Schriftliche Prüfung aus **Nichtlineare elektrische Systeme**
Teil: Dourdoumas
am 22.10.2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl/ Matrikel-Nummer.:

	1	2
erreichbare Punkte	8	6
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Die Populationsentwicklung zweier Spezies, der Beutetiere $x_1(t)$ und der Räuber $x_2(t)$, wird durch folgende nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= (6-0.5x_1-3x_2)x_1 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= (-3-3x_2+x_1)x_2\end{aligned}\quad,\qquad \mathbf{x}^T=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die vier Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems.

b) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}\quad \text{mit}\quad \mathbf{x}=\mathbf{x}_R+\boldsymbol{\zeta},\qquad \boldsymbol{\zeta}^T=\begin{bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\end{bmatrix},$$

welche das Verhalten des nichtlinearen Systems für „*kleine Auslenkungen*“ $\boldsymbol{\zeta}$ aus den ermittelten Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

c) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des nichtlinearen Systems. (Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.)

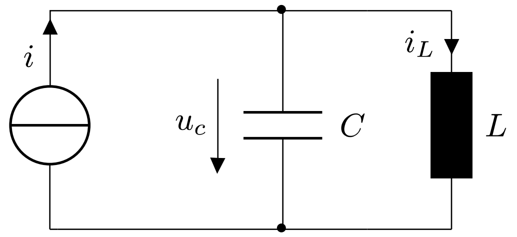
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien des um die Ruhelage $\mathbf{x}_R=\mathbf{0}$ *linearisierten* Systems (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $\zeta_1-\zeta_2$- Ebene für folgende Anfangszustände $\boldsymbol{\zeta}_0=\boldsymbol{\zeta}(t=0)$:

$$\boldsymbol{\zeta}_0^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad \text{und}\quad \boldsymbol{\zeta}_0^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t\to\infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Stromquelle, einer Induktivität L sowie einer Kapazität C (siehe Skizze). Der von der Stromquelle gelieferte Strom wird mit i bezeichnet; mit u_C symbolisieren wir die Spannung am Kondensator C, mit i_L den Strom durch die Induktivität L.



a) Führen Sie den sogenannten Zustandsvektor $\mathbf{x}=[u_C \quad i_L]^T$ ein und ermitteln Sie ein Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}i\,.$$

b) Ist das System asymptotisch stabil, stabil oder instabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

c) Zeigen Sie, dass für den Fall $L=C$ die Trajektorien des *freien* Systems $i(t)\equiv 0$ Kreisen in der u_C-i_L- Ebene entsprechen.

Schriftliche Prüfung aus **Nichtlineare elektrische Systeme**
Teil: Dourdoumas
am 10.12.2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl/ Matrikel-Nummer.:

	1	2
erreichbare Punkte	8	6
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes nichtlineare System mit dem sogenannten Zustandsvektor $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= (x_1+3)(x_2-3) \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{3}x_1x_2 - 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die vier Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems.

b) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\zeta}, \qquad \boldsymbol{\zeta}^T = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix},$$

welche das Verhalten des nichtlinearen Systems für „*kleine Auslenkungen*“ $\boldsymbol{\zeta}$ aus den jeweiligen Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

c) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des nichtlinearen Systems. (Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.)

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes mathematische Modell:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

a) Berechnen Sie die zwei Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren des Modells.

b) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter des Systems.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten *t*) in der $x_1 - x_2$-Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Schriftliche Prüfung aus **Nichtlineare elektrische Systeme**
Teil: Dourdoumas
am 26.01.2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl/ Matrikel-Nummer.:

	1	2
erreichbare Punkte	8	6
erreichte Punkte		

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes nichtlineare System mit dem sogenannten Zustandsvektor $\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2]$:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1(1 - x_1^2 + 3x_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_2\left(\frac{1}{2}x_1 - 1\right)$$

a) Bestimmen Sie die vier Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems.

b) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\zeta}, \qquad \boldsymbol{\zeta}^T = [\zeta_1 \quad \zeta_2],$$

welche das Verhalten des nichtlinearen Systems für „*kleine Auslenkungen*“ $\boldsymbol{\zeta}$ aus den jeweiligen Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

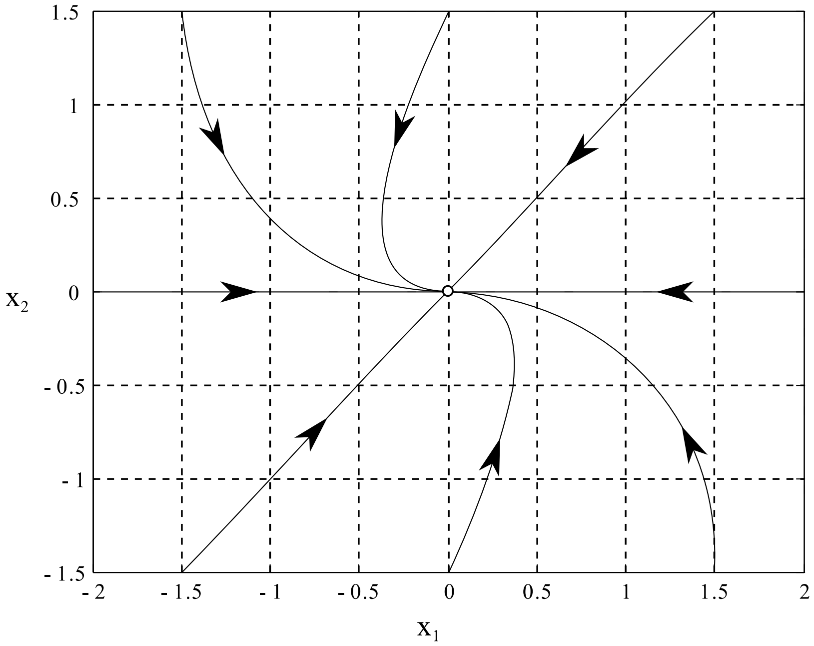
c) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des nichtlinearen Systems. (Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch.)

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes Trajektorienbild eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ liegen bei $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$.



a) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten s_1 bzw. s_2 passende Eigenvektoren $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$.

b) Ermitteln Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems, wenn es zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $\mathbf{x}^T(0) = [3 \quad 1]$ gestartet wird.

c) Berechnen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ des Systems.

Schriftliche Prüfung aus **Nichtlineare elektrische Systeme**
Teil: Dourdoumas
am 01.04.2011

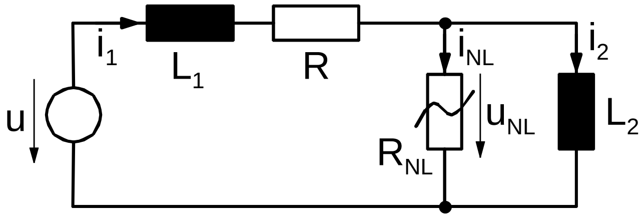
Name / Vorname(n):

Kennzahl/ Matrikel-Nummer.:

	1	2
erreichbare Punkte	6	4
erreichte Punkte		

Aufgabe 1

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Induktivität L_1, einer Induktivität L_2 einem Ohmschen Widerstand R und einem nichtlinearen Widerstand R_{NL}. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Für die Induktivitäten gelte $L_1 = L_2 = L$.



Die Kennlinie des nichtlinearen Widerstandes R_{NL} wird durch

$$u_{NL} = i_{NL}^{\;2} + i_{NL}$$

beschrieben. Hierbei bezeichnen u_{NL} die Spannung am nichtlinearen Widerstand und i_{NL} den Strom durch den nichtlinearen Widerstand.

a) Benützen Sie die Ströme i_1 und i_2 gemäß obiger Abbildung, führen Sie den sogenannten Zustandsvektor $\mathbf{x} = [i_1 \quad i_2]^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, u\right).$$

Für bestimmte Parameterwerte des Netzwerkes ergibt sich folgendes nichtlineare System:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} u - x_1 - (x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2) \\ (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems für die *konstante* Eingangsgröße $u = u_R = 5$.

c) Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{b}\,\nu \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\zeta} \quad \text{und} \quad \mathrm{u}=\mathrm{u}_\mathrm{R} + \nu\,,$$

welche das Verhalten des nichtlinearen Systems für *„kleine Auslenkungen"* $\boldsymbol{\zeta}$ und ν aus den ermittelten Ruhelagen näherungsweise beschreiben.

d) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des nichtlinearen Systems. (*Begründen Sie Ihre Antworten mathematisch*)

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein mathematisches Modell 2. Ordnung der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$y = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

mit der konstanten Matrix $\mathbf{A}$ und den konstanten Parametern c_1 und c_2.

Zwei Rechtseigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$ lauten $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ und $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Der zu $\mathbf{p}_1$ gehörige Eigenwert beträgt $s_1 = -3$. Ausgehend von einem bestimmten Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ wurde folgender Verlauf der Ausgangsgröße y gemessen: $y(t) = 3 \cdot e^{2t}$.

a) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
b) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende t-Werte) für die folgenden Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) soll erkennbar sein!

Schriftliche Prüfung aus **Nichtlineare elektrische Systeme** am 20.05.2011

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nr.:

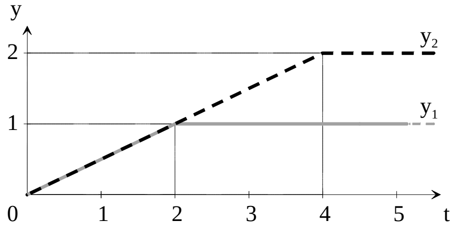
	1	2
erreichbare Punkte	6	9
erreichte Punkte		

Aufgabe 1

Betrachten Sie folgende vier Systeme mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

a) $y(t) = \frac{d}{dt}\left[3\,u(t)\right]$ b) $y(t) = -2\,u(t) + 2$ c) $y(t) = 2\,|u(t)|$

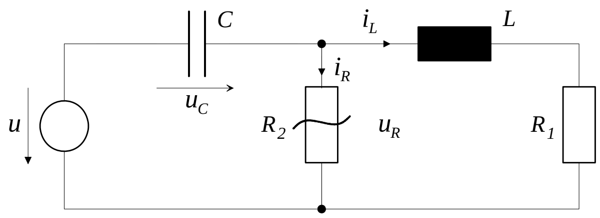
d) Die Eingangsgröße $u_1(t) = 4\,\sigma(t)$ bewirkt die Ausgangsgröße $y_1(t)$ (grau in Abbildung), die Eingangsgröße $u_2(t) = 8\,\sigma(t)$ bewirkt die Ausgangsgröße $y_2(t)$ (schwarz strichliert).



Untersuchen Sie obige Systeme auf Linearität. Geben Sie eine math. Begründung an!

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus einer idealen Spannungsquelle, einer idealen Kapazität C, einer idealen Induktivität L, einem Ohmschen Widerstand R_1 und einem nichtlinearen Widerstand R_2. Die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert.



Die Kennlinie des Widerstands R_2 wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$i_R = \alpha\, u_R + \beta \qquad (\alpha \text{ und } \beta \text{ sind reelle Konstanten, ungleich Null})$$

a) Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [u_c \quad i_L]^T$ ein und ermitteln Sie ein Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathrm{f}(\mathbf{x}, u)\,.$$

b) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des obigen Systems.

c) Betrachten Sie nun den Fall $u = 0$. Ermitteln Sie lineare und zeitinvariante Modelle der Form

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{A}\xi \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \xi\,,$$

welche das Systemverhalten für *„kleine Auslenkungen“* ξ aus den ermittelten Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ näherungsweise beschreiben.

d) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen des nichtlinearen (!) Systems in Abhängigkeit von α und β.

Schriftliche Prüfung aus **Nichtlineare elektrische Systeme** am 17.06.2011

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nr.:

	1	2	3	
erreichbare Punkte	4	6	5	
erreichte Punkte				

Aufgabe 1

Betrachten Sie folgende zwei Systeme mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y*:

a) $y(t) = 2u(t-8)$ Untersuchen Sie das System auf *Zeitinvarianz*.

b) $\frac{dy}{dt} = -t\,y(t)$ mit $y(t = t_0) = y_0$
Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung und untersuchen Sie das System auf *Zeitinvarianz*.

Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!

Aufgabe 2

Gegeben sei ein *nichtlineares* System mit der reellen, skalaren Zustandsgröße x und der reellen Konstanten *k*:

$$\frac{dx}{dt} = k\,x - x^3$$

a) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen x_R des Systems in Abhängigkeit von *k*.

b) Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter *aller* Ruhelagen.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein System der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!