Schriftliche Prüfung aus
Nichtlineare elektrische Systeme
Teil: Dourdoumas
am 06. 10. 2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	7	2	6
erreichte Punkte			

Die Angabeblätter sind am Ende der Prüfung wieder abzugeben!

Aufgabe 1:

Gegeben sei das Modell eines nichtlinearen Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 4\left(\frac{dy}{dt}\right)^4 + 3y^2 - 6u.$$

a) Führen Sie die Zustandsvariablen $x_1 := y$ und $x_2 := \frac{dy}{dt}$ ein und geben Sie das entsprechende Modell der Form $\frac{dx}{dt} = f(\boldsymbol{x}, u)$ mit $\boldsymbol{x}^T = [x_1 \;\; x_2]$ an.

b) Berechnen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems in Abhängigkeit der Eingangsgröße $u(t) = u_R$.

c) Ermitteln Sie lineare Ersatzmodelle der Form

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}\nu \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_R + \boldsymbol{\xi}\,,\; u = u_R + \nu \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\xi}^T = [\xi_1 \;\; \xi_2]$$

welche das Systemverhalten für "kleine Auslenkungen" $\boldsymbol{\xi}$ und ν aus den ermittelten Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

d) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter der Ruhelagen des nichtlinearen Systems für den Fall $u_R = 0.5$.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie folgende Systeme mit der Eingangsgröße u (Fälle a und b) bzw. dem Anfangszustand y_0 (Fall c) und der Ausgangsgröße y auf Linearität. *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

a) $y(t) = \int_0^t \cos(T)u(\mathrm{T})d\mathrm{T}$

b) $y(t) = -5\sqrt{u^2}$

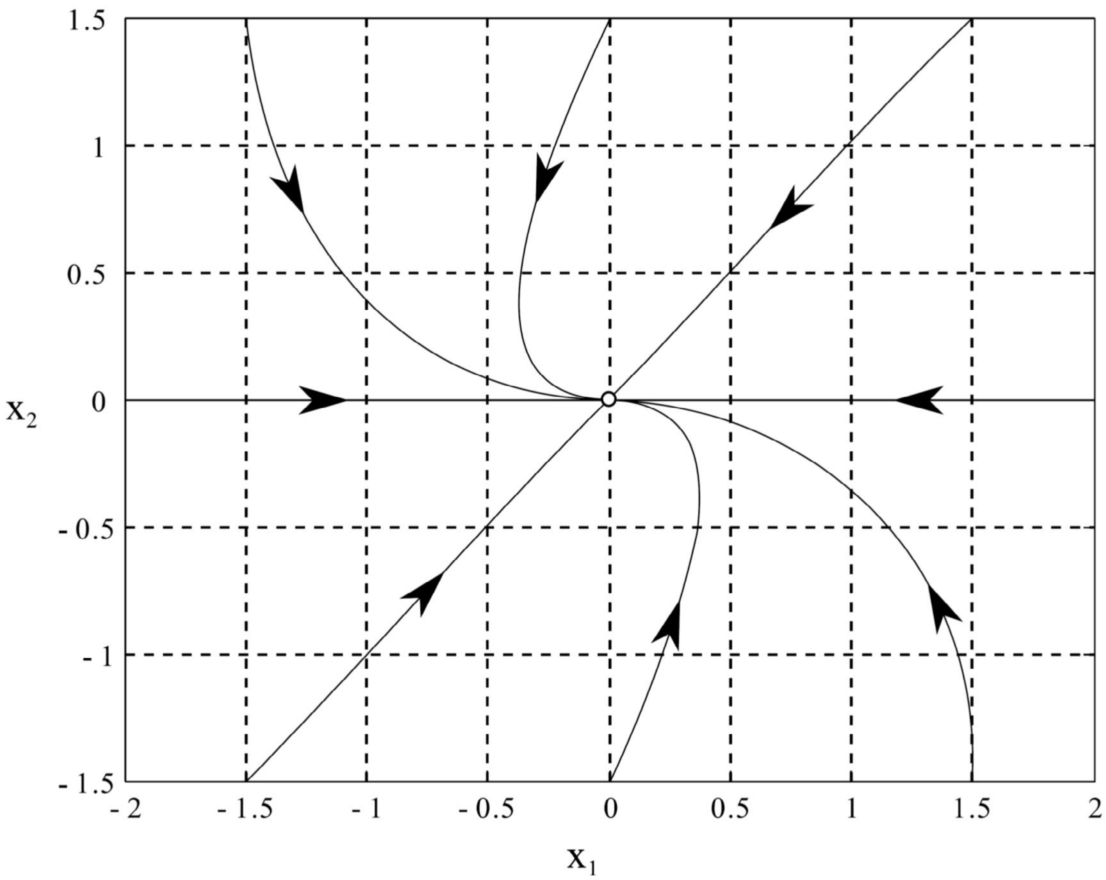
c) $\frac{dy}{dt} = -3y \qquad \text{mit} \qquad y(t_0) = y_0$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes Trajektorienbild eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ liegen bei $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$.



a) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten s_1 bzw. s_2 passende Eigenvektoren $\boldsymbol{p}_1$ und $\boldsymbol{p}_2$.

b) Ermitteln Sie die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ des Systems, wenn es zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Punkten

i) $\boldsymbol{x}^T(0) = [\ 0\ ,\ 1\ ]$
ii) $\boldsymbol{x}^T(0) = [-2\ ,-1\ ]$

gestartet wird und tragen Sie die zugehörigen Trajektorien im Trajektorienbild ein.

c) Berechnen Sie die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$.

Schriftliche Prüfung aus
Nichtlineare elektrische Systeme
Teil: Dourdoumas
am 12. 12. 2014

Name / Vorname(n):

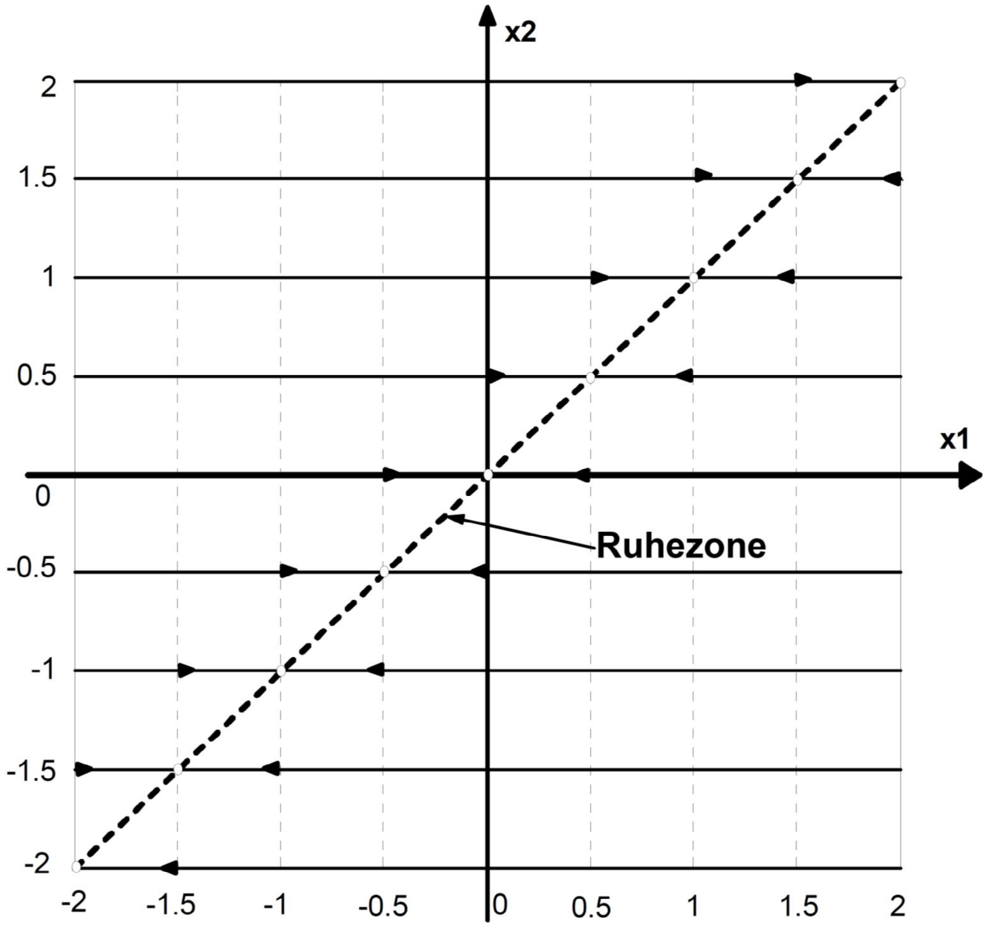
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	8	8
erreichte Punkte		

Die Angabeblätter sind am Ende der Prüfung wieder abzugeben!

Aufgabe 1:

Für ein freies System 2. Ordnung der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} := [x_1 \quad x_2]$ ist das zugehörige Trajektorienbild gegeben:



Außerdem ist die zugehörige Systemmatrix $\mathbf{A}$ (teilweise) gegeben: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & . \\ . & . \end{bmatrix}$.

Aufgrund einer fehlerhaften Datenübertragung sind leider einige Elemente verloren gegangen.

a) Bestimmen Sie die fehlenden Elemente der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

b) Ermitteln Sie die zwei Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

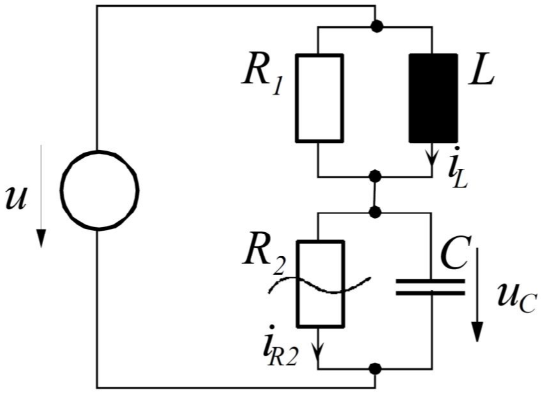
c) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

d) Ist das System stabil, asymptotisch stabil oder instabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an.

HINWEIS: Benutzen Sie das angegebene Trajektorienbild. Zur Beantwortung der Fragen sind keine langen Rechnungen nötig!

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, der Induktivität L, der Kapazität C und dem Ohmschen Widerstand R_1 sowie dem nichtlinearen Widerstand R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert.



Die Kennlinie des nichtlinearen Widerstands R_2 wird durch die Funktion

$$i_{R_2} = k \cdot u_C^2 \quad \text{mit} \quad k > 0$$

beschrieben, wobei k eine Konstante ist. Hierbei sind u_C die Spannung am Kondensator, i_{R_2} der Strom durch den nichtlinearen Widerstand und i_L der Strom durch die Induktivität.

a) Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [i_L \quad u_C]^{\mathrm{T}}$ ein und zeigen Sie, dass das Netzwerk durch das Modell

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 - \frac{1}{C}k \cdot x_2^2 + \frac{1}{RC}u \end{bmatrix}$$

beschrieben werden kann.

Für bestimmte Parameterwerte des Netzwerkes ergibt sich folgendes Modell:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}u \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_2^2 + \frac{1}{2}u \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_{\mathrm{R}}$ von diesem System für die konstante Eingangsgröße

$u = u_R = 0{,}25$.

c) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}\nu \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_R + \boldsymbol{\xi} \quad \text{und} \quad u = u_R + \nu$$

welche das Systemverhalten für *"kleine Auslenkungen"* $\boldsymbol{\xi}$ und ν aus den ermittelten Ruhelagen näherungsweise beschreiben. Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des *nichtlinearen* Systems. (Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.)

Schriftliche Prüfung aus
Nichtlineare elektrische Systeme
Teil: Dourdoumas
am 28. 01. 2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	4	6
erreichte Punkte		

Die Angabeblätter sind am Ende der Prüfung abzugeben!

Aufgabe 1:

Die Beschreibung eines Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}^T := [x_1 \quad x_2]$ lautet:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} =: \mathbf{A}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) =: \mathbf{x}_0$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Systemmatrix **A.**

b) Ermitteln Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\boldsymbol{\phi}(t)$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t) \cdot \mathbf{x}_0$$

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2 -$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\boldsymbol{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} ; \; \boldsymbol{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} , \; \boldsymbol{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \; \boldsymbol{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien $(t \to \infty)$ erkennbar sein!

BEGRÜNDEN SIE IHRE JEWEILIGE ANTWORT!

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}^T := [x_1 \quad x_2]$ und der Eingangsgröße u

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 3{x_2}^2 + u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = {x_2}^2 + 4x_2 + 3 + u^2$$

a) Bestimmen Sie für $u = u_R$ alle Ruhelagen $\boldsymbol{x}_R$ des Systems.

b) Unter der Annahme $u_R = 0$ ermitteln Sie mathematische Modelle der Form

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}\nu \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_R + \boldsymbol{\xi} \quad \text{und} \quad u = u_R + \nu$$

welche das Systemverhalten für *kleine Auslenkungen* aus den ermittelten Ruhelagen beschreiben.

c) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter der Ruhelagen $\boldsymbol{x}_R$ des nichtlinearen Systems.

BEGRÜNDEN SIE IHRE JEWEILIGE ANTWORT!

Schriftliche Prüfung aus
Nichtlineare elektrische Systeme
Teil: Dourdoumas
am 27. 03. 2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	6	6
erreichte Punkte		

Die Angabeblätter sind am Ende der Prüfung wieder abzugeben!

Aufgabe 1:

Die Trajektorien eines mathematischen Modells 2. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}(0) =: \mathbf{x}_0$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}^\mathrm{T} \coloneqq [x_1 \quad x_2]$ werden durch

$$x_2(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + k$$

beschrieben. Dabei ist k eine vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ abhängige reelle Konstante.

Folgende drei Möglichkeiten für die Systemmatrix **A** stehen zur Auswahl:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie diejenige Systemmatrix, deren Trajektorienbild mit dem oben angegebenen übereinstimmt (*Begründen Sie Ihre Wahl!*).

b) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Systems.

c) Ist das System stabil, instabil, aymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Werte der Zeit t) in der $x_1 - x_2 -$ Ebene für folgende Anfangszustände:

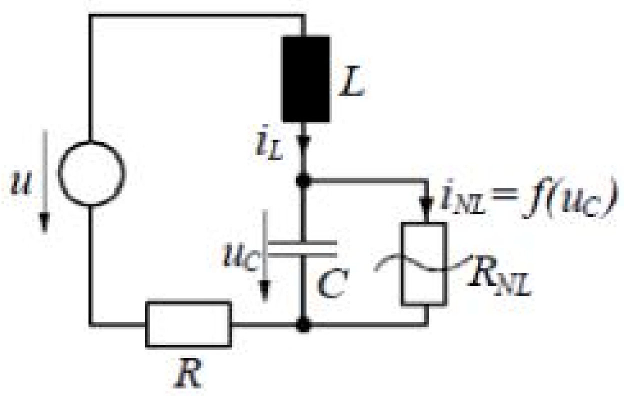
$$\boldsymbol{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien $(t \to \infty)$ erkennbar sein!

BEGRÜNDEN SIE IHRE JEWEILIGE ANTWORT!

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes ideales elektrisches Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, der Induktivität L, der Kapazität C und dem Ohmschen Widerstand R sowie dem nichtlinearen Widerstand R_{NL}. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert.



Die Kennlinie des nichtlinearen Widerstands R_{NL} wird durch die Funktion

$$i_{NL} = f(u_C) = u_C^2 + 3u_C$$

beschrieben. Hierbei sind u_C die Spannung an der Kapazität, i_{NL} der Strom durch den nichtlinearen Widerstand und i_L der Strom durch die Induktivität.

a) Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [i_L \quad u_C]^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{dx}{dt} = f(\boldsymbol{x}, u).$$

Für bestimmte Parameterwerte des Netzwerkes ergibt sich folgendes Modell:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 + u \\ x_1 - x_2^2 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ von diesem System für die konstante Eingangsgröße $u = u_R = 5$.

c) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}\nu \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_R + \boldsymbol{\xi} \quad \text{und} \quad u = u_R + \nu,$$

welche das Systemverhalten für *"kleine Auslenkungen"* $\boldsymbol{\xi}$ und ν aus den ermittelten Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

d) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des *nichtlinearen* Systems. (*Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch!*)

Schriftliche Prüfung aus
Nichtlineare elektrische Systeme
Teil: Dourdoumas
am 26. 06. 2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	6	3
erreichte Punkte		

Die Angabeblätter sind am Ende der Prüfung wieder abzugeben!

1 Aufgabe

Gegeben sei das nichtlineare System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}^T = (x_1 \; x_2)$ und die Eingangsgröße u

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1 x_2 - 2u \\ \frac{4}{x_1^2} - u \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie für die konstante Eingangsgröße $u = u_R$ *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems.

Nehmen Sie nun an, dass $u_R = 1$ gilt:
b) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}v \qquad \text{mit} \;\; \mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\xi} \;\; \text{und} \;\; u = u_R + v,$$

die das Systemverhalten für "kleine Auslenkungen" $\boldsymbol{\xi}$ und v aus den Ruhelagen näherungsweise beschreiben.
c) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des *nichtlinearen* Systems.

2 Aufgabe

Betrachten Sie ein *lineares* System mit der Eingangsgröße u, dem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t = 0)$ und der Ausgangsgröße y

$$y = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es werden zunächst folgende drei Versuche durchgeführt:

1. Mit der Wahl $u(t) = 0$ und dem Anfangszustand $\mathbf{x}_{01} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ ergibt sich die Ausgangröße $y_1(t) = 4e^{-t}$.
2. Mit der Wahl $u(t) = 0$ und dem Anfangszustand $\mathbf{x}_{02} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ ergibt sich die Ausgangröße $y_2(t) = 5e^{-2t}$.
3. Mit der Wahl $u(t) = 1$ und dem Anfangszustand $\mathbf{x}_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ ergibt sich die Ausgangröße $y_3(t) = 1 + 4e^{-t} + 5e^{-2t}$.

Ermitteln Sie die Ausganggröße $y_4(t)$, wenn bei einem 4. Versuch die Eingangsgröße $u(t) = -2$ und der Anfangszustand $\mathbf{x}_{04} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ betragen.

Schriftliche Prüfung aus
Nichtlineare elektrische Systeme
Teil: Dourdoumas
am 28. 10. 2015

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2
erreichbare Punkte	5	3
erreichte Punkte		

Die Angabeblätter sind am Ende der Prüfung wieder abzugeben!

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematisches Modell 2. Ordnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_1 x_2 \\ -6x_2 - \frac{2}{\pi}x_1 + \cos(x_1) \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems.

b) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_R - \mathbf{z}\,,$$

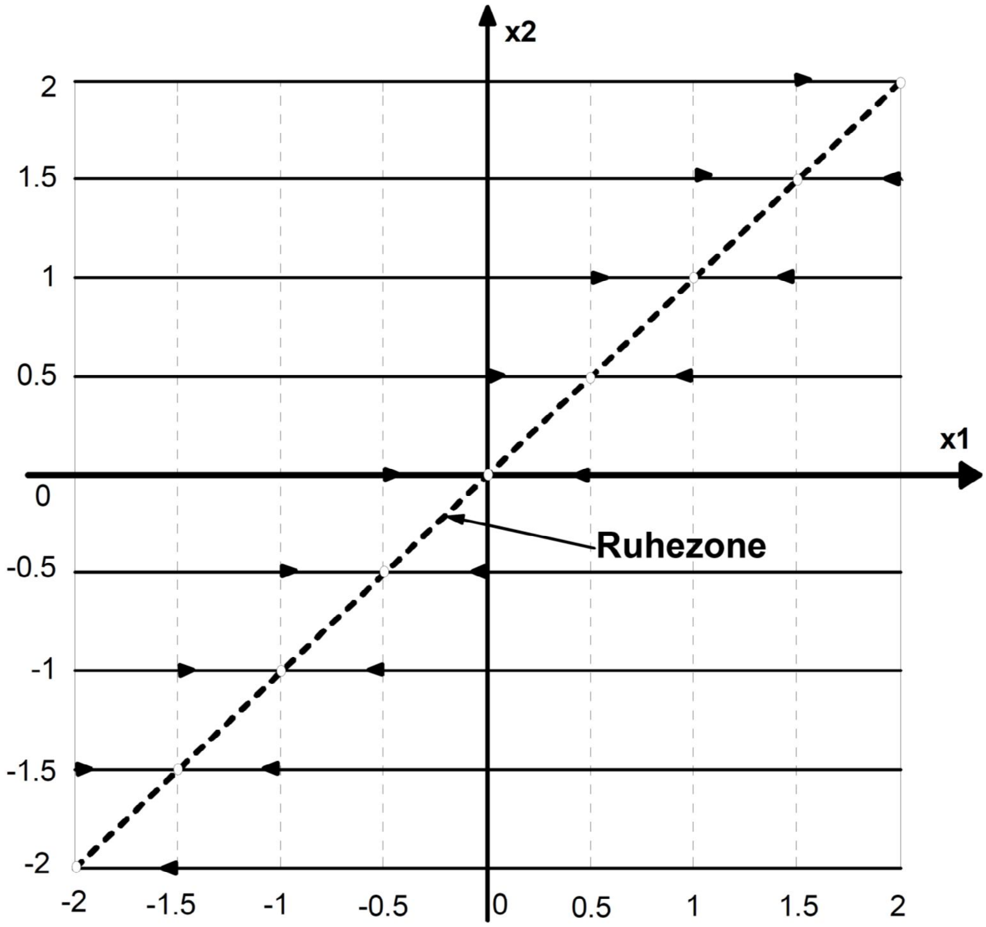
welche das Systemverhalten für "kleine Auslenkungen" $\mathbf{z}$ aus den ermittelten Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

c) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter der Ruhelagen des nichtlinearen Systems.

Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung Ihrer Antwort an.

Aufgabe 2:

Für ein freies System 2. Ordnung der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} := [x_1 \quad x_2]$ ist das zugehörige Trajektorienbild gegeben:



Außerdem ist die zugehörige Systemmatrix $\mathbf{A}$ (teilweise) gegeben: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} . & 10 \\ . & . \end{bmatrix}$.

Aufgrund einer fehlerhaften Datenübertragung sind leider einige Elemente verloren gegangen.

a) Bestimmen Sie die fehlenden Elemente der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$.

c) Ermitteln Sie die Lösung $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(\mathrm{t})\mathbf{x}(0)$

d) Ist das System stabil, asymptotisch stabil oder instabil?

Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung Ihrer Antwort an.