Prüfung in „**Nichtlineare elektrische Systeme**“
Teil: *Dourdoumas*
(21.03.2014)

Name / Vorname(n):

Kennzahl/ Matrikel-Nummer.:

Aufgabe 1 : 2 Punkte

Aufgabe 2: 6 Punkte

Aufgabe 3: 4 Punkte

Aufgabe 1:

Beurteilen Sie die Linearität folgender Systeme mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Geben Sie jeweils eine *mathematische* Begründung an!

a) $y(t) = e^{u(t)}$

b) $y(t) = u(t)\sin(t)$

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Modell eines nichtlinearen Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^3 + (y-1)^2 - u = 0$$

a) Führen Sie die Zustandsvariablen $x_1 := y$ und $x_2 := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ein und geben Sie das entsprechende Modell der Form $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ mit $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$ an.

b) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems in Abhängigkeit der Eingangsgröße $u(t) \equiv u_R$.

c) Ermitteln Sie lineare Ersatzmodelle der Form

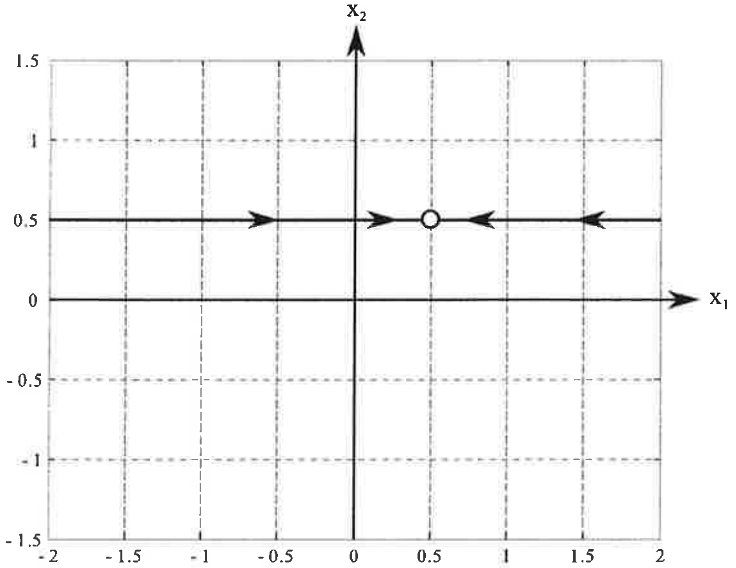
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{b}v \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\zeta}, \qquad \boldsymbol{\zeta}^T = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix}, \\ u = u_R + v \end{array}$$

welche das Verhalten des nichtlinearen Systems für „*kleine Auslenkungen*" $\boldsymbol{\zeta}$ und v aus den jeweiligen Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

d) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter der Ruhelagen des *nichtlinearen* Systems für den Fall $u_R = 0{,}25$. (Begründen Sie Ihre Antworten *mathematisch*.)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes Trajektorienbild eines linearen und zeitinvarianten Systems 2. Ordnung der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:



a) Welche Aussage können Sie über die Eigenwerte s_1 bzw. s_2 der Systemmatrix $\mathbf{A}$ machen? (Begründen Sie Ihre jeweilige Aussage!)

b) Bestimmen Sie in nachvollziehbarer Weise zugehörige Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$.

c) Berechnen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit der Eigenwerte s_1 und s_2.

d) Wieviel Ruhelagen $\mathbf{x_R}$ besitzt das System? (Begründen Sie Ihre Antwort!). Ermitteln Sie diese.

e) Skizzieren Sie für die Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad und \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$- Ebene. Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Schriftliche Prüfung in
Nichtlineare elektrische Systeme
Teil: Dourdoumas
am 09. 05. 2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

	1	2	3
erreichbare Punkte	9	2	4
erreichte Punkte			

Die Angabeblätter sind am Ende der Prüfung abzugeben!

Aufgabe 1:

Gegeben sei das Modell eines Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2]^T$

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} -8\sin(x_2)\cos(x_2) \\ 0{,}5x_1 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des obigen Systems.
b) Ermitteln Sie lineare zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{dz}{dt}=\mathbf{Az} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{x}=\mathbf{x}_R+\mathbf{z}\,,$$

welche das Systemverhalten für "kleine Auslenkungen" $\mathbf{z}$ aus den ermittelten Ruhelagen näherungsweise beschreiben.
c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der *linearen* Ersatzsysteme.
d) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter der Ruhelagen des *nichtlinearen* Systems.
e) Zeichnen Sie in der z_1-z_2-Ebene den Verlauf der Trajektorie der jeweiligen linearen Ersatzsysteme für den Anfangswert $\mathbf{z}(t=0) \ =[1 \quad 4]^T$. Hierbei soll der asymptotische Verlauf für anwachsende Werte des Zeitparameters t ersichtlich sein.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie folgende Systeme mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf Linearität. *(Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!)*

a) $y(t) = u(t) + 5\frac{du(t)}{dt}$
b) $y(t) = 5 + u(t)\cdot \sin t \cdot \cos t$
c) $y(t) = \int_0^t \sin(\tau)\,u(\tau)d\tau$
d) $y(t) = 1/u(t)$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems 2. Ordnung mit dem (reellwertigen) Zustandsvektor $\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2]^T$ und der Eingangsgröße u

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix} (2u+x_1)(2+x_2{}^4) \\ (x_1-2x_2)(3+x_1{}^3) \end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Ruhelagen des Systems.

b) Linearisieren Sie das System um die Ruhelage, die sich für $u=u_R=1$ ergibt und ermitteln Sie das zugehörige lineare Ersatzsystem.

Schriftliche Prüfung in
Nichtlineare elektrische Systeme
Teil: Dourdoumas
am 04. 07. 2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

AUFGABE 1: 7 Punkte

AUFGABE 2: 1 Punkt

Erreichte Punkte:

Die Angabeblätter sind am Ende der Prüfung abzugeben!

AUFGABE 1:
Ein System 2. Ordnung mit den Zustandsvektor

$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

wird durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - a(x_1^2 + x_2^2)x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 - a(x_1^2 + x_2^2)x_2$$

beschrieben. Hierbei ist a eine reelle Konstante.

a) Untersuchen Sie das zeitliche Verhalten der Trajektorien des Systems, indem Sie das zeitliche Verhalten des quadrierten Abstandes $R := x_1^2 + x_2^2$ eines Punktes $\mathbf{x}$ der Zustandsebene von Null betrachten.

- a1) Ermitteln Sie hierzu eine Differentialgleichung für $R(t)$.
- a2) Bestimmen Sie die zugehörige Lösung $R(t)$.
- a3) Skizzieren Sie den Verlauf $R(t)$ für die Fälle $a = 1$ und $a = -1$.
- a4) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$.

b) Ermitteln Sie ein lineares Ersatzsystem 2. Ordnung der Form

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad \text{mit} \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R \ ,$$

welches das nichtlineare System für "kleine Auslenkungen" $\mathbf{z}$ von der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ näherungsweise beschreibt.

- b1) Bestimmen Sie das Stabiltätsverhalten des *linearen* Ersatzsystems.
- b2) Skizzieren Sie in der $z_1 - z_2$-Ebene den Verlauf der Trajektorie des *linearen* Ersatzsystems für die Anfangswerte

  $$\mathbf{z}^T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{z}^T(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Hierbei soll der Verlauf für anwachsende Werte des Zeitparameters t ersichtlich sein.
- b3) Untersuchen Sie anhand des linearen Ersatzsystems den Stabilitätscharakter der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des *nichtlinearen* Systems.

AUFGABE 2:
Ein System mit der Zustandsvariablen x wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x + 1 \qquad ; x(0) = x_0$$

beschrieben. Ist das System linear? *Begründen* Sie *mathematisch* Ihre Antwort!