Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 2** am 27.01.2017

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	2	2	3	3	2	2	3	2	19
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes zeitdiskretes System mit der Eingangsgröße u_k und der Ausgangsgröße y_k. Die folgende Impulsantwort des Systems g_k wurde ermittelt:

$$g_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad \text{für} \quad k \geq 0.$$

Berechnen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des Systems.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das folgende zeitdiskrete Zustandsmodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$ und der Eingangsgröße u_k:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1.12 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

Ermitteln Sie alle Ruhelagen des Systems unter den Annahmen

a) $u_k = u_R \neq 0$

b) $u_k = u_R = 0$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Zustandsmodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße y und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Ermitteln Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ so, dass

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$$
$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u$$
$$y = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z},$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}.$$

gilt.

b) Berechnen Sie $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{c}}^T$.

Aufgabe 4:

Ermitteln Sie die *Minimalrealisierung* in *Steuerbarkeitsnormalform* der folgenden Übertragungsfunktion eines Systems:

$$G(s) = \frac{2s^3 + 7s^2 + 9s + 6}{s^3 + 3s^2 + 2s}.$$

Aufgabe 5:

Geben Sie die *Definitionen* folgender Eigenschaften eines *linearen zeitkontinuierlichen* Systems mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ an:

a) Steuerbarkeit

b) Beobachtbarkeit

Aufgabe 6:

Gegeben sei das folgende zeitdiskrete Zustandsmodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_k$ und der Eingangsgröße u_k.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k.$$

Entwerfen Sie einen Zustandsregler $u_k = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}_k$ so, dass alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $z = 0$ liegen.

Aufgabe 7:

Gegeben sei folgendes Systemmit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Entwerfen Sie einen Zustandsbeobachter

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}\,(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}$$

und einen Zustandsregler

$$u = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{x}} + Vr$$

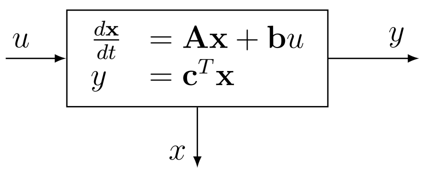
so, dass alle Eigenwerte des Gesamtsystems bei $s = -1$ liegen und

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = r = \text{konstant}$$

gilt.

Aufgabe 8:

Für eine Regelstrecke mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ soll ein *PI-Zustandsregler* entworfen werden. Erweitern Sie den folgenden Block der Regelstrecke zum Strukturbild des geschlossenen Regelkreises.



Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 2** am 23.03.2017

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	3	2	2	2	2	3	2	19
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Es sei folgendes Zustandsmodell mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und dem reellen Parameter α gegeben:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix}-1 & \alpha \\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u,\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x.\end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie für welche Werte von α das System *nicht beobachtbar* ist.

Es gelte nun $\alpha = 0$.
Da der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ messtechnisch nicht erfassbar ist, wird ein Beobachter der Form

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}\left(y - \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}\right)$$

verwendet.

b) Berechnen Sie den Vektor $\mathbf{l}$ so, dass die Dynamik des Beobachterfehlers $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ durch die Eigenwerte bei $s_1 = -1$ und $s_2 = -2$ charakterisiert ist.

Aufgabe 2:

Es ist folgende steuerbare und beobachtbare Regelstrecke mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ gegeben:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,\\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie in nachvollziehbarer Weise, dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises bestehend aus der Regelstrecke, einem Zustandsregler der Form $u = -\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}}$ und einem Zustandsbeobachter der Form

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}\left(y - \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}\right)$$

beliebig vorgegeben werden kann.
Hinweis: Betrachten Sie die Dynamik des geschlossenen Regelkreises mit dem Zustandsvektor $\begin{bmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{e}\end{bmatrix}^T$.
Hinweis: Für Matrizen $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ passender Dimensionen gilt

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3\end{bmatrix} = \det\mathbf{M}_1 \cdot \det\mathbf{M}_3.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Impulsantwort

$$(g_k) = (1, 2, 3, -2, -1, 0, 0, 0, \dots)$$

eines zeitdiskreten Systems mit der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k). Zeichnen Sie den Verlauf der Ausgangsfolge (y_k) für die Eingangsfolge $(u_k) = (\sigma_k) = (1, 1, 1, 1, \dots)$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \tag{1}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k. \tag{2}$$

a) Ermitteln Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ so, dass das transformierte System

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \tilde{\mathbf{b}}u_k, \\ y_k &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}_k \end{aligned}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ in Regelungsnormalform vorliegt.

b) Welche Eigenschaft muss das gegebene System besitzen, damit die Transformation möglich ist?

Aufgabe 5:

Gegeben sei das folgende zeitdiskrete Zustandsmodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Eingangsgröße u:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k.$$

a) Zeigen Sie, dass das System für $u_k = u_R \neq 0$ keine Ruhelagen besitzt, wobei $u_R \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl darstellt.

b) Ermitteln Sie alle Ruhelagen des Systems für $u_k = u_R = 0$.

Aufgabe 6:

Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche lineare Zustandsmodell mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u.$$

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}$.

Aufgabe 7:

Gegeben sei ein lineares zeitkontinuierliches System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und der Zustandsgröße x:

$$\frac{dx}{dt} = -3x + u,$$
$$y = x.$$

a) Entwerfen Sie einen *PI-Zustandsregler*

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = r - y,$$
$$u = -kx - k_i\varepsilon - k_p(r - y)$$

mit dem Proportionalbeiwert $k_p = -3$. Berechnen Sie die Werte der Parameter k und k_i so, dass der geschlossene Regelkreis eine Dynamikmatrix mit den Eigenwerten $s_1 = s_2 = -5$ aufweist.

Aufgabe 8:

Geben Sie die *Definitionen* folgender Eigenschaften eines *linearen zeitkontinuierlichen* Systems mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ an:

a) Steuerbarkeit

b) Beobachtbarkeit

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 2** am 17.05.2017

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

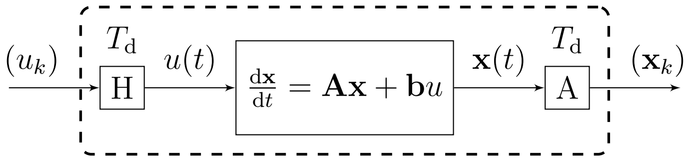
Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Summe
erreichbare Punkte	3	3	2	2	2	2	2	3	19
erreichte Punkte									

Aufgabe 1:

Ein lineares zeitinvariantes Zustandsmodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

wird wie nachfolgend dargestellt mit einem Abtast- und einem Halteglied mit der Abtastzeit T_d versehen.



- Zeigen Sie, dass die Systemmatrix des Zustandsmodells des resultierenden *zeitdiskreten* Systems immer invertierbar ist.
- Ermitteln Sie ein Zustandsmodell des resultierenden *zeitdiskreten* Systems, wenn die Daten des zeitkontinuierlichen Systems wie folgt lauten:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Es sei ein lineares zeitdiskretes System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_\mathrm{d}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}_\mathrm{d}u_k$$

gegeben, dessen Systemmatrix $\mathbf{A}_\mathrm{d}$ als invertierbar vorausgesetzt wird. Als Eingangsgröße wird die Folge

$$(u_k) = (m_1, m_2, 0, 0, \dots), \qquad u_k = 0 \quad \text{für} \quad k \geq 2$$

verwendet. Ermitteln Sie die reellen Parameter m_1 und m_2 in Abhängigkeit von $\mathbf{x}_0$ so, dass $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ (und damit auch $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ für $k \geq 2$) gilt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Entwerfen Sie einen Zustandsbeobachter

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}\,(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}$$

und einen Zustandsregler

$$u = -\mathbf{k}^T\hat{\mathbf{x}} + Vr$$

so, dass alle Eigenwerte des Gesamtsystems bei $s = -1$ liegen und

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = r = \text{konstant}$$

gilt.

Aufgabe 4:

Geben Sie die jeweils durchzuführenden mathematischen Schritte von 2 Methoden zur Überpüfung der Beobachtbarkeit eines zeitkontinuierlichen linearen zeitinvarianten Zustandsmodells

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

an.

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Sprungantwort

$$(h_k) = (1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, \dots)\,, \qquad h_k = 5 \quad \text{für} \quad k \geq 5$$

eines zeitdiskreten Systems mit der Eingangsfolge (u_k) und der Ausgangsfolge (y_k). Zeichnen Sie den Verlauf der Impulsantwort des Systems.

Aufgabe 6:

Ermitteln Sie die *Minimalrealisierung* in *Steuerbarkeitsnormalform* der folgenden Übertragungsfunktion eines Systems:

$$G(s) = \frac{s^5 + 6s^4 + 3s^3 + s^2 + 4s}{s^5}.$$

Aufgabe 7:

Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Zustandsmodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Eingangsgröße u

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Entwerfen Sie einen Zustandsregler $u = -\mathbf{k}^T\mathbf{x}$ so, dass die Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises das charakteristische Polynom

$$\Delta(s) = s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0$$

besitzt.

Aufgabe 8:

Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Zustandsmodell mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

a) Ermitteln Sie die Transformationsvorschrift $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ so, dass

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ y &= \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}, \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}.$$

gilt.

b) Berechnen Sie $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ und $\tilde{\mathbf{c}}^T$.