des Schaltung durch Einbau eines Spannungsfolgers

## 3.10 Wichtige Übertragungsglieder

An dieser Stelle werden einige wichtige Übertragungsglieder vorgestellt. In den Blöcken, welche die einzelnen Übertragungssysteme in Strukturbildern repräsentieren, werden oft auch die zugehörigen Sprungantworten graphisch angedeutet.

### 3.10.1 Proportionalglied

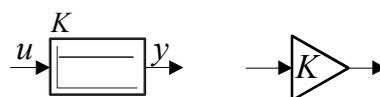
Beim Proportionalglied (**P-Glied**) ist die Ausgangsgröße  $y$  proportional zur Eingangsgröße  $u$ , d.h.

$$y(t) = K u(t) \quad (3.42)$$

Den (reellen) Proportionalitätsfaktor  $K$  bezeichnet man auch als Verstärkung oder Verstärkungsfaktor. Aus (3.42) folgt unmittelbar die zugehörige Übertragungsfunktion

$$G(s) = K. \quad (3.43)$$

In Strukturbildern repräsentieren üblicherweise die folgenden Symbole ein Proportionalglied:



Wie bereits erwähnt, ist im linken Block die Sprungantwort des P-Gliedes angedeutet.

### 3.10.2 Verzögerungsglied erster Ordnung

Das Übertragungsverhalten eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung (**VZ<sub>1</sub>-G**lied oder **PT<sub>1</sub>-G**lied) mit der Eingangsgröße  $u$  und der Ausgangsgröße  $y$  wird durch die Differentialgleichung

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (3.44)$$

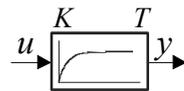
beschrieben. Hierbei ist der positive Parameter  $T$  die so genannte Zeitkonstante des Systems und  $K$  ist der Verstärkungsfaktor. Die Anwendung der Laplace-Transformation liefert die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}. \quad (3.45)$$

Für die Sprungantwort eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung gilt

$$h(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad (3.46)$$

siehe auch Bild 3.13. Daher werden solche Systeme üblicherweise durch folgendes Symbol dargestellt:



Aus Bild 3.13 geht auch hervor, dass zum Zeitpunkt  $t = T$  der Wert der Sprungantwort ca. 63% des stationären Endwertes  $h_\infty = K$  beträgt. Weiters kann aus dem dargestellten Verlauf von  $h(t)$  die Zeitkonstante  $T$  als derjenige Zeitpunkt abgelesen werden, bei dem die rot eingezeichnete Tangente an  $h(t)$  den Wert  $h_\infty = K$  annimmt, d.h. es gilt

$$T = \frac{K}{\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0}}.$$

In der Praxis wird häufig auf die Faustformel zurückgegriffen, die besagt, dass der stationäre

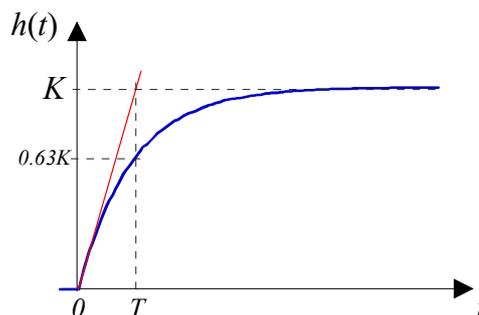


Bild 3.13: Sprungantwort eines PT<sub>1</sub> Elementes mit der Zeitkonstante  $T$

Endwert  $h_\infty$  für  $t \geq 5T$  erreicht ist. Durch Einsetzen in (3.46) erkennt man, dass der durch diese Faustformel entstehende Fehler kleiner als 1% von  $h_\infty$  ist.

### 3.10.3 Verzögerungsglied zweiter Ordnung

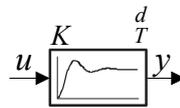
Verzögerungsglieder zweiter Ordnung (**VZ<sub>2</sub>-G**lied oder **PT<sub>2</sub>-G**lied) werden durch die Differentialgleichung

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2dT \frac{dy}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (3.47)$$

beschrieben. Hierbei sind die positiven Parameter  $d$  und  $T$  der Dämpfungsfaktor und die Zeitkonstante,  $K$  ist der Verstärkungsfaktor. Aus obiger Differentialgleichung ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{1 + 2dT s + (sT)^2}. \quad (3.48)$$

Für  $d < 1$  besitzt  $G(s)$  ein konjugiert komplexes Polpaar, was zu dem im Block



angedeuteten „oszillierenden“ Verlauf der Sprungantwort führt. Für  $d \geq 1$  besitzt  $G(s)$  zwei reelle Pole und kann somit als Reihenschaltung zweier Verzögerungsglieder erster Ordnung interpretiert werden.

### 3.10.4 Integrator

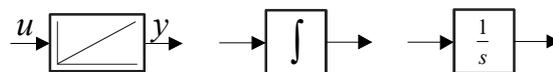
Der Integrator (**I-G**lied) wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = u \quad (3.49)$$

beschrieben, für die zugehörige Übertragungsfunktion gilt

$$G(s) = \frac{1}{s}. \quad (3.50)$$

Folgende Symbole



werden in Strukturbildern für den Integrator verwendet, wobei im linken Block die Rampe als Sprungantwort des Systems dargestellt ist

### 3.10.5 Differenzierer

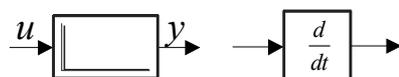
Ein idealer Differenzierer (**D-G**lied) bildet die zeitliche Ableitung des Eingangssignales, d.h.

$$y = \frac{du}{dt}, \quad (3.51)$$

für die (nicht realisierbare) Übertragungsfunktion folgt

$$G(s) = s. \quad (3.52)$$

Üblicherweise werden in Strukturbildern die Symbole



verwendet, wobei im linken Block der Dirac-Impuls als Sprungantwort des Systems angedeutet ist.

### 3.10.6 Vorhalteglied

Das dynamische Verhalten des realen Differenzierers (**DT<sub>1</sub>-Glieder**), auch Vorhalteglied bezeichnet, wird durch die Differentialgleichung

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = \frac{du}{dt} \quad (3.53)$$

beschrieben. Hierbei ist der positive Parameter  $T$  die Zeitkonstante. Für die Übertragungsfunktion des Systems ergibt sich

$$G(s) = \frac{s}{1 + sT}. \quad (3.54)$$

Beim DT<sub>1</sub>-Glieder handelt es sich also um ein D-Glieder mit Verzögerungsverhalten erster Ordnung. Seine Sprungantwort lautet

$$h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

sie ist in Bild 3.14 graphisch dargestellt. Wie man leicht überprüfen kann, gilt unabhängig von

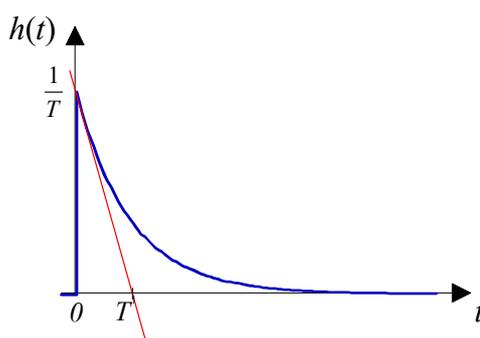


Bild 3.14: Sprungantwort DT<sub>1</sub>-Glieder

$T$  die Relation  $\int_0^{\infty} h(t) dt = 1$ . Daraus kann man folgern, dass für  $T \rightarrow 0$  die Sprungantwort  $h(t)$  dem Dirac-Impuls  $\delta(t)$  entspricht, das DT<sub>1</sub>-Glieder geht dann in einen idealen Differenzierer über.

### 3.11 Frequenzgang

Der so genannte Frequenzgang beschreibt den eingeschwungenen Zustand eines linearen, zeitinvarianten Systems bei harmonischer Erregung. Dabei wird hier vorausgesetzt, dass das betrachtete System BIBO-stabil ist, d.h. seine Übertragungsfunktion  $G(s)$  besitzt ausschließlich Pole mit negativem Realteil. Weiters wird vereinfachend vorausgesetzt, dass alle Pole von  $G(s)$  *einfach* sind, die gefundenen Ergebnisse gelten allerdings auch für den allgemeinen Fall mehrfacher Pole. Als Eingangsgröße  $u(t)$  wird nun die komplexe harmonische Funktion

$$u(t) = e^{j\omega t} \quad \bar{u}(s) = \frac{1}{s - j\omega} \quad (3.55)$$

gewählt<sup>8</sup>. Für die zugehörige Ausgangsgröße  $y(t)$  gilt im Bildbereich

$$\bar{y}(s) = G(s) \frac{1}{s - j\omega} = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - n_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \frac{1}{s - j\omega},$$

eine Partialbruchzerlegung liefert

$$\bar{y}(s) = \frac{c_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i}.$$

Für den Koeffizienten  $c_0$  findet man

$$c_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \bar{y}(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} \left[ (s - j\omega) G(s) \frac{1}{(s - j\omega)} \right] = G(j\omega),$$

d.h.

$$\bar{y}(s) = \frac{G(j\omega)}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i}.$$

Für die zugehörige Zeitfunktion gilt nun

$$y(t) = G(j\omega) e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}.$$

Für „sehr große Werte von  $t$ “, also im so genannten *eingeschwungenen Zustand* gilt

$$y(t) \approx G(j\omega) e^{j\omega t}, \quad (3.56)$$

d.h. die Ausgangsgröße entspricht der mit  $G(j\omega)$  gewichteten Eingangsgröße. Diese komplexe Funktion

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} \quad (3.57)$$

<sup>8</sup>Man beachte, dass es sich hier um ein reines Gedankenexperiment handelt.

ist der **Frequenzgang** des Systems. Salopp formuliert beschreibt er, wie sich im eingeschwungenen Zustand die Amplitude und die Phasenlage der harmonischen Eingangsgröße beim Durchlaufen des Systems verändern. Man beachte, dass die Eingangsgröße (3.55) als Linearkombination einer Sinus- und einer Cosinusfunktion dargestellt werden kann, d.h.

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Nach (3.56) und (3.57) gilt im eingeschwungenen Zustand für die zugehörige Ausgangsgröße  $y(t) = |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \arg G(j\omega))} = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \arg G(j\omega)) + j |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$ .

Aus der Linearität der Laplace-Transformation und des Systems kann daher unmittelbar gefolgert werden, dass im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \hat{u} |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \arg G(j\omega))$$

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \hat{u} |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi + \arg G(j\omega))$$

**B** Gegeben sei das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Für eine Eingangsgröße  $u(t) = 3 \sin t$  ergibt sich für den Verlauf von  $y(t)$  im eingeschwungenen Zustand

$$y(t) \approx 3 |G(j)| \sin(t + \arg G(j)) = \frac{3}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

■

Für jeden Wert von  $\omega$  ergibt sich also eine komplexe Zahl  $G(j\omega)$ . Die graphische Darstellung dieser komplexen Zahlen in der komplexen Ebene als Funktion von  $\omega$  wird **Frequenzgangs-Ortskurve**, **Nyquist-Ortskurve**<sup>9</sup> oder kurz **Ortskurve** genannt. In den so genannten (logarithmischen) **Frequenzkennlinien** werden jeweils Betrag und Phase von  $G(j\omega)$  über  $\omega$  dargestellt, man spricht in diesem Zusammenhang auch von den **Bode**<sup>10</sup>-**Diagrammen**.

<sup>9</sup>benannt nach dem (in Schweden geborenen) amerikanischen Physiker Harry Nyquist (1889-1976).

<sup>10</sup>benannt nach dem amerikanischen Wissenschaftler Hendrik Wade Bode (1905-1982).



# Kapitel 4

## Grundlagen der Regelungstechnik

### 4.1 Einführung

In allen Bereichen des täglichen Lebens wird vorausgesetzt, dass sich Systeme bzw. Prozesse genau so verhalten, wie man es von ihnen erwartet. Flugzeuge sind in der Lage, vollautomatisch Kurs und Höhe zu halten und können komplizierte Manöver völlig ohne menschliche Einflussnahme fehlerfrei ausführen. Industrieroboter führen mit höchster Präzision und Wiederholgenauigkeit komplexe Bewegungsabläufe aus und verrichten dabei Schweiß- oder Schneidarbeiten. In Geschäftslokalen herrscht, völlig unabhängig von den äußeren Witterungsbedingungen, ein angenehmes Raumklima. Leistungsfähige Assistenzsysteme, wie z.B. Spurhaltesysteme oder Tempomat verbessern Sicherheit und Komfort von Fahrzeugen, autonom bzw. automatisiert fahrende Autos sind keine Zukunftsmusik mehr.

In den angegebenen Beispielen wird das Verhalten der Systeme „Flugzeug“, „Roboter“, „Geschäftslokal“ und „Fahrzeug“ über vorgebbare Größen, wie z. B. die Ruderstellungen beim Flugzeug, in gewünschter Weise beeinflusst. Die hierfür erforderlichen Ruderstellungen werden aus der messtechnisch erfassten Abweichung des Flugzeugs von seinem vorgegebenen Kurs berechnet. Es entsteht also ein **geschlossener Wirkungskreis**, in dem das „Ist-Verhalten“ fortlaufend mit dem „Soll-Verhalten“ verglichen wird und das System im Sinne einer Angleichung an das „Soll-Verhalten“ beeinflusst wird. Dieses Prinzip der **Rückkopplung** ist charakteristisch für eine **Regelung**. Im Gegensatz dazu zeichnet sich eine **Steuerung** durch eine **offene Wirkungskette** aus, bei der ein System auf eine vom aktuellen Systemverhalten unabhängige Weise beeinflusst wird. Ein typisches Beispiel hierfür ist ein Bewässerungssystem, bei dem Pflanzen völlig unabhängig von der Witterung nach einem zeitlich fest vorgegebenem Schema mit Wasser versorgt werden.

### 4.2 Begriffe der Regelungstechnik

In Bild 4.1 ist eine sehr allgemeine Darstellung eines **Regelkreises** zu sehen. Das zu beeinflussende System wird **Regelstrecke** oder kurz **Strecke** genannt. Diejenigen Größen der Regelstrecke, deren Verläufe kontrolliert werden sollen, sind die so genannten **Regelgrößen**. Diese werden als messbar vorausgesetzt. Die vorgebbaren Eingangsgrößen der Regelstrecke,

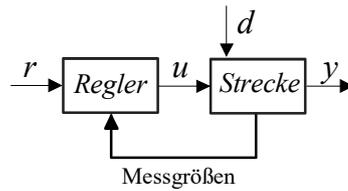


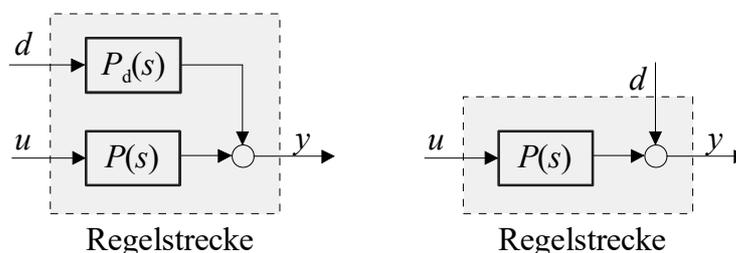
Bild 4.1: Regelkreis, allgemeine Darstellung

also diejenigen Größen, die eine Beeinflussung der Regelgrößen erlauben, sind die so genannten **Stellgrößen**. Im Rahmen dieses Skriptums wird vorausgesetzt, dass es genau *eine* Stellgröße  $u(t)$  und *eine* Regelgröße  $y(t)$  gibt, d.h. die Strecke ist ein Eingrößensystem. Der Wunschverlauf der Regelgröße wird in Form der **Führungsgröße** oder **Referenzgröße**  $r(t)$  vorgegeben. Der **Regelfehler**  $e(t)$  repräsentiert die Abweichung der Regelgröße von der Führungsgröße, d.h.  $e(t) = r(t) - y(t)$ . Soll  $y(t)$  dem Verlauf von  $r(t)$  folgen, so spricht man von einer **Folgeregelung** oder **Nachführung**. Wenn  $y(t)$  hingegen auf einem konstanten Wert gehalten werden soll - was natürlich auch als Vorgabe einer konstanten Führungsgröße interpretiert werden kann - handelt es sich um eine **Festwertregelung**. Der **Regler** bzw. das **Regelgesetz** generiert aus gegebenen bzw. messbaren Signalen die Stellgröße  $u(t)$  so, dass die Regelgröße  $y(t)$  der Führungsgröße  $r(t)$  trotz des Einwirkens einer **Störgröße**  $d(t)$  „möglichst gut“ entspricht. Diese unscharfe Ausdrucksweise soll verdeutlichen, dass die Güte bzw. Qualität einer Regelung, die so genannte **Regelgüte**, nicht eindeutig definiert werden kann. In späteren Kapiteln wird sich zeigen, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, die Regelgüte sinnvoll zu definieren. Allen Definitionen ist allerdings gemeinsam, dass sie die Stabilität des Regelkreises voraussetzen.

In weiterer Folge wird angenommen, dass die Regelstrecke im relevanten Arbeitsbereich durch ein lineares, zeitinvariantes System der Ordnung  $n$  hinreichend genau approximiert werden kann. Das bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen  $y$  und  $u$  bzw.  $d$  im Bildbereich durch die Relation

$$\bar{y}(s) = P(s) \bar{u}(s) + P_d(s) \bar{d}(s) \quad (4.1)$$

dargestellt werden kann, siehe hierzu auch Bild 4.2, links. Die beiden Übertragungsfunktionen

Bild 4.2: Einfluss von  $d$  und  $u$  auf die Regelgröße  $y$ 

$P(s)$  und  $P_d(s)$  sind gebrochen rationale Funktionen, d.h. sie können als Quotienten von Poly-

nomen in  $s$  dargestellt werden. Dabei wird im Folgenden vorausgesetzt, dass die so genannte „Streckenübertragungsfunktion“  $P(s)$ , die das Verhalten der störungsfreien Strecke ( $d = 0$ ) beschreibt, nicht sprungfähig ist, d.h. der Nennerpolynomgrad  $n$  der Übertragungsfunktion ist größer als der Zählerpolynomgrad. Im Gegensatz dazu wird angenommen, dass  $d$  einen *unmittelbaren* Einfluss auf  $y$  besitzt, d.h.  $P_d(s)$  repräsentiert ein sprungfähiges System, bei dem der Zählerpolynomgrad dem Nennerpolynomgrad entspricht. Sehr häufig wird auch vereinfachend angenommen, dass die Störung  $d$  *direkt* auf die Regelgröße  $y$  wirkt, d.h.  $P_d(s) = 1$ , siehe Bild 4.2, rechts. Mit dieser Annahme wird der Tatsache Rechnung getragen, dass der Einfluss einer unbekanntenen und nicht messbaren „inneren“ Störung ohnehin nur mittels des gemessenen Verlaufs von  $y$  erfasst werden kann. Die tatsächliche Störgröße wird also in eine äquivalente Störung am Streckenausgang umgerechnet.

Die Streckenbeschreibung kann auch in Form eines Zustandsmodells der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u + \mathbf{h}d \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + g d\end{aligned}\quad (4.2)$$

erfolgen, wobei  $\mathbf{A}$  eine  $n \times n$  Matrix ist,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{h}$  und  $\mathbf{c}$  sind  $n$ -dimensionale Spaltenvektoren und  $g$  ist eine reelle Konstante. Der Zustand der Regelstrecke wird durch den Vektor

$$\mathbf{x}(t) = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

beschrieben. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen (4.1) und (4.2) ist durch die Relation

$$P(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad \text{und} \quad P_d(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{h} + g \quad (4.3)$$

gegeben.

In Bild 4.3 ist exemplarisch der so genannte **Standardregelkreis** dargestellt, er repräsentiert den klassischen Regelkreis schlechthin. Die Eingangsgröße des Reglers ist hier der Regelfehler, d.h. die Abweichung zwischen gewünschtem und tatsächlichem Verlauf der Regelgröße. Es wird sich später zeigen, dass es oft auch sinnvoll ist, andere Regelkreis-Strukturen zu wählen. Die in weiterer Folge für den Standardregelkreis eingeführten Begriffe sind allgemeingültig, die zugehörigen Berechnungsvorschriften müssen allerdings an die jeweilige Regelkreisstruktur angepasst werden.

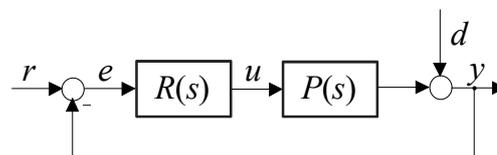


Bild 4.3: Standardregelkreis

Der Regler wird als lineares, zeitinvariantes System angesetzt. Im Fall des Standardregelkreises bedeutet dies, dass der Regler durch eine Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{e}(s)} \quad (4.4)$$

dargestellt werden kann. Der Regler wird im Allgemeinen als sprunghaftes System angesetzt, da es wünschenswert ist, dass sich sprunghafte Änderungen am Reglereingang unmittelbar am Reglerausgang auswirken. Der Zusammenhang zwischen Regelgröße  $y$  und Führungsgröße  $r$  sowie Störgröße  $d$  kann im Bildbereich durch die Relation

$$\bar{y}(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \bar{r}(s) + \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \bar{d}(s) \quad (4.5)$$

ausgedrückt werden. Wie man erkennen kann, wird das **Führungsverhalten** durch die so genannte **Führungsübertragungsfunktion**

$$T(s) = \left. \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} \right|_{d=0} = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} \quad (4.6)$$

beschrieben, während das **Störverhalten** durch die **Störübertragungsfunktion**

$$S(s) = \left. \frac{\bar{y}(s)}{\bar{d}(s)} \right|_{r=0} = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} \quad (4.7)$$

charakterisiert ist.

## 4.3 Beispiele

### 4.3.1 Drehzahlregelung mit Hilfe des Fliehkraftreglers

Im Jahr 1788 wurde von Watt und Boulton<sup>1</sup> der in Bild 4.4 dargestellte Fliehkraftregler zur Drehzahlregelung von Dampfmaschinen eingesetzt. Ursprünglich wurde dieses Regelungskonzept zur Drehzahlregelung bei Windmühlen mittels mechanischer Flügelverstellung entwickelt. Der Mechanismus besteht im Wesentlichen aus einem Fliehkraftpendel durch dessen Bewegung die Dampfzufuhr zur Dampfmaschine über einen Hebel verstellt wird. Im Ruhezustand ist die Dampfleitung vollständig geöffnet, mit der Kolbenbewegung der Dampfmaschine beginnt sich das Fliehkraftpendel zu drehen. Mit sich ändernder Drehzahl  $n$  werden die zwei rotierenden Gewichte aufgrund der Fliehkraft angehoben bzw. abgesenkt. Über einen Hebelmechanismus wird in der Dampfleitung eine Drossel (Klappe oder Schieber) betätigt, bis sich ein Gleichgewichtszustand von Dampfzufuhr und Drehzahl einstellt. Die Struktur des Regelkreises ist in Bild 4.5 dargestellt. Der Fliehkraftregler, bestehend aus Fliehkraftpendel und Hebelmechanismus fungiert hier als Drehzahlsensor und Regler, die auf diese Weise generierte Stellgröße wird durch das so genannte Stellglied, im vorliegenden Fall durch den Schieber mechanisch umgesetzt. Der gewünschte Soll-Wert für die Drehzahl kann über die Verschiebung des Angelpunktes am Hebel eingestellt werden.

### 4.3.2 Der Pupillenapparat des Menschen

Der so genannte Pupillarapparat des Menschen hat die Aufgabe, die Intensität des auf die Netzhaut des Auges einfallenden Lichtes konstant zu halten<sup>2</sup>. Dies wird durch eine gezielte

<sup>1</sup>James Watt (1736 - 1819), Matthew Boulton (1728 - 1809)

<sup>2</sup>bei besonders starken Intensitätsschwankungen erfolgt eine zusätzliche Adaption, die auf chemischen Mechanismen beruht.

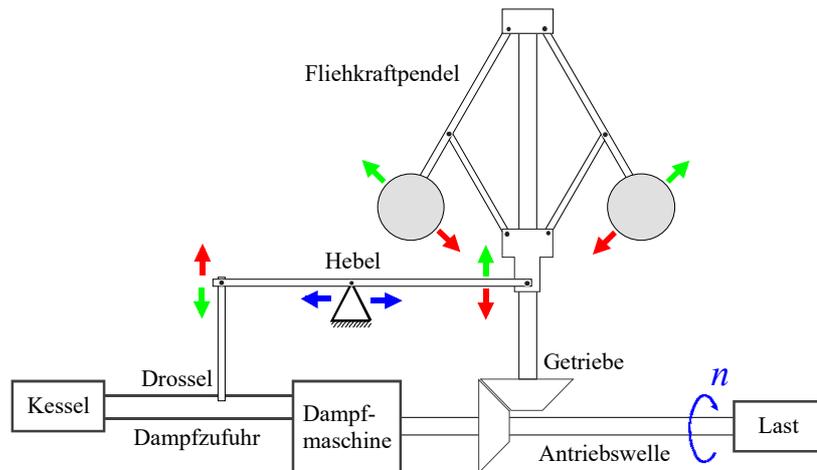


Bild 4.4: Drehzahlregelkreis mit Flihkraftregler

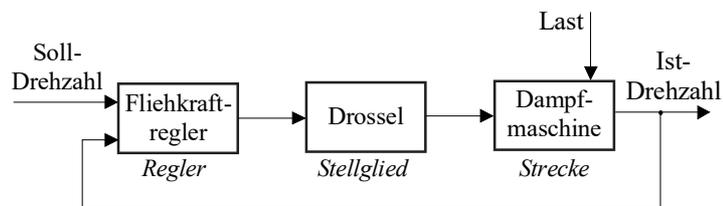


Bild 4.5: Struktur der Drehzahlregelung

Verstellung der Pupillenfläche mittels der Irismuskulatur erreicht. Fotorezeptoren in der Netzhaut fungieren als Sensoren, die nicht nur die Lichtintensität, sondern auch deren zeitliche Änderung detektieren. Aus den Sensorinformationen werden im Zentralnervensystem (ZNS) entsprechende Maßnahmen zur Verstellung der Pupillenfläche abgeleitet. Bei der Pupillenregelung handelt es sich somit um eine Festwertregelung, Lichtintensitätsschwankungen in der Außenwelt wirken als Störungen. Die Struktur dieses wichtigen biologischen Regelkreises ist in Bild 4.6 dargestellt.

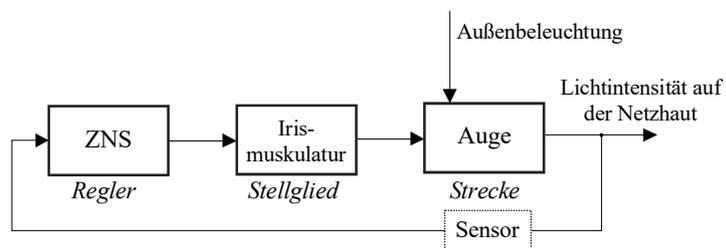


Bild 4.6: Pupillarapparat als Regelkreis



# Kapitel 5

## PID - Regler

### 5.1 Einführung

PID-Regler sind dadurch charakterisiert, dass sich ihre Wirkung aus drei Komponenten zusammensetzt, nämlich einem proportionalen Anteil („P-Anteil“), einem integrierenden Anteil („I-Anteil“) sowie einem differenzierenden Anteil („D-Anteil“). Aufgrund ihrer strukturellen Einfachheit (und auch aus traditionellen Gründen) sind PID-Regler im industriellen Einsatz oft die erste - wenngleich in vielen Fällen nicht die beste - Wahl. Die Einstellung der Regler erfolgt meistens empirisch, unter Zuhilfenahme von Expertenwissen, oder auf Basis so genannter Einstellregeln, also „Kochrezepten“ zur Reglerauslegung.

In den folgenden Abschnitten wird davon ausgegangen, dass die zu regelnde Strecke ein Eingrößensystem ist, die Regelkreisstruktur ist der Standardregelkreis. Zunächst werden die Grundlagen der PID-Regelung erläutert, einige wichtige Begriffe erklärt und verschiedene Realisierungsformen vorgestellt. Danach wird der so genannte Windup-Effekt beschrieben und einfache Gegenmaßnahmen werden vorgestellt. Den Abschluss des Kapitels bilden einige Einstellregeln, mit deren Hilfe geeignete Reglerparameter ermittelt werden können.

### 5.2 Parallelrealisierung - die Lehrbuchform

Diese Reglerform zeichnet sich dadurch aus, dass die Anteile (P, I und D) durch drei parallele Zweige realisiert sind (siehe Bild 5.1), man spricht daher von der Parallelrealisierung eines PID-Reglers. Da in dieser Form Modifikationen bzw. Erweiterungen fehlen, die in industriellen PID-Reglern zu finden sind, spricht man auch von der Lehrbuchform des PID-Reglers.

Die Stellgröße  $u(t)$  setzt sich aus drei Komponenten zusammen, die proportional zum Regelfehler  $e(t)$ , zum zeitlichen Integral über den Regelfehler sowie zur zeitlichen Ableitung des Regelfehlers sind. Es gilt somit

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (5.1)$$

wobei  $K_P$ ,  $K_I$  und  $K_D$  reelle Konstanten sind. Durch Veränderung dieser Gewichtungsfaktoren können die einzelnen Anteile unabhängig voneinander eingestellt werden, sie sind also

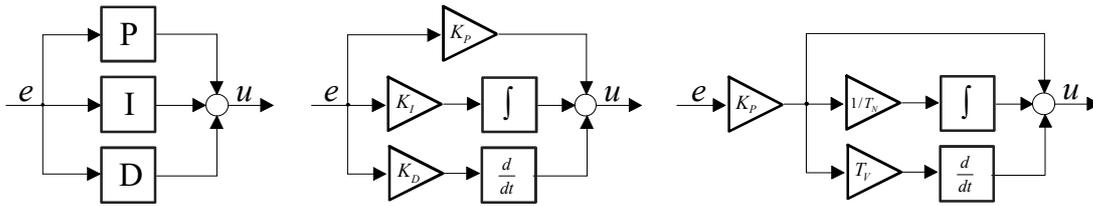


Bild 5.1: Parallelrealisierung eines PID-Reglers

entkoppelt<sup>1</sup>.

Häufig wird auch die in der DIN 19226 vorgeschlagene Realisierung verwendet, nämlich

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_V \frac{de(t)}{dt} \right]. \quad (5.2)$$

Hierbei bezeichnen die Konstanten  $K_P$ ,  $T_N$  und  $T_V$  den Proportionalbeiwert, die Nachstellzeit und die Vorhaltezeit, der Ursprung dieser Bezeichnungen wird später erläutert. Man beachte, dass bei der Realisierung (5.2) die oben erwähnte Entkopplung der einzelnen Anteile verloren geht. Vergleicht man nämlich (5.1) und (5.2) so findet man die Zusammenhänge

$$K_I = \frac{K_P}{T_N} \quad \text{bzw.} \quad K_D = K_P T_V, \quad (5.3)$$

d.h. bei einer Änderung von  $K_P$  verändern sich auch die Konstanten  $K_I$  und  $K_D$ . Eine Vergrößerung der Nachstellzeit  $T_N$  entspricht einer Reduktion der Gewichtung des I-Anteils, d.h. für  $T_N \rightarrow \infty$  wird der I-Anteil deaktiviert. In Tabelle 1 sind die üblicherweise eingesetzten Konfigurationen von PID-Reglern dargestellt.

Reglertyp	$K_P$	$K_I$	$K_D$	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	*	0	0	*	$\infty$	0
PI-Regler	*	*	0	*	*	0
PD-Regler	*	0	*	*	$\infty$	*
PID-Regler	*	*	*	*	*	*
	Realisierung (5.1)			Realisierung (5.2)		

Tabelle 1: Konfiguration von Standardreglern

<sup>1</sup>engl.: non-interacting

Weiters ist zu beachten, dass in (5.1) bzw. (5.2) die - praktisch nicht mögliche - Durchführung einer *idealen* zeitlichen Differentiation erforderlich ist. Das bedeutet, dass die zugehörige Reglerübertragungsfunktion nicht realisierbar ist, d.h. ihr Zählergrad ist größer als ihr Nennergrad. Für einen PID-Regler gemäß (5.2) ergibt sich beispielsweise die Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{e}(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V \right) = K_P \frac{1 + sT_N + s^2T_N T_V}{sT_N}. \quad (5.4)$$

Ersetzt man das D-Element durch ein so genanntes DT<sub>1</sub>-Element, also durch einen Differenzierer mit Verzögerungsverhalten, so lautet die nunmehr realisierbare Reglerübertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{e}(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_N} + \frac{sT_V}{1 + sT_R} \right) = K_P \frac{1 + sT_N(1 + T_R/T_N) + s^2T_N T_V(1 + T_R/T_V)}{sT_N(1 + sT_R)}. \quad (5.5)$$

In diesem Zusammenhang spricht man auch von einem realen PID-Regler bzw. von einem PID-T<sub>1</sub> Regler. Hierbei ist zu beachten, dass die Konstante  $T_R$  hinreichend klein gewählt werden muss, d.h.

$$\frac{T_R}{T_V} \ll 1.$$

Für die Sprungantwort, d.h.  $e(t) = \sigma(t)$ , des realen PID-Reglers gilt

$$u(t) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_N} t + \frac{T_V}{T_R} e^{-\frac{t}{T_R}} \right),$$

in Bild 5.2 ist der zugehörige Verlauf der Stellgröße graphisch dargestellt.

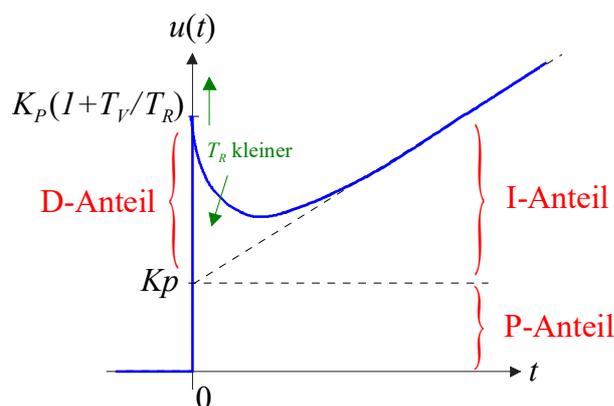


Bild 5.2: Sprungantwort eines realen PID-Reglers

### Nachstellzeit

Der Begriff der Nachstellzeit  $T_N$  eines PI-Reglers (d.h. „D-Anteil=0“) kann mittels seiner Sprungantwort interpretiert werden. Dazu wird als Eingangsgröße des Reglers der Ein-

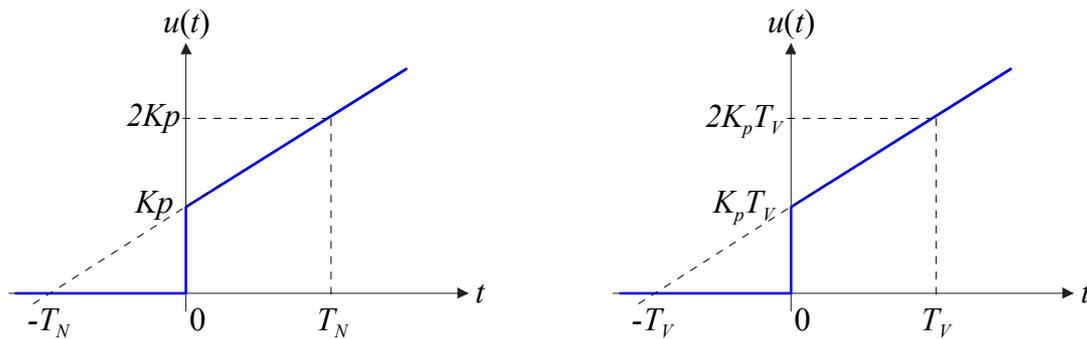


Bild 5.3: Sprungantwort PI-Regler (links) bzw. Rampenantwort PD-Regler (rechts)

heittsprung gewählt, also  $e(t) = \sigma(t)$ . Für den zugehörigen Verlauf der Ausgangsgröße  $u(t)$  gilt dann offensichtlich

$$u(t) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_N} t \right).$$

Das bedeutet, dass sich die Stellgröße aus zwei Komponenten zusammensetzt. Während der P-Anteil des Reglers einen konstanten Stellgrößenanteil  $K_P$  bewirkt, liefert der I-Anteil einen rampenförmigen Anteil  $\frac{K_P}{T_N} t$ . Wie leicht zu erkennen ist, siehe hierzu auch Bild 5.3, sind die beiden Stellgrößenanteile zum Zeitpunkt  $t = T_N$  genau gleich groß. Somit kann die Nachstellzeit als diejenige Zeit interpretiert werden, die der I-Anteil bei einer sprungförmigen Änderung des Regelfehlers braucht, um einen gleich großen Beitrag zur Stellgröße zu liefern wie der P-Anteil.

### Vorhaltezeit

Die Vorhaltezeit  $T_V$  kann auf ähnliche Art und Weise gedeutet werden, wie die Nachstellzeit. Wählt man nämlich als Eingangsgröße eines idealen PD-Reglers eine Rampe, d.h.  $e(t) = t$ , so ergibt sich für den entsprechenden Verlauf der Stellgröße

$$u(t) = K_P (t + T_V).$$

Wieder setzt sich die Stellgröße aus zwei Anteilen zusammen, die offensichtlich zum Zeitpunkt  $t = T_V$  den gleichen Wert annehmen. Die Vorhaltezeit ist somit diejenige Zeit, die der P-Anteil bei einer rampenförmigen Änderung des Regelfehlers benötigt, um einen gleich großen Beitrag zur Stellgröße zu liefern wie der D-Anteil, siehe auch Bild 5.3.

## 5.3 Windup-Effekt und Gegenmaßnahmen

Grundsätzlich ist beim Entwurf von Regelkreisen immer zu beachten, dass in praktischen Anwendungen die Stellgröße betragsmäßig beschränkt ist, also nicht beliebige Werte annehmen kann. Dieser Effekt kann mit Hilfe der in Bild 5.4 in den Standardregelkreis eingefügten Sättigungsfunktion nachgebildet werden, es gilt

$$u^*(t) = \text{sat } u(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } |u(t)| \leq u_{\max} \\ u_{\max} \text{ sign } u(t) & \text{für } |u(t)| \geq u_{\max} \end{cases},$$

wobei die positive, reelle Konstante  $u_{\max}$  den maximal zulässigen Betrag der Stellgröße repräsentiert. Man beachte, dass durch das „Ansprechen“ der Sättigungsfunktion die Regel-

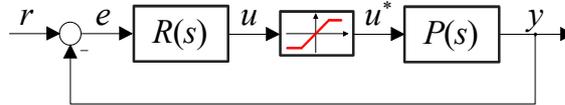


Bild 5.4: Standardregelkreis mit Stellgrößenbeschränkung

güte des Regelkreises dramatisch verschlechtert werden kann, im schlimmsten Fall kann es sogar zur Destabilisierung kommen.

Bei Reglern mit Integralanteil, also auch bei PID-Reglern, kann der so genannte „Windup-Effekt“ auftreten. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass es beispielsweise bei einem abrupten Arbeitspunktwechsel zu inakzeptablem Über- bzw. Unterschwingen der Regelgröße  $y$  kommt bevor der gewünschte stationäre Wert erreicht wird. Die Ursache hierfür besteht darin, dass bei aktiver Stellgrößenbeschränkung, also  $|u(t)| \geq u_{\max}$ , die Regelstrecke unabhängig vom Verlauf von  $y$  mit einer konstanten Eingangsgröße ( $\pm u_{\max}$ ) gespeist wird. Die Rückkopplung ist somit unwirksam und der Regelkreis wird „offen“ betrieben. Obwohl der Betrag von  $u^*$  nicht weiter anwachsen kann, kommt es aufgrund der fortwährenden Integration des Regelfehlers zu einem weiteren betragsmäßigen Ansteigen des I-Anteils  $u_i$  der Stellgröße. Man spricht in diesem Zusammenhang vom „Aufwickeln“ oder „Aufziehen“ des Integrators oder kurz vom „Windup-Effekt“. Erst wenn der Regelfehler sein Vorzeichen ändert, kommt es zu einer betragsmäßigen Verkleinerung von  $u_i$ . Wenn der Betrag von  $u_i$  schließlich hinreichend klein ist, spricht die Stellgrößenbeschränkung nicht mehr an und der Regelkreis funktioniert wieder in gewünschter Weise. Aufgrund der unnötig langen zeitlichen Phase, während der  $u^* = \pm u_{\max}$  gilt, kommt es zu dem oben erwähnten ungünstigen Verlauf der Regelgröße  $y$ .

### 5.3.1 Anti-Windup-Maßnahmen

Eine naheliegende Maßnahme zur Bekämpfung des Windup-Effekts besteht darin, das betragsmäßige Ansteigen von  $u_i$  im Falle einer aktiven Stellgrößenbeschränkung, d.h.  $|u(t)| \geq u_{\max}$ , zu vermeiden. Das bedeutet, dass die Integration des Regelfehlers bei aktiver Stellgrößenbeschränkung unterbunden wird, also

$$\frac{du_i}{dt} = 0 \quad \text{für} \quad |u(t)| \geq u_{\max}. \quad (5.6)$$

Eine andere häufig angewandte Anti-Windup Strategie ist in Bild 5.5 dargestellt. Sie besteht darin, dass bei aktiver Stellgrößenbeschränkung die Integration nicht vollständig angehalten wird, sondern dass dem Aufwickeln des Integrators proportional zur „Verletzung“ der Stellgrößenbeschränkung entgegengewirkt wird. Für den in Bild 5.5 dargestellten PI-Regler gilt also

$$\frac{du_i}{dt} = K_I e - \frac{1}{T_a} (u - u^*), \quad (5.7)$$

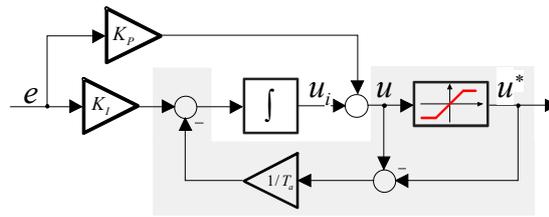


Bild 5.5: PI-Regler mit Anti-Windup Maßnahme (grau hinterlegt)

wobei  $T_a$  eine positive Konstante<sup>2</sup> ist. Die Einstellung von  $T_a$  erfolgt üblicherweise empirisch, in der Literatur existieren aber auch Berechnungsvorschläge, wie z.B.

$$T_a = \sqrt{T_N T_V} \quad \text{oder} \quad T_a = \frac{1}{2} (T_N + T_V)$$

für PID-Regler.

**B** Gegeben sei eine Regelstrecke, deren dynamisches Verhalten im interessierenden Betriebsbereich durch die Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{s + 0.9}{s^2 + 0.5s + 1}$$

beschrieben werden kann. Für die betragsmäßig beschränkte Stellgröße  $u$  gilt

$$|u(t)| \leq u_{\max} = 1.5.$$

Als Regler wurde ein PI-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$R(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{s T_N} \right) \quad \text{mit} \quad K_P = 3, \quad T_N = 0.5$$

ausgewählt. Weiters wurde die in Bild 5.5 dargestellte Anti-Windup-Maßnahme realisiert, wobei

$$T_a = 0.1$$

gesetzt wurde. In Bild 5.6 sind die Verläufe der Regelgröße  $y$  und der Stellgröße  $u$  graphisch dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass es ohne Anti-Windup-Maßnahme (blaue Kurven) zu einem starken Überschwingen der Regelgröße kommt, was auf das oben beschriebene „Aufwickeln“ des Integrieres zurück zu führen ist. ■

## 5.4 Einstellregeln für PID-Regler

Mit Hilfe von so genannten Einstellregeln können die Reglerparameter von PID-Reglern relativ geradlinig ermittelt werden. Die hierfür benötigten charakteristischen Streckenparameter

<sup>2</sup> $T_a$  wird auch als "tracking time constant" bezeichnet.

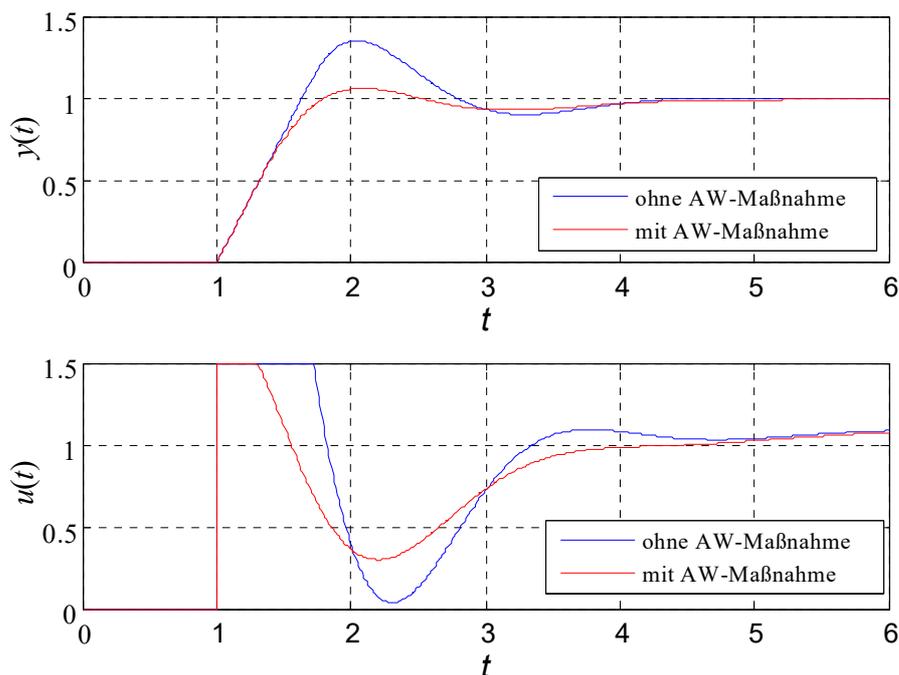


Bild 5.6: Verläufe von Regelgröße (Bild oben) und Stellgröße (Bild unten) ohne und mit Anti-Windup Maßnahme

werden experimentell ermittelt. Die gesuchten Reglerparameter werden dann als Funktion dieser Streckenparameter angegeben, die entsprechenden Relationen sind tabellarisch zusammengefasst. Man beachte, dass hier nur einige der unzähligen Einstellregeln für PID-Regler vorgestellt werden. Weiters ist zu beachten, dass die mittels der Einstellregeln gefundenen Reglerparameter nur als Ausgangspunkt für die Reglerauslegung dienen, die endgültigen Werte der Parameter werden durch nachfolgendes „Feintuning“ ermittelt.

#### 5.4.1 Einstellregeln nach Ziegler-Nichols

Die beiden Methoden nach Ziegler und Nichols wurden im Jahr 1942 vorgestellt und gehören seitdem zu den klassischen Einstellregeln für PID-Regler. Man unterscheidet zwischen der Wendetangenten-Methode („open-loop method“) und der Stabilitätsrand-Methode („closed loop method“). Erfahrungsgemäß führt die Anwendung der Ziegler-Nichols Regeln im Allgemeinen zu schwach gedämpften Regelkreisen.

##### Wendetangenten-Methode

Bei diesem Verfahren wird vorausgesetzt, dass die Sprungantwort der Regelstrecke gefahrlos experimentell ermittelt werden kann. Wie in Bild 5.7 angedeutet, wird die Wendetangente der Sprungantwort eingezeichnet und die Streckenverstärkung  $K_S$ , die Verzugszeit  $T_v$  und die Ausgleichszeit  $T_g$  werden abgelesen. Die Reglerdimensionierung erfolgt dann mit Hilfe von

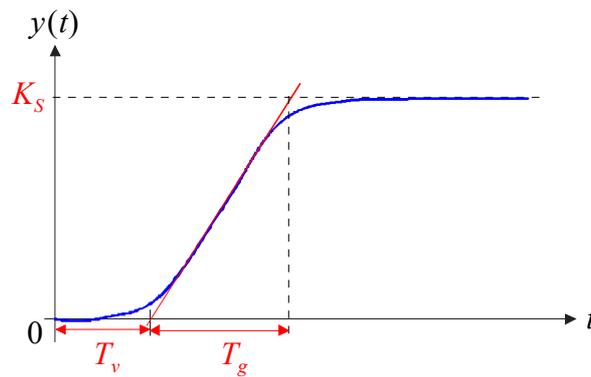


Bild 5.7: Zur Wendetangenten-Methode nach Ziegler-Nichols

Tabelle 2.

Reglertyp	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$\frac{T_g}{K_S T_v}$	$\infty$	0
PI-Regler	$0.9 \frac{T_g}{K_S T_v}$	$3.33 T_v$	0
PID-Regler	$1.2 \frac{T_g}{K_S T_v}$	$2 T_v$	$0.5 T_v$

Tabelle 2: Reglerparameter, Wendetangenten-Methode

### Stabilitätsrand-Methode

Bei diesem Ansatz werden die benötigten Streckeninformationen aus dem dynamischen Verhalten des geschlossenen Regelkreises ermittelt, wobei als Regler zunächst ein P-Glied verwendet wird. Der Verstärkungsfaktor des P-Reglers wird solange variiert, bis die Regelgröße  $y$  bei sprunghörmiger Änderung der Referenzgröße eine ungedämpfte Schwingung vollführt, das System wird also bis an den „Stabilitätsrand“ gebracht. Die Periodendauer  $T_k$  der Schwingung wird kritische Periode genannt, der zugehörige Verstärkungsfaktor des Reglers wird mit  $K_k$

bezeichnet. Die Reglerdimensionierung basiert auf den in Tabelle 3 angegebenen Relationen.

Reglertyp	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$0.5 K_k$	$\infty$	0
PI-Regler	$0.4 K_k$	$0.8 T_k$	0
PID-Regler	$0.6 K_k$	$0.5 T_k$	$0.12 T_k$

Tabelle 3: Reglerparameter, Stabilitätsrand-Methode

Bei "trägen" Regelstrecken, also Systemen mit sehr großer dominanter Zeitkonstante, kann die Durchführung der Stabilitätsrand-Methode mit einem großen zeitlichen Aufwand verbunden sein. Durch leichte Modifikationen kann die Methode auch zum "Autotuning", d.h. zur selbständigen Einstellung, von Reglerparametern eingesetzt werden. Dabei wird der P-Regler durch ein geeignetes nichtlineares Element ersetzt. Dies hat zur Folge, dass sich die Dauerschwingung der Regelgröße automatisch einstellt.

### 5.4.2 Methode der Summenzeitkonstante („T-Summen Regel“)

Aus der Sprungantwort der Regelstrecke wird die Streckenverstärkung  $K_S$  und die so genannte Summenzeitkonstante  $T_\Sigma$  abgelesen. Wie in Bild 5.8 zu erkennen ist, sind für  $t = T_\Sigma$  die beiden

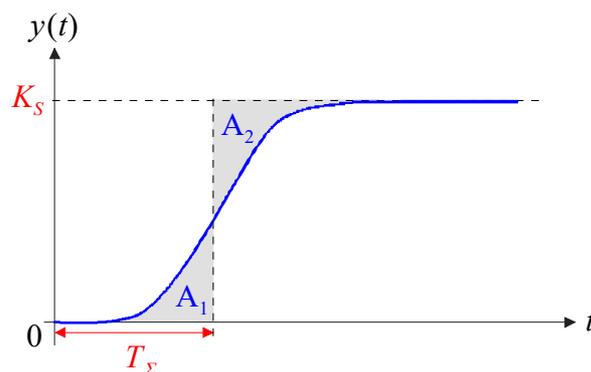


Bild 5.8: Zur Methode der Summenzeitkonstante

Flächen  $A_1$  und  $A_2$  gleich groß. Die Erfahrung zeigt, dass die Ermittlung von  $T_\Sigma$  auch bei stark verrauschter Sprungantwort hinreichend genau durchgeführt werden kann - ganz im Gegensatz zur Wendetangente beim Ziegler-Nichols Verfahren. Die Summenzeitkonstante ist

offensichtlich ein Maß für die „Reaktionsfreudigkeit“ des Systems, d.h. je kleiner  $T_\Sigma$  ist, umso schneller reagiert der Streckenausgang auf sprunghafte Änderungen am Streckeneingang. In Tabelle 4 sind die vorgeschlagenen Reglereinstellungen zusammengefasst.

Reglertyp	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P-Regler	$\frac{1}{K_S}$	$\infty$	0
PI-Regler	$\frac{1}{2 K_S}$	$0.5 T_\Sigma$	0
PD-Regler	$\frac{1}{K_S}$	$\infty$	$0.33 T_\Sigma$
PID-Regler	$\frac{1}{K_S}$	$0.66 T_\Sigma$	$0.17 T_\Sigma$

Tabelle 4: Reglerparameter, T-Summen Regel

# Kapitel 6

## Englische Fachbegriffe

Anfangswertsatz	initial value theorem
Anfangszustand	initial state
autonom	autonomous
BIBO Stabilität	BIBO stability
Determinante	determinant
Differentialgleichung	differential equation
Dirac Impuls	Dirac delta function
Durchgriffsterm	direct transmission term
Eingrößensystem	single input - single output system
Einheitsmatrix	identity matrix
Einheitssprung	unit step
Endwertsatz	final value theorem
Faltung	convolution
Faltungsintegral	convolution integral
Frequenzgang	frequency response
Führungsgröße	reference signal
Impuls	impulse
instabil	unstable
Koeffizient	coefficient
konjugiert komplex	conjugate complex
kürzen	to cancel
Kürzung	cancellation
Laplace Transformation	Laplace transform
linear, zeitinvariant (LZI)	linear, time-invariant (LTI)
linear unabhängig	linearly independent
Linearisierung	linearization
Matrix	matrix, <i>pl.</i> matrices
adjungierte	adjoint matrix
diagonale	diagonal matrix
inverse	inverse matrix

quadratische .....	square matrix
reguläre .....	nonsingular matrix
singuläre .....	singular matrix
symmetrische .....	symmetric matrix
transponierte .....	transpose matrix, transposed matrix
Nenner .....	denominator
Normalform .....	canonical form
Nullstelle .....	zero
Parallelschaltung .....	parallel connection
PID-Regler .....	PID controller
PN plan .....	pole-zero map
Pol, Polstelle .....	pole
Polynom .....	polynomial
Hurwitz- .....	Hurwitz polynomial
monisches .....	monic polynomial
Nenner- .....	denominator polynomial
Zähler- .....	numerator polynomial
Rang .....	rank
realisierbar .....	proper
Regelfehler .....	control error
Regelgröße .....	variable to be controlled
Reihenschaltung .....	series connection
Routh Schema .....	Routh test
Rückkopplung .....	feedback
Ruhelage .....	equilibrium point
Sprungantwort .....	step response
sprungfähig .....	biproper
Sprungfunktion .....	step function
Stabilität .....	stability
BIBO .....	BIBO stability
Stellgröße .....	actuating signal, manipulated variable
Störgröße .....	disturbance
Systemordnung .....	system order
teilerfremd .....	coprime
Übertragungsfunktion .....	transfer function
Vektor .....	vector
Spalten- .....	column vector
Zeilen- .....	row vector
Zähler .....	numerator
zeitinvariant .....	time-invariant
zeitvariant .....	time-variant
Zustandsebene .....	state plane
-modell .....	state model
-raum .....	state space

-variable ..... state variable  
-vektor ..... state vector



# Literatur

- [1] CHEN C.T.: Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods, Saunders College Publishing, 1993
- [2] FÖLLINGER \_ O.: Regelungstechnik, 6.Auflage, Hüthig Verlag, 1990
- [3] HORN M., DOURDOUMAS N.: Regelungstechnik, Pearson Verlag, 2004
- [4] LANDGRAF C., SCHNEIDER G.: Elemente der Regelungstechnik, Springer Verlag, 1970
- [5] LUNZE J.: Regelungstechnik 1, 3. Auflage, Springer Verlag, 2001