

Aufgabe 1:

Entwerfen Sie für das lineare zeitinvariante System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}$$

mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y einen Zustandsbeobachter der Form

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}(y - \hat{y}) + \mathbf{b}u$$

$$\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$$

so, dass alle Eigenwerte der Schätzfehlerdynamik ($\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$) bei $s = -3$ liegen.

Aufgabe 2:

Für das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [1 \ 0] \mathbf{x}.$$

mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y soll ein Beobachter der Form

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$$

entworfen werden. Welche der folgenden Möglichkeiten für den Vektor \mathbf{l} sind zulässig?

a) $\mathbf{l} = [2 \ 0]^T$

d) $\mathbf{l} = [5 \ 3]^T$

b) $\mathbf{l} = [0 \ 1]^T$

e) $\mathbf{l} = [3 \ 1]^T$

c) $\mathbf{l} = [8 \ 10]^T$

f) $\mathbf{l} = [0 \ 2]^T$

Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.

Aufgabe 3:

Ihr regelungstechnisch unerfahrener Kollege hat für eine Regelstrecke

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}\end{aligned}$$

mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y einen Trivialen Beobachter der Form

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u$$

entworfen. Mit welchen Argumenten werden Sie ihn davon überzeugen, dass diese Wahl nicht gut ist?

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die lineare zeitinvariante Regelstrecke mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [2 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}\end{aligned}$$

- Berechnen Sie die Streckenübertragungsfunktion $P(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}$
- Berechnen Sie einen Zustandsregler der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + Vr$$

so, dass für die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$$

gilt.

Aufgabe 5:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

- Geben Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$ in Form einer *unendlichen Reihe* an.
- Ermitteln Sie ausgehend von dieser Reihendarstellung von $\Phi(t)$ nachvollziehbar $\Phi(0)$ und $\left. \frac{d}{dt} \Phi \right|_{t=0}$.
- Geben Sie eine Reihendarstellung der Inversen der Transitionsmatrix $\Phi^{-1}(t)$ an.

Aufgabe 6:

Es sei folgendes Zustandsmodell mit der Eingangsgröße u , der Ausgangsgröße y , dem Zustandsvektor \mathbf{x} und dem reellen Parameter α gegeben:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

a) Ermitteln Sie für welche Werte von α das System *nicht steuerbar* ist.

Es gelte nun $\alpha = 4$.

b) Ist es möglich, einen Zustandsregler der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$$

so zu berechnen, dass die Dynamik des geschlossenen Regelkreises durch die Eigenwerte bei $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$ charakterisiert ist? Wenn ja, geben Sie \mathbf{k}^T an.

Aufgabe 7:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit Eingang u , Ausgang y und Zustandsvektor \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ so durch, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u, \\ y &= \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{z} \end{aligned}$$

in Regelungsnormalform vorliegt.

Aufgabe 8:

Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

mit der Eingangsgröße u , dem Zustandsvektor \mathbf{x} und der Ausgangsgröße y . Geben Sie alle Ruhelagen des Systems an, die zur Ausgangsgröße $y(t) = 5$ führen.

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die Transitionsmatrix

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-2t}}{3} + \frac{e^{3t}}{3} + \frac{e^t}{3} & \frac{e^{-2t}}{3} + \frac{e^{3t}}{3} - \frac{2e^t}{3} & \frac{5e^t}{6} - \frac{2e^{3t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{6} \\ e^{-2t} - \frac{2e^{3t}}{3} - \frac{e^t}{3} & e^{-2t} - \frac{2e^{3t}}{3} + \frac{2e^t}{3} & \frac{4e^{3t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{5e^t}{6} \\ \frac{2e^{-2t}}{3} - \frac{2e^{3t}}{3} & \frac{2e^{-2t}}{3} - \frac{2e^{3t}}{3} & \frac{4e^{3t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{3} \end{bmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die dazugehörige Systemmatrix \mathbf{A} und deren Eigenwerte.
 b) Ist das System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

asymptotisch stabil?

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein zeitkontinuierliches lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u , der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für $u(t) = 0$ und $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 2]^T$.

Aufgabe 3:

Für ein LZI System

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

soll ein Regler der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + Vr$$

entworfen werden. In einem ersten Schritt wird der Parametervektor \mathbf{k}^T so berechnet, dass die Matrix

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$$

eine Hurwitzmatrix ist. Zeigen Sie in nachvollziehbarer Weise, wie die Verstärkung V gewählt werden muss, damit die Ausgangsgröße $y(t)$ einer konstanten Referenz $r(t) = r_0$ asymptotisch nachgeführt wird.

Aufgabe 4:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

- Geben Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$ in Form einer *unendlichen Reihe* an.
- Ermitteln Sie ausgehend von dieser Reihendarstellung von $\Phi(t)$ nachvollziehbar $\Phi(0)$ und $\left. \frac{d}{dt}\Phi \right|_{t=0}$.
- Geben Sie eine Reihendarstellung der Inversen der Transitionsmatrix $\Phi^{-1}(t)$ an.

Aufgabe 5:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell einer Strecke mit der Eingangsgröße u , dem Zustandsvektor \mathbf{x} und der Ausgangsgröße y :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

- Ermitteln Sie ein Regelgesetz der Form $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + Vr$ so, dass die zugehörige Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{4}{s+1}$$

lautet.

- Ist der geschlossene Regelkreis beobachtbar? *Begründen Sie Ihre Antwort.*

Aufgabe 6:

Gegeben sei folgendes Zustandsraummodell einer Regelstrecke

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 & -2 & 11 & 6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)
- Ermitteln Sie ein Zustandsregelgesetz der Form $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$, sodass der geschlossene Kreis folgendes charakteristische Polynom aufweist:

$$w(s) = (s+1)^6(s+2) = s^7 + 8s^6 + 27s^5 + 50s^4 + 55s^3 + 36s^2 + 13s + 2$$

Aufgabe 7:

Für das System

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [1 \quad 0] \mathbf{x}.\end{aligned}$$

mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y soll ein Beobachter der Form

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

entworfen werden. Welche der folgenden Möglichkeiten für den Vektor \mathbf{l} sind zulässig?

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $\mathbf{l} = [2 \quad 0]^T$ | d) $\mathbf{l} = [5 \quad 3]^T$ |
| b) $\mathbf{l} = [0 \quad 1]^T$ | e) $\mathbf{l} = [3 \quad 1]^T$ |
| c) $\mathbf{l} = [8 \quad 10]^T$ | f) $\mathbf{l} = [0 \quad 2]^T$ |

Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

welches *nicht steuerbar* ist. Zeigen Sie, dass zumindest ein Eigenwert des Systems nicht durch ein Zustandsregelgesetz der Form $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ verändert werden kann, d.h. dass zumindest ein Eigenwert der Matrix \mathbf{A} auch ein Eigenwert der Systemmatrix des geschlossenen Kreises ist. (*Hinweis:* Gehen Sie dazu vom Hautus-Kriterium für die Steuerbarkeit aus.)

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes System zweiter Ordnung mit der Eingangsgröße u , dem Zustandsvektor \mathbf{x} und der Ausgangsgröße y :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -\alpha] \mathbf{x}.\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die Streckenübertragungsfunktion $P(s)$ in Abhängigkeit des reellen Parameters α .
- Ermitteln Sie den reellen Parameter α sowie ein Regelgesetz der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + Vr$$

so, dass die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$T(s) = \frac{1}{2} \frac{s+2}{s^2+2s+1}$$

erfüllt.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass ein LZI-System der Form

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2] \mathbf{x}\end{aligned}$$

(Steuerbarkeitsnormalform) immer steuerbar ist. Hierbei sind $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ und $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ reelle Parameter.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

welches *nicht steuerbar* ist. Zeigen Sie, dass zumindest ein Eigenwert des Systems nicht durch ein Zustandsregelgesetz der Form $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$ verändert werden kann, d.h. dass zumindest ein Eigenwert der Matrix \mathbf{A} auch ein Eigenwert der Systemmatrix des geschlossenen Kreises ist. (*Hinweis:* Gehen Sie dazu von dem Hautus-Kriterium für die Steuerbarkeit aus.)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Systems

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\end{aligned}$$

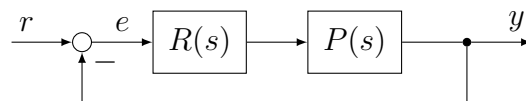
mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y , invariant bezüglich der regulären Zustandstransformationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$$

ist, wobei \mathbf{z} den transformierten Zustandsvektor symbolisiert.

Aufgabe 5:

Betrachten Sie einen Standardregelkreis



mit Streckenübertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{(s^2 + 2s + 1)(s - 1)}{(s + 1)(s - 2)(s - 3)^2}.$$

- Entwerfen Sie eine flachheitsbasierte Vorsteuerung so, dass der Ausgang in der Zeit $T_T = 1$ von $y(0) = 1$ zu $y(T_T) = -3$ überführt wird.
- Zeichnen Sie das Strukturbild des resultierenden Regelkreises.

Hinweis: Verwenden Sie die angegebene Tabelle.

Aufgabe 6:

Kann es sich bei folgenden Matrizen $\Phi_i(t)$ grundsätzlich um Transitionsmatrizen von LZI Systemen handeln?

$$\text{a) } \Phi_1(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{3t} + e^t & e^t - e^{3t} \\ e^t - e^{3t} & e^{3t} + e^t \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \Phi_2(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} + e^{4t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{2t} + e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \Phi_3(t) = \begin{bmatrix} e^{-6t} & e^{-3t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch.

Aufgabe 7:

Entwerfen Sie für das lineare zeitinvariante System

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y einen Zustandsbeobachter der Form

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}(y - \hat{y}) + \mathbf{b}u \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

so, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix des Schätzfehlers $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ bei $s = -3$ liegen.

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein lineares System mit der Eingangsgröße u , der Ausgangsgröße y und der Zustandsgröße x :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x + 4u, \\ y &= x.\end{aligned}$$

Entwerfen Sie einen *PI-Zustandsregler*

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= r - y \\ u &= -kx - k_i\varepsilon - k_p(r - y)\end{aligned}$$

mit dem Proportionalbeiwert $k_p = -3$. Berechnen Sie die Werte der Parameter k und k_i so, dass der geschlossene Regelkreis eine Dynamikmatrix mit den Eigenwerten $s_1 = s_2 = -2$ aufweist.

Formeln und Tabellen

Koeffizienten einer Solltrajektorie der Ordnung $p = 2n + 1$

n	$\tilde{\gamma}_{n+1}$	$\tilde{\gamma}_{n+2}$	$\tilde{\gamma}_{n+3}$	$\tilde{\gamma}_{n+4}$	$\tilde{\gamma}_{n+5}$	$\tilde{\gamma}_{n+6}$
1	3	-2				
2	10	-15	6			
3	35	-84	70	-20		
4	126	-420	540	-315	70	
5	462	-1980	3465	-3080	1386	-252

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Systems

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\end{aligned}$$

mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y , invariant bezüglich der regulären Zustandstransformationen

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$$

ist, wobei \mathbf{z} den transformierten Zustandsvektor symbolisiert.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie das lineare zeitinvariante System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

mit dem Zustandsvektor \mathbf{x} .

- Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$.
- Invertieren Sie die Transitionsmatrix und geben Sie $\Phi^{-1}(t)$ an.
- Berechnen Sie den Anfangszustand \mathbf{x}_0 so, dass $\mathbf{x}(t=3) = [1 \quad -5]^T$ gilt.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das lineare zeitinvariante Modell

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}\end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor \mathbf{x} , der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y . Ist das gegebene System *steuer-* bzw. *beobachtbar*?

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die lineare zeitinvariante Regelstrecke mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [2 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

a) Berechnen Sie die Streckenübertragungsfunktion $P(s) = \frac{\mu(s)}{\nu(s)}$

b) Berechnen Sie einen Zustandsregler der Form

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + Vr$$

so, dass für die Führungsübertragungsfunktion

$$T(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{r}(s)} = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$$

gilt.

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die lineare zeitinvariante Regelstrecke mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [10 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

Berechnen Sie einen PI-Zustandsregler der Form

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = r - y$$

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} - k_i \varepsilon - k_p (r - y)$$

so, dass für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$T(s) = \frac{1}{10} \frac{\mu(s)}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

gilt, wobei $\mu(s)$ das Zählerpolynom der Streckenübertragungsfunktion $P(s)$ darstellt. Zusätzlich soll ein Eigenwert der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises bei $s_1 = -1$ liegen.

Aufgabe 6:

Entwerfen Sie für das lineare zeitinvariante System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x}$$

mit Zustandsvektor \mathbf{x} , Eingangsgröße u und Ausgangsgröße y einen Zustandsbeobachter der Form

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{l}(y - \hat{y}) + \mathbf{b}u$$
$$\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$$

so, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix des Schätzfehlers $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ bei $s = -3$ liegen.

Aufgabe 7:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes zeitdiskretes System mit Eingang u_k , Ausgang y_k und Zustandsvektor \mathbf{x}_k

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u_k,$$
$$y_k = [1 \quad 0] \mathbf{x}_k.$$

Führen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x}_k = \mathbf{T}\mathbf{z}_k$ so durch, dass das transformierte System

$$\mathbf{z}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k,$$
$$y_k = \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{z}_k$$

in Regelungsnormalform vorliegt.

Bitte wenden!

Aufgabe 8:

Für das *stabilisierbare* LZI System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

mit dem Zustandsvektor \mathbf{x} und der Eingangsgröße u wird ein Regler der Form

$$u = - [1 \quad k] \mathbf{x}$$

mit $k \in \mathbb{R}$ verwendet.

- a) Ermitteln Sie den Wert k so, dass *ein* Eigenwert der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises bei $s_1 = -2$ liegt.
- b) Geben Sie das charakteristische Polynom von $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$ an.

Hinweis: Für die Wahl des zweiten Eigenwertes gibt es nur eine Möglichkeit.