Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 2** am 3.2.2004

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

BONUSPUNKTE aus Matlab-Übung WS2003/04:

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	4	7
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Eine Gruppe von (mehr oder weniger echten) „Control-Systems-Gurus" unterhält sich nun über dieses System. Dabei fallen folgende Behauptungen:

(1) „Wenn ich den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kennen würde, könnte ich sofort eine Eingangsfunktion $u_1(t)$ angeben, mit der zum Zeitpunkt $t_1 = 3\ [s]$ $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$ gelten würde. Diese Eingangsfunktion würde Exponentialfunktionen $e^{-s_i t}$ beinhalten, wobei mit s_i die Eigenwerte der Systemmatrix gemeint sind."

(2) „Das ist ja auch keine Kunst. Aber eine derartige Eingangsfunktion $u_2(t)$ anzugeben, mit der zum Zeitpunkt $t_2 = 4\ [s]$ $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{0}$ gelten würde – das wäre ein Meisterwerk. So eine Funktion existiert nämlich nicht – weil das System einen Eigenwert bei $s_1 = 4$ besitzt !"

(3) „So ein Blödsinn – Das System ist ja linear ! Wenn ich $u_1(t)$ kennen würde, könnte ich sofort $u_2(t) = \frac{t_1}{t_2} u_1(t) = \frac{3}{4} u_1(t)$ angeben."

(4) „Ich denke, ich könnte für jeden Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ eine *stückweise konstante* Eingangsfunktion $\tilde{u}_1(t)$ bestimmen, mit der ebenfalls zum Zeitpunkt $t_1 = 3\ [s]$ $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$ gelten würde. Meine Eingangsfunktion $\tilde{u}_1(t)$ würde dabei aus *zwei* gleich langen, konstanten Funktionsstücken bestehen. Nachdem diese Eingangsfunktion von so einfacher Art ist, wäre der mit $\int_0^{t_1} \tilde{u}_1^2(\tau) d\tau$ definierte Aufwand minimal."

(5) „Das ist trivial. Ich würde das Gleiche mit einer Eingangsfunktion $\tilde{u}_1(t)$ schaffen, die aus nur *einem* konstanten Funktionsstück besteht !"

(6) „Somit bleibt nur das Problem, dass wir den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ nicht kennen. Allerdings könnten wir ihn rekonstruieren, dafür bräuchten wir – zumindest theoretisch – nur die Ausgangsgröße $y(t)$ vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ beginnend 10 $[ms]$ lang messen."

Kommentieren Sie kurz diese Behauptungen. Was ist davon richtig, was ist falsch ? (*Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an.*)

Aufgabe 2:

Für das *beobachtbare* mathematische Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y sei die Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-4t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

gegeben. Für den Ausgangsvektor gelte: $\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.

b) Geben Sie Bedingungen für die Koeffizienten b_1, b_2 und b_3 des Eingangsvektors $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^T$ an, sodass das mathematische Modell steuerbar ist.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell einer Regelstrecke mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

a) Ermitteln Sie ein Regelgesetz der Form

$$u = -\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + Vr = -\mathbf{h}^T\mathbf{x} + Vr$$

so, dass die Eigenwerte des geregelten Systems bei $s_{1,2} = -3$ liegen und für einen Einheitssprung $r(t) = \sigma(t)$ gilt: $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.

Da der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ *nicht* messbar ist, wird für die praktische Realisierung obiger Regelung ein Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ herangezogen, d.h.: $u = -\mathbf{h}^T\hat{\mathbf{x}} + Vr$.
Dafür soll ein Zustandsbeobachter der Form

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{b}}y$$

verwendet werden.

b) Bestimmen Sie die Größe $\hat{\mathbf{b}}$ so, dass die Dynamikmatrix des Beobachterfehlers $\mathbf{e} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ Eigenwerte bei $s_{1,2} = -4 \pm j2$ besitzt.

c) Die obige Zusammenschaltung von Regelstrecke, Zustandsregler und Zustandsbeobachter ergibt ein Gesamtsystem der Form

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \bar{\mathbf{b}}r \qquad \text{mit dem Zustandsvektor} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}.$$
$$y = \bar{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}$$

Bestimmen Sie die Systemgrößen $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ und $\bar{\mathbf{c}}^T$.

d) Ermitteln Sie die Führungsübertragungsfunktion:

$$T(s) := \left.\frac{y(s)}{r(s)}\right|_{\mathbf{z}(0)=0}$$

e) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Gesamtsystems bestehend aus Regelstrecke, Zustandsregler und Zustandsbeobachter.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 2** am 18.3.2004

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

BONUSPUNKTE aus Matlab-Übung WS2003/04:

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	4	7
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Eine Gruppe von (mehr oder weniger echten) „Control-Systems-Gurus" unterhält sich wieder über dieses System. Dabei fallen folgende Behauptungen:

(1) „Das System ist steuerbar, weil es in Steuerbarkeitsnormalform vorliegt. Falls ich den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kennen würde, könnte ich daher eine Eingangsfunktion $u_1(t)$ angeben, mit der $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ gelten würde."

(2) „Moment mal – dieser Grenzwert hat ja etwas mit der asymptotischen Stabilität zu tun. Da aber das System nicht asymptotisch stabil ist, kann $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ nicht erreicht werden!"

(3) „Ich könnte bei bekanntem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ eine Eingangsfunktion $u_2(t)$ bestimmen, mit der bereits zum Zeitpunkt $t_2 = 3\ [s]$ $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{0}$ gelten würde. Meine Eingangsfunktion würde ich dabei mit $u_2(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{b}$ ansetzen. Sie enthält daher Exponentialfunktionen der Form $e^{s_i t}$, wobei mit s_i die Eigenwerte der Systemmatrix gemeint sind. Mit meinem Ansatz wäre der mit $\int_0^{t_2} u_2^2(\tau)d\tau$ definierte Aufwand minimal."

(4) „Ich würde einen ganz anderen Ansatz wählen, ich würde die Eingangsfunktion mit $u_2(t) = \mathbf{k}^T \mathbf{\Phi}(-t)\mathbf{b}$ ansetzen. Dadurch ergibt sich natürlich ein anderer Vektor $\mathbf{k}$ und die Eingangsfunktion enthält Exponentialfunktionen der Form $e^{-s_i t}$."

(5) „Ich denke, ich könnte für jeden Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ eine *stückweise konstante* Eingangsfunktion $\tilde{u}_2(t)$ bestimmen, mit der ebenfalls zum Zeitpunkt $t_2 = 3\ [s]$ $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{0}$ gelten würde. Meine Eingangsfunktion $\tilde{u}_2(t)$ würde dabei aus *drei* gleich langen, konstanten Funktionsstücken bestehen."

(6) „Somit bleibt wieder das Problem, dass wir den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ nicht kennen. Leider können wir ihn nur rekonstruieren, indem wir die Eingangsgröße $u(t)$ sowie die Ausgangsgröße $y(t)$ unendlich lange messen."

Kommentieren Sie kurz diese Behauptungen. Was ist davon richtig, was ist falsch ? (*Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an.*)

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines homogenen Systems 2.Ordnung mit verschiedenen Eigenwerten, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(a_1 und a_2 seien hierbei reelle Parameter.)
Im Labor für Elektrische Messtechnik stellte man erstaunt fest, dass bei zwei voneinander *verschiedenen* Anfangszuständen die *gleiche* Ausgangsfunktion $y(t) = e^{-2t}$ gemessen wurde (für $t \geq 0$).

Bestimmen Sie die vollständige Systemmatrix des mathematischen Modells.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell einer Regelstrecke mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Ermitteln Sie ein Regelgesetz der Form

$$u = -\begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + Vr = -\mathbf{h}^T \mathbf{x} + Vr$$

so, dass die Eigenwerte des geregelten Systems bei $s_{1,2} = -2$ liegen und für einen Einheitssprung $r(t) = \sigma(t)$ gilt: $\quad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.

Da der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ *nicht* messbar ist, wird für die praktische Realisierung obiger Regelung ein Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ herangezogen, d.h.: $\quad u = -\mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}} + Vr$.
Dafür soll ein Zustandsbeobachter der Form

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \hat{\mathbf{b}}y$$

verwendet werden.

b) Bestimmen Sie die Größe $\hat{\mathbf{b}}$ so, dass die Dynamikmatrix des Beobachterfehlers $\mathbf{e} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ Eigenwerte bei $s_{1,2} = -3 \pm j$ besitzt.

c) Die obige Zusammenschaltung von Regelstrecke, Zustandsregler und Zustandsbeobachter ergibt ein Gesamtsystem der Form

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \overline{\mathbf{b}}r \qquad \text{mit dem Zustandsvektor} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}.$$
$$y = \overline{\mathbf{c}}^T \mathbf{z}$$

Bestimmen Sie die Systemgrößen $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ und $\overline{\mathbf{c}}^T$.

d) Ermitteln Sie die Führungsübertragungsfunktion des Gesamtregelkreises:

$$T(s) := \left.\frac{y(s)}{r(s)}\right|_{\mathbf{z}(0)=0}$$

e) Ist das Gesamtsystem steuerbar ? Ist es beobachtbar ? (*Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an.*)

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 2** am 17.6.2004

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

BONUSPUNKTE aus Matlab-Übung WS2003/04:

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	5	7
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $P(s)$ einer Regelstrecke mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$P(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

a) Geben Sie das zugehörige mathematische Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \; y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ in der so genannten *Steuerbarkeits-Normalform* an.

b) Zur Regelung des Systems aus Punkt a) wird ein Zustandsregler der Form

$$u = -\mathbf{k}^T\mathbf{x} + Vr$$

eingesetzt. Welchen Bedingungen müssen die Reglerparameter $\mathbf{k}^T$ und V genügen, damit die Systemmatrix des *geregelten* Systems nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt?

c) Kann das geregelte System für eine spezielle Wahl der Parameter $\mathbf{k}^T$ und V „nicht beobachtbar" werden? Welche Ordnung besitzt dann die zugehörige Führungsübertragungsfunktion $T(s)$? Ermitteln Sie für diesen Fall $T(s)$. (Begründen Sie Ihre Antworten!)

d) Wählen Sie nun $k_1 = k_2 = 3$. Wie muss der Parameter V gewählt werden, damit für einen Einheitssprung als Führungsgröße die Ausgangsgröße stationär genau ist, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein mathematisches Modell mit der Eingangsgröße u und der Zustandsvariable x:

$$\frac{dx}{dt} = x + u$$

a) Geben Sie eine *möglichst einfache*, stückweise konstante Eingangsgröße u an, die innerhalb einer gegebenen Zeitspanne $[0, T]$ einen *beliebigen* Anfangszustand x_0 nach $x(T) = 0$ überführt.

b) Geben Sie für $x_0 = 2$ den Verlauf von $x(t)$ an, wenn die Eingangsgröße gemäß a) gewählt wird.

Die Eingangsgröße genügt nun der Beschränkung $|u(t)| \le 1$

c) Ermitteln Sie diejenigen Anfangszustände x_0, die in diesem Fall nach $x(T) = 0$ übergeführt werden können.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das folgende mathematische Modell einer Regelstrecke mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Transformieren Sie mit Hilfe einer regulären Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$ das System in die *Diagonalform*. Können Sie an Hand der Diagonalform Aussagen über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des ursprünglichen Systems treffen? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

b) Entwerfen Sie für die angegebene Regelstrecke einen Beobachter, der einen Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ für den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ liefert. Der Beobachter soll so ausgelegt werden, dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix des Schätzfehlers $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ bei $s_1 = s_2 = -1$ liegen.

c) Fassen Sie die Regelstrecke mit dem entworfenen Beobachter als *ein* dynamisches System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$ auf. Geben Sie das zugehörige mathematische Modell in der Form

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}u$$
$$y = \tilde{\mathbf{c}}^T \overline{\mathbf{x}}$$

an. Wo liegen die Eigenwerte der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$? (Begründen Sie Ihre Antwort!)