**Name:** ______________________ **Matr.-Nr.:** ____________

## Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei folgendes lineare zeitinvariante Zustandsraummodell mit der Eingangsgröße $u$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

a) Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \boldsymbol{\delta}u$$

in Diagonalform vorliegt. Geben Sie die Parameter $\mathbf{\Lambda}$ und $\boldsymbol{\delta}$ an.

b) Ermitteln Sie alle Ruhelagen des ursprünglichen Systems für die konstante Eingangsgröße $u = u_\mathrm{R} = 1$.

c) Sind die Systeme asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch!*)

d) Skizzieren Sie für $u(t) = 0$ den Verlauf der Trajektorien in der $x_1$-$x_2$-Ebene für die Anfangszustände

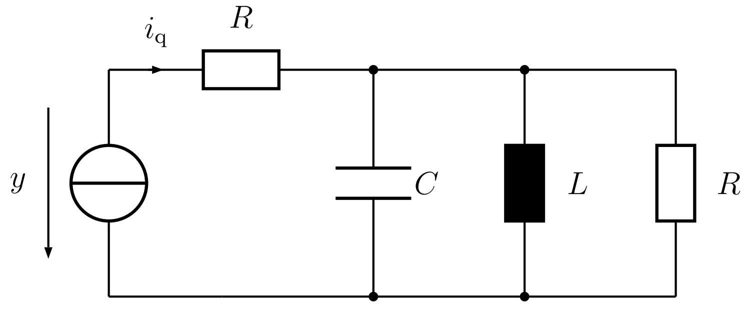
$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

e) Skizzieren Sie in der $x_1$-$x_2$-Ebene den Trajektorienverlauf für die konstante Eingangsgröße $u(t) = u_\mathrm{R} = 1$ und den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$.

*Bei d) und e) müssen der Richtungssinn der Trajektorien für wachsende Zeiten $t$ sowie deren asymptotischer Verlauf ($t \to \infty$) erkennbar sein!*

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Stromquelle mit dem Quellenstrom $i_\mathrm{q}$, zwei ohmschen Widerständen mit dem Wert $R$, einer Kapazität $C$ und einer Induktivität $L$. Der Spannungsabfall über der Stromquelle wird mit $y$ bezeichnet.




Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße $i_\mathrm{q} =: u$ und der Ausgangsgröße $y$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

**Name:** ______________________ **Matr.-Nr.:** ____________

## Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei folgendes lineare zeitinvariante Zustandsraummodell mit der Eingangsgröße $u$ und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

a) Bestimmen Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ so, dass das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \boldsymbol{\delta}u$$

in Diagonalform vorliegt. Geben Sie die Parameter $\mathbf{\Lambda}$ und $\boldsymbol{\delta}$ an.

b) Ermitteln Sie alle Ruhelagen des ursprünglichen Systems für die konstante Eingangsgröße $u = u_\mathrm{R} = 1$.

c) Sind die Systeme asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch!*)

d) Skizzieren Sie für $u(t) = 0$ den Verlauf der Trajektorien in der $x_1$-$x_2$-Ebene für die Anfangszustände

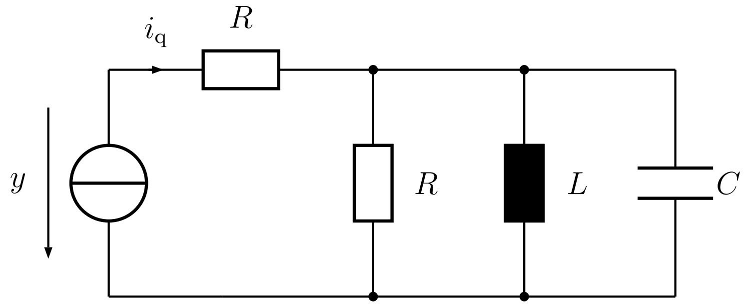
$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

e) Skizzieren Sie in der $x_1$-$x_2$-Ebene den Trajektorienverlauf für die konstante Eingangsgröße $u(t) = u_\mathrm{R} = 1$ und den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix}^T$.

*Bei d) und e) müssen der Richtungssinn der Trajektorien für wachsende Zeiten t sowie deren asymptotischer Verlauf ($t \to \infty$) erkennbar sein!*

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Stromquelle mit dem Quellenstrom $i_\mathrm{q}$, zwei ohmschen Widerständen mit dem Wert $R$, einer Kapazität $C$ und einer Induktivität $L$. Der Spannungsabfall über der Stromquelle wird mit $y$ bezeichnet.




Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße $i_\mathrm{q} =: u$ und der Ausgangsgröße $y$ auf. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein lineares zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

**Systemtechnik**
2. Teilklausur WS 15/16
Gruppe A

**Name:** ______________________ **Matr.-Nr.:** ______________

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

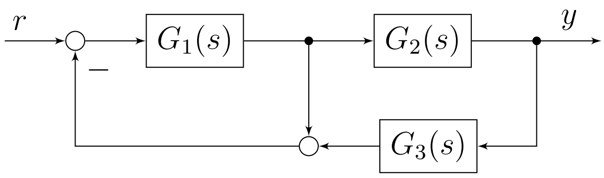
Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters $\alpha$, für den die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s^3 + (1+\alpha)s^2 + (2+\alpha)s + 2(1+\alpha)}$$

die BIBO-Eigenschaft besitzt.

### Aufgabe 2 (3 Punkte)

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung dreier Übertragungsfunktionen $G_1(s), G_2(s)$ und $G_3(s)$:




Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion

$$T(s) = \left.\frac{\overline{y}(s)}{\overline{r}(s)}\right|_{\text{AW}=0}$$

obiger Zusammenschaltung.

### Aufgabe 3 (3 Punkte)

Gegeben sei ein zeitdiskretes Übertragungssystem mit der Eingangsfolge $(u_k)$ und der Ausgangsfolge $(y_k)$, dessen Verhalten durch die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$$

beschrieben wird. Als Eingangsfolge wird der Einheitssprung

$$u_k = \sigma_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

gewählt. Ermitteln Sie die ersten vier Elemente der zugehörigen Ausgangsfolge $(y_k)$, d.h. $y_0$, $y_1$, $y_2$ und $y_3$. (*Hinweis:* Es ist möglich, aber nicht notwendig, die gesamte Folge $(y_k)$ zu ermitteln.)

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik

**Systemtechnik**
2. Teilklausur WS 15/16
Gruppe B

**Name:** ______________________ **Matr.-Nr.:** ____________

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich des reellen Parameters $\alpha$, für den die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^2 + s}{s^3 + (3 + \alpha)s^2 + \alpha s + 6 + 2\alpha}$$

die BIBO-Eigenschaft besitzt.

### Aufgabe 2 (3 Punkte)

Betrachten Sie folgende Zusammenschaltung dreier Übertragungsfunktionen $P_1(s), P_2(s)$ und $P_3(s)$:

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion

$$T(s) = \left.\frac{\overline{y}(s)}{\overline{r}(s)}\right|_{\text{AW}=0}$$

obiger Zusammenschaltung.

### Aufgabe 3 (3 Punkte)

Gegeben sei ein zeitdiskretes Übertragungssystem mit der Eingangsfolge $(u_k)$ und der Ausgangsfolge $(y_k)$, dessen Verhalten durch die Differenzengleichung

$$y_k - \frac{1}{2}y_{k-1} - \frac{1}{2}y_{k-2} - u_{k-1} = 0$$

beschrieben wird. Als Eingangsfolge wird die Folge

$$u_k = (-1)^k \sigma_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ (-1)^k & k \geq 0 \end{cases}$$

gewählt. Ermitteln Sie die zugehörige Ausgangsfolge $(y_k)$.

**Name:** ____________________ **Matr.-Nr.:** ____________

### Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße $y$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$
$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

a) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des Systems.

b) Berechnen Sie den Zeitverlauf des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ und der Ausgangsgröße $y(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$.

c) Stellen Sie den im vorigen Punkt ermittelten Verlauf von $y(t)$ graphisch dar. (*Beschriften Sie die Achsen Ihres Diagramms!*)

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes zeitdiskretes System mit der Eingangsfolge $(u_k)$ und der Ausgangsfolge $(y_k)$. Die Systemantwort für den Einheitssprung $u_k = \sigma_k$, d.h. die *Sprungantwort* $(h_k)$ ist durch

$$h_k = 2^k + \frac{1}{2^k}$$

gegeben.

a) Ermitteln Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems in der Form

$$G(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}.$$

b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Geben Sie zu $G(z)$ ein Zustandsraummodell in *erster Standardform* an.