Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 24.11.2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	4	6	2	7	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes *nichtlineare* System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2 + u \\ x_1 - 3x_2 - x_2^2 + 4 + u \end{bmatrix}, \qquad y = x_1^2 + u^2$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelage $\mathbf{x}_R$ des Systems für die Eingangsgröße $u = u_R = 2$.
b) Ermitteln Sie ein *lineares und zeitinvariantes* Modell der Form

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$$
$$\Delta y = \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u$$

welches das nichtlineare Systemverhalten für „kleine Auslenkungen" $\Delta\mathbf{x}$ und Δu aus der berechneten Ruhelage $\mathbf{x}_R$ bzw. u_R näherungsweise beschreibt.
c) Ist dieses lineare und zeitinvariante Modell asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

Aufgabe 2:
Betrachten Sie folgendes lineare und zeitinvariante System zweiter Ordnung mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad \mathbf{x}(\mathrm{t}=0) = \mathbf{x}_0$$
$$y = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + 7u$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
b) Ermitteln Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(\mathrm{s}) := \left.\dfrac{\bar{y}(\mathrm{s})}{\bar{u}(\mathrm{s})}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.
c) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
d) Transformieren Sie das System in ein äquivalentes System in Diagonalform:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u, \quad y = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} + \tilde{d}u.$$

Hinweis: Verwenden Sie eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{z}$.
e) Ermitteln Sie die Trasitionsmatrix $\tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathrm{t})$ des *transformierten* Systems.

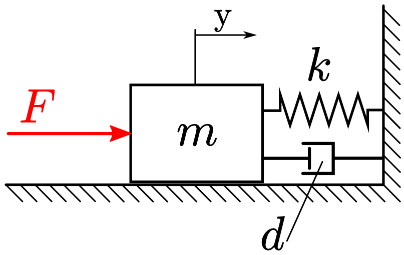
Aufgabe 3:
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(\mathrm{s}) := \left.\frac{\bar{y}(\mathrm{s})}{\bar{u}(\mathrm{s})}\right|_{AW=\mathbf{0}} = \frac{1}{s^4 + s^3 + 3s^2 + \mathrm{s} + 2}$$

eines Systems vierter Ordnung mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
b) Ermitteln Sie die zugehörige Systembeschreibung in Form einer Differentialgleichung vierter Ordnung.

Aufgabe 4:
Betrachten Sie folgenden *reibungsfreien* mechanischen Aufbau einer Massen m, welche mit Hilfe einer Feder mit der Federkonstante k und eines Dämpfers mit der Dämpferkonstante d an der Wand befestigt ist:



Auf die Masse wirkt die äußere Kraft F, die *wegproportionale* Federkraft und die *geschwindigkeitsproportionale* Dämpferkraft. Die Position y der Masse wird ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,u.$

Für spezielle positive Werte der Parameter m, k und d ergibt sich folgendes Zustandsraum-Modell zur mathematischen Beschreibung des Systems:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad \mathbf{x}(\mathrm{t}=0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

b) Bestimmen Sie die speziellen Werte der Parameter m, k und d.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(\mathrm{s}) := \left.\frac{\bar{y}(\mathrm{s})}{\bar{u}(\mathrm{s})}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.

d) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

e) Ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ wirkt auf das System die Eingangsgröße

(i) $u(\mathrm{t}) = \sigma(\mathrm{t})$

(ii) $u(\mathrm{t}) = 2\cos(\mathrm{t})$

Bestimmen Sie für *beide Fälle* den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße $y(\mathrm{t})$.

Hinweis: Mit $\sigma(\mathrm{t})$ wird die Einheitssprungfunktion bezeichnet.

$$\sin(\omega\mathrm{t}) ○\!\!-\!\!● \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \cos(\omega\mathrm{t}) ○\!\!-\!\!● \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\mathrm{t}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{t})\} = -\frac{d\bar{\mathrm{f}}(\mathrm{s})}{d\mathrm{s}}$$

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 29.01.2015

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

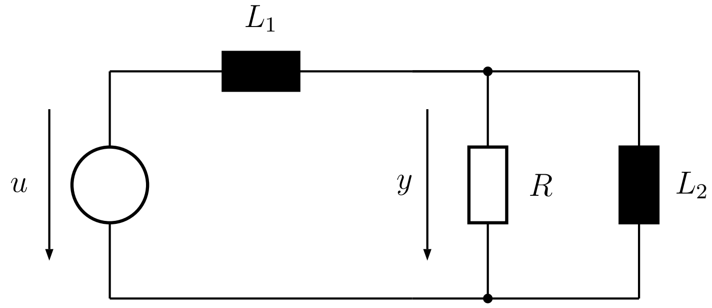
Prüfungsmodus: ◯ VO+UE (TM) ◯ VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	4	5	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer idealen Spannungsquelle, einem ohmschen Widerstand R und zwei Induktivitäten L_1 und L_2.



Die Quellenspannung der Spannungsquelle wird mit u, die Spannung am Widerstand R wird mit y bezeichnet. Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Betrachten Sie nun das System für die konkreten Parameterwerte $R = L_1 = L_2 = 1$.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.

c) Ist das System *asymptotisch stabil* bzw. *BIBO-stabil*? (*Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!*)

d) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen des Systems für die Eingangsgröße $u = u_\mathrm{R} = 1$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes nichtlineare System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} -{x_2}^2 + u \\ 2x_1{x_2}^2 + u^2 - 1 \end{bmatrix}, \qquad y = g(\mathbf{x}, u) = \sin(x_1) + x_2.$$

a) Ermitteln Sie alle Ruhelagen des Systems für die Eingangsgröße $u = u_\mathrm{R} = 1$.

b) Bestimmen Sie durch *Linearisierung* des nichtlinearen Systems für *jede Ruhelage* ein lineares zeitinvariantes Modell der Form

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} &= \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\,\Delta u, \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\,\Delta\mathbf{x} + d\,\Delta u \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &:= \mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{R}, \\ \Delta u &:= u - u_\mathrm{R}, \\ \Delta y &:= y - y_\mathrm{R}, \end{aligned}$$

welches das nichtlineare System für „kleine“ Auslenkungen aus der jeweiligen Ruhelage näherungsweise beschreibt.

c) Sind diese linearen zeitinvarianten Modelle asymptotisch stabil? (*Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!*)

Aufgabe 3:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Eingangsgröße u:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

a) Zeichnen Sie ein Strukturbild des Systems.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Ist das System *asymptotisch stabil*? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

c) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des Systems.

d) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

e) Existiert eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$ so, dass das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda z} + \boldsymbol{\delta} u$$

in Diagonalform vorliegt? Wenn ja, so bestimmen Sie die Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{\Lambda}$ sowie den Vektor $\boldsymbol{\delta}$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes lineare zeitinvariante System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.

b) Bestimmen Sie alle Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ und erstellen Sie einen PN-Plan.

c) Ist das System *asymptotisch stabil* bzw. *BIBO-stabil*? (*Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!*)

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 27.03.2015

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

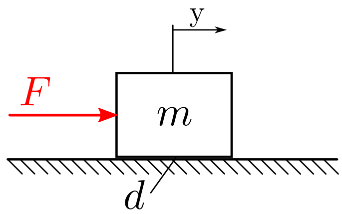
Prüfungsmodus: ◯ VO+UE (TM) ◯ VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	4	7	3	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgenden mechanischen Aufbau mit der Masse m:



Die Masse wird mit Hilfe der äußeren Kraft F in Bewegung gesetzt, wobei der Bewegungsvorgang reibungsbehaftet (Reibbeiwert d) ist. Auf die Masse wirken somit die Kraft F und die *geschwindigkeitsproportionale* Reibkraft. Die Position y der Masse wird gemessen. Fassen Sie den Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße y auf.

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Zustandsraummodell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Betrachten Sie nun das System für konkrete Parameterwerte:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{AW=0}$.

c) Ist das System asymptotisch stabil bzw.BIBO-stabil? *Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!*

d) Bestimmen Sie für die Eingangsgröße $u = \sigma(t)$ den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(t)$, falls dieser existiert.
(Mit $\sigma(t)$ wird hierbei die Einheitssprungfunktion bezeichnet)

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Eingangsgröße u der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

Im Rahmen von Experimenten wurden mit unterschiedlichen Anfangszuständen $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$ und den Eingangsgrößen

$$u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t) = \sigma(t) \qquad \text{bzw.} \qquad u^{(3)}(t) = u^{(4)}(t) = 0$$

vier verschiedene Lösungen für das System ermittelt:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} -2 + 3e^{t} \\ 0.5 + 0.5e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-3t} + 3e^{t} \\ 0.5 + 1.5e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(4)}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

a) Bei einem der vier Experimente hat sich in die Lösung ein Fehler eingeschlichen. Bestimmen Sie die fehlerhafte Lösung und geben Sie eine mathematische Begründung an.

b) Bestimmen Sie die Anfangszustände $\mathbf{x}_0$ zu den drei richtigen Lösungen.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Linearität die Lösung $\mathbf{x}^{(5)}(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^{(5)} = \mathbf{0}$ und die Eingangsgröße $u^{(5)}(t) = \sigma(t)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ -8 & -13 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

b) Führen Sei eine reguläre Zustandstransformation der Form $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ mit der Matrix $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ durch und geben Sie das transformierte System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u \qquad y = \tilde{\mathbf{c}}^T\mathbf{z}$$

an.

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{AW=0}$.

d) Bestimmen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion und erstellen Sie einen PN-Plan.

e) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

f) Bestimmen Sie für den Anfangszustand $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{0}$ und die Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das lineare zeitinvariante System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \beta \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei sind α und β reelle Parameter. Eine Person behauptet, dass die Systemmatrix folgende Eigenwert-Paare s_1 und s_2 besitzen kann:

$$(i)\ \begin{aligned} s_1 &= 2 \\ s_2 &= 2 \end{aligned} \qquad (ii)\ \begin{aligned} s_1 &= 1 + j \\ s_2 &= 1 - j \end{aligned} \qquad (iii)\ \begin{aligned} s_1 &= -1 + 2j \\ s_2 &= -2 - 2j \end{aligned}$$

a) Sind diese 3 Eigenwert-Konfigurationen prinzipiell möglich?

b) Bestimmen Sie die zu den möglichen Eigenwert-Paaren gehörigen Parameter α und β.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 06.05.2015

Name / Vorname(n):

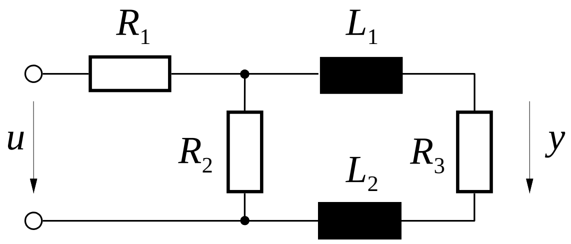
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	5	5	6	3	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus den Ohmschen Widerständen R_1, R_2 und R_3 sowie den Induktivitäten L_1 und L_2. Die Eingangsspannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung am Widerstand R_3 bezeichnet. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$

b) Bestimmen Sie für die Parameterwerte $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ und $L_1 = L_2 = 1$ die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s) := \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$.

c) Berechnen Sie für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und die Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$.

Hinweis: Mit $\sigma(t)$ wird die Einheitssprungfunktion bezeichnet.

Aufgabe 2:
Gegeben sei folgendes lineare und zeitinvariante System zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ besitzt die Eigenwerte $s_1 = 2$ und $s_2 = -1$. Ferner sind folgende zum Eigenwert $s_1 = 2$ zugehörige Eigenvektoren bekannt:

- Rechtseigenvektor $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$
- Linkseigenvektor $\boldsymbol{\rho}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

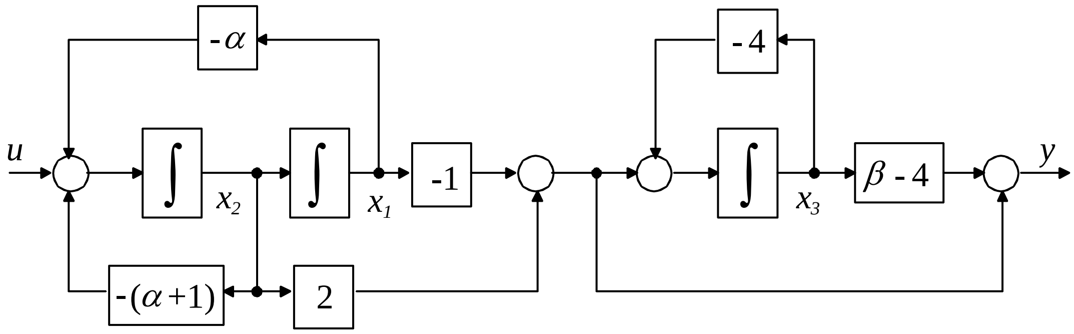
a) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Gewichtsfunktion $g(t)$ und beurteilen Sie damit die BIBO-Stabilität des Systems.

c) Berechnen Sie für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$.

HINWEIS: Die Berechnung der Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist nicht nötig!

Aufgabe 3:
Gegeben sei das Strukturbild eines linearen und zeitinvarianten Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Hierbei sind α und β reelle Parameter.



a) Erstellen Sie ein passendes mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$. Verwenden Sie dabei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s) := \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}}$.

HINWEIS: Betrachten Sie das System als eine Zusammenschaltung von zwei geeignet gewählten Teilsystemen!

c) Bestimmen Sie die größtmöglichen Wertebereiche von α und β, für welche das System asymptotisch stabil ist.

d) Bestimmen Sie die größtmöglichen Wertebereiche von α und β, für welche das System BIBO-stabil ist.

Aufgabe 4:
Gegeben sei das lineare und zeitinvariante System zweiter Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Die zugehörige Transitionsmatrix lautet:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-t} & -6e^{-2t} + 6e^{-t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & -2e^{-2t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}.$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

b) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

c) Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$ der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 03.07.2015

Name / Vorname(n):

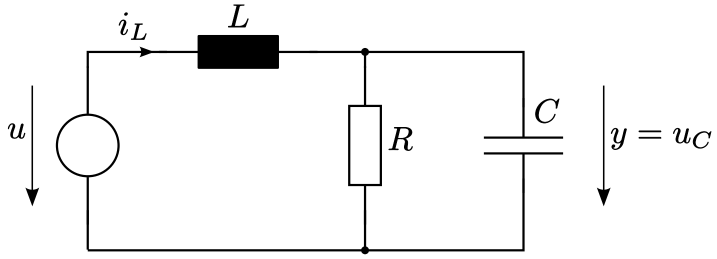
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	6	5	2
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus dem Ohmschen Widerstand R, der Induktivität L und der Kapazität C. Die Eingangsspannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung an der Kapazität C bezeichnet. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L & u_C \end{bmatrix}^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} + du.$

b) Bestimmen Sie für die Parameterwerte $R = C = L = 1$ die zugehörige Übertragungsfunktion $G(\mathrm{s}) := \left.\frac{\bar{y}(\mathrm{s})}{\bar{u}(\mathrm{s})}\right|_{AW=\mathbf{0}}$.

c) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

d) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

Aufgabe 2:
Betrachten Sie folgendes lineare und zeitinvariante System zweiter Ordnung mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

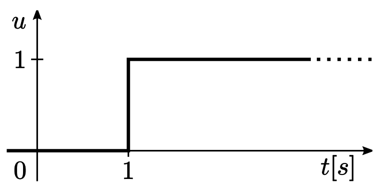
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad \mathbf{x}(\mathrm{t}=0) = \mathbf{x}_0$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Ist das System asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

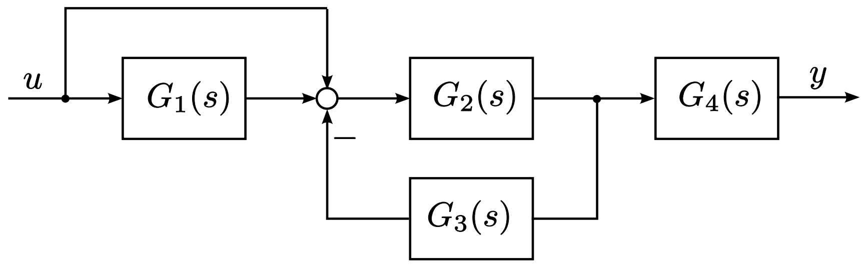
b) Transformieren Sie das System in ein äquivalentes System in Diagonalform unter Verwendung einer regulären Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{z}$:
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u, \quad y = \tilde{\mathbf{c}}^\mathrm{T}\mathbf{z} + \tilde{d}u.$$

c) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des gegebenen Systems.

d) Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für den Fall $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ und folgender Eingangsgröße $u(t)$:



Aufgabe 3:
Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von vier Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen *G₁(s), G₂(s), G₃(s)* und *G₄(s)*. Fassen Sie diese als *ein* System mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y* auf:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{AW=0}$ als Funktion der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ und $G_4(s)$.

b) Zeigen Sie, dass für

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+2s+1}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s+2}, \quad G_4(s) = 5, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

die Übertragungsfunktion $G(s)$ von *u* nach *y* durch

$$G(s) := \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{\mathrm{AW}=0} = \frac{s^2+2s+2}{s^2+2s+1} \cdot \frac{5(s+2)}{s^2+(2+\alpha)s+1+2\alpha}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, für den die Übertragungsfunktion $G(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(\mathrm{t})$ für die Eingangsgröße $u(\mathrm{t}) = 3\,\sigma(t)$ und folgende Parameterwerte:
   i) $\alpha = -2$
   ii) $\alpha = 1$

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(\mathrm{s}) := \left.\frac{\bar{y}(\mathrm{s})}{\bar{u}(\mathrm{s})}\right|_{AW=\mathbf{0}} = \frac{1}{s^4+2s^3+s^2+\mathrm{s}+3}$$

eines Systems vierter Ordnung mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

a) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
b) Ermitteln Sie die zugehörige Systembeschreibung in Form einer Differentialgleichung vierter Ordnung.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 25.09.2015

Name / Vorname(n):

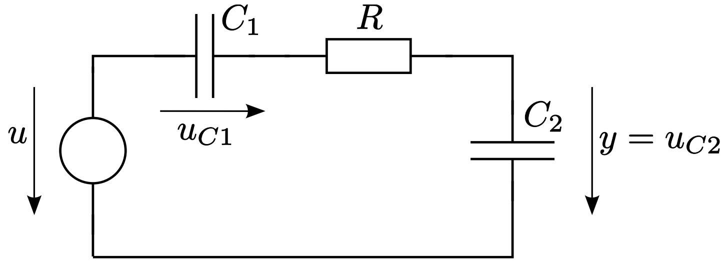
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	4	5	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus dem Ohmschen Widerstand R und den Kapazitäten C_1 und C_2. Die Eingangsspannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung an der Kapazität C_2 bezeichnet. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{C1} & u_{C2} \end{bmatrix}^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x} + du.$

Betrachten Sie nun folgendes System, das sich für konkrete Parameterwerte ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

b) Der Wert des Widerstandes ist mit $R = 1$ bekannt. Bestimmen Sie die konkreten Werte der Kapazitäten C_1 und C_2.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s) := \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{AW=\mathbf{0}}$.

d) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

e) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

Aufgabe 2:
Gegeben sei folgendes *lineare und zeitinvariante* System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Aus Versehen ging der reelle Eintrag α der Systemmatrix verloren. Dafür kennt man ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0)$ den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$:

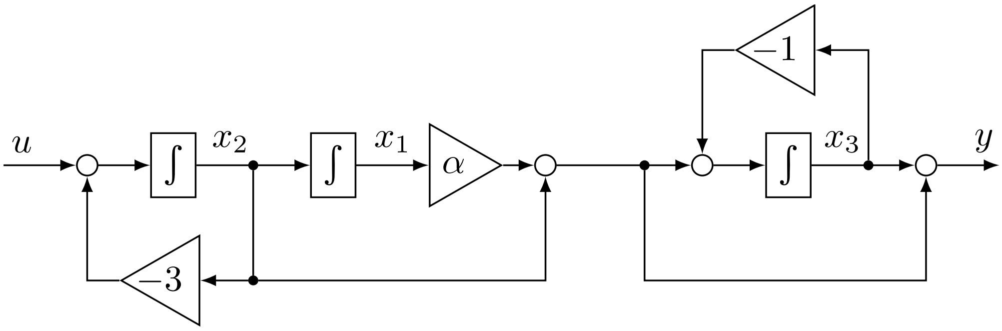
$$y(t) = e^t - 2e^{-2t}$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

b) Bestimmen Sie *alle* Ruhelagen $\mathbf{x}_\mathrm{R}$ des Systems in Abhängigkeit des Parameters α (*Hinweis*: Hierfür ist eine Fallunterscheidung notwendig).

c) Bestimmen Sie den fehlenden Eintrag α der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$.

Aufgabe 3:
Betrachten Sie folgendes Strukturbild eines **BIBO-stabilen** Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.



Hierbei ist α eine reelle Konstante.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ von u nach y durch

$$G(\mathrm{s}) := \left.\frac{\bar{y}(\mathrm{s})}{\bar{u}(\mathrm{s})}\right|_{AW=\mathbf{0}} = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

gegeben ist. Welchen Wert hat die Konstante α?

(*Hinweis:* Fassen Sie das System als Serienschaltung zweier Teilsysteme auf und verwenden Sie die Tatsache, dass es sich um ein BIBO-stabiles System handelt.)

b) Bestimmen Sie alle Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ und erstellen Sie einen PN-Plan.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(\mathrm{t})$ für die Eingangsgröße $u(\mathrm{t}) = 12\,\sigma(t)$.

Aufgabe 4:
Betrachten Sie folgendes lineare und zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + u$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Ist das System asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

b) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ des gegebenen Systems.

c) Transformieren Sie das System in ein äquivalentes System in Diagonalform unter Verwendung einer regulären Zustandstransformation der Form $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{b}}u, \quad y = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} + \tilde{d}u.$$

Geben Sie die Systemdaten $\mathbf{\Lambda}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, $\tilde{\mathbf{c}}$ und $\tilde{d}$ des transformierten Systems an.