Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 28.01.2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	4	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:
Gegeben sei folgendes System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Die Transitionsmatrix des obigen Systems lautet:

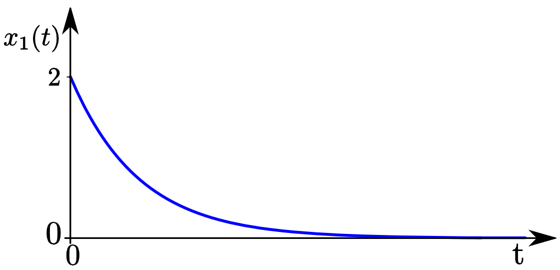
$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 3e^{-t} - 3e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

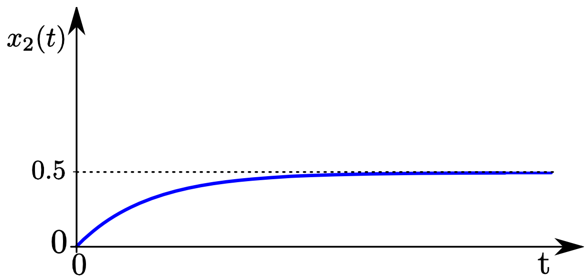
a) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.
b) Ist das System steuerbar bzw. beobachtbar? *Geben Sie jeweils eine mathematische Begründung an!*
c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.
d) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
e) Auf das System wird bei verschwindendem Anfangszustand $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{0}$ die Eingangsgröße $u(t) = 9 + 3\cos(2t)$ aufgeschaltet. Bestimmen Sie den Ausgang $y(t)$ des Systems im *eingeschwungenen* Zustand.

Aufgabe 2:
Gegeben sei ein *lineares und zeitinvariantes System 2. Ordnung* mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Einer der beiden Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ ist bekannt und liegt bei $s = -4$. Für einen bestimmten Anfangswert $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ wurden die folgenden zeitlichen Verläufe der beiden Zustandsgrößen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ gemessen:





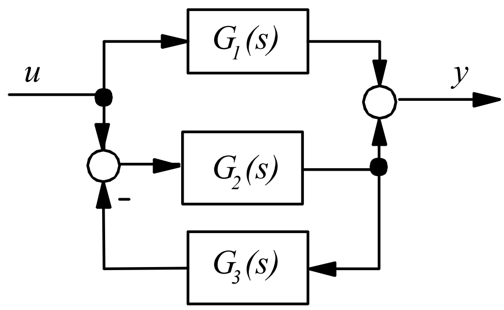
a) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
b) Bestimmen Sie den zweiten Eigenwert s_2.
c) Bestimmen Sie zwei zu den Eigenwerten s_1 und s_2 zugehörige Rechtseigenvektoren p_1 und p_2.
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien *(mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t)* in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$x_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \qquad x_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

e) Berechnen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

<u>Hinweis</u>: Betrachten Sie vor allem die Anfangs- und Endwerte der zeitlichen Verläufe!

Aufgabe 3:
Betrachten Sie folgendes System mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y*.



Die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme lauten:

$$G_1(s) = \frac{s}{s+2}, \qquad G_2 = \frac{2}{s^2+2s+3}, \qquad G_3(s) = s\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ durch

$$G(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

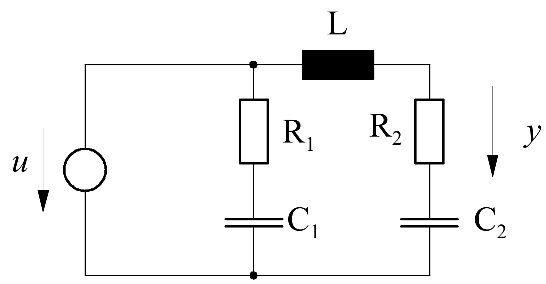
gegeben ist.

b) Wählen Sie geeignete Zustandsvariablen und ermitteln Sie ein mathematisches Modell für das Gesamtsystem in der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\,.$$

c) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

Aufgabe 4:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Induktivität L, zwei Kapazitäten C_1 und C_2 und zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit *u* symbolisiert. Mit *y* wird die Spannung am Widerstand R_2 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y* auf.Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$$

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 28.03.2014

Name / Vorname(n):

Matrikel-Nummer:

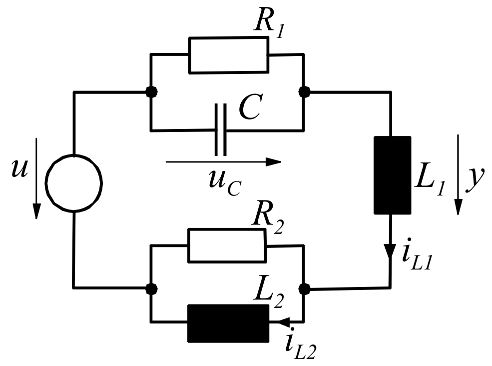
Prüfungsmodus: ◯ VO+UE (TM) ◯ VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: ◯ ja ◯ nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	7	3
errreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Kapazität C, zwei Induktivitäten L_1 und L_2 , sowie zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung an der Induktivität L_1 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

Führen Sie (gemäß obiger Abbildung) den Zustandsvektor $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} u_\mathrm{C} & i_\mathrm{L1} & i_\mathrm{L2} \end{bmatrix}^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dabei ist α ein reeller Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ durch

$$G(s) = \frac{2s - 2\alpha + 4}{s^3 + (1-\alpha)s^2 + (3-\alpha)s + 3}$$

gegeben ist. (*Hinweis:* Fassen Sie das System als Serienschaltung zweier Teilsysteme auf.)

b) Geben Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α an, für den das System die BIBO-Eigenschaft besitzt.

c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α, für den das System asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes lineare zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

a) Transformieren Sie obiges System in ein äquivalentes System in Diagonalform:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{\Lambda z} + \boldsymbol{\delta} u, \qquad y = \overline{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{z}.$$

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$. Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

c) Für eine *sinusförmige* Eingangsgröße $u(t)$ wurde *im eingeschwungenen Zustand*

$$y(t) = \sin(7t)$$

beobachtet. Ermitteln Sie den Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$.

d) Für eine unbekannte Eingangsgröße wurde ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ die Ausgangsgröße

$$y(t) = 3e^{-3t} - 3e^{-7t} \qquad \text{für } t \geq 0$$

beobachtet. Bestimmen Sie den zugehörigen Verlauf von $u(t)$.

e) Skizzieren Sie für folgende Anfangszustände den Verlauf der Trajektorien des freien *transformierten* Systems in der z_1-z_2-Ebene:

$$\mathbf{z}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 4:

Es sei folgendes lineare zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y gegeben:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} u, \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Dabei sind α und β reelle Parameter.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Bereich der Parameter α und β, sodass das System *beobachtbar* ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Bereich der Parameter α und β, sodass das System *steuerbar* ist.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 08.07.2014

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	6	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes *nichtlineare* System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^3 - x_1^2 + 2x_1 - 1 + u \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_R$ des Systems für die Eingangsgröße $u(t) = u_R = 4$.
b) Ermitteln Sie für alle Ruhelagen *lineare und zeitinvariante* Modelle der Form

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$$
$$\Delta y = \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + d\Delta u$$

mit

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x} \quad \text{und} \quad u = u_R + \Delta u$$

welche das nichtlineare System in der Nähe der Ruhelage, also für „kleine" Auslenkungen $\Delta\mathbf{x}$ und Δu, näherungsweise beschreiben.
c) Sind diese linearen und zeitinvarianten Modelle asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

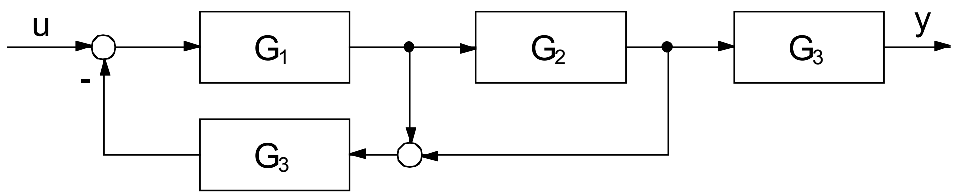
Aufgabe 2:
Gegeben sei folgendes *lineare und zeitinvariante* System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ . & . \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Aus Versehen gingen einige Daten der Systemmatrix verloren. Dafür kennt man einen Eigenwert $s = -1$ und einen Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.
<u>Hinweis</u>: Der Eigenwert und der Rechts-Eigenvektor müssen nicht notwendigerweise zusammengehören!

a) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$.
b) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
c) Ermitteln Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
d) Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von vier Teilsystemen mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$. Fassen Sie diese als *ein* System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf:



Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_1(s) = 5 \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{s+\alpha} \qquad G_3(s) = \frac{1}{s+2}$$

Hierbei ist α eine reelle Konstante.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y durch
$$T(s) = \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{AW=0} = \frac{5(s-1)}{s^2 + s(\alpha+12) + 7\alpha - 5}$$
gegeben ist.
b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich von α für welchen das System die BIBO-Eigenschaft besitzt!
c) Berechnen Sie *für hinreichend große Werte t* die Antwort $y(t)$ auf die Eingangsgröße $u(t) \equiv 2$ für folgende Parameterwerte
(i) $\alpha = -1$
(ii) $\alpha = 0$.

Aufgabe 4:
Betrachten Sie das *lineare und zeitinvariante* System mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 3 \quad 1]\mathbf{x}$$

a) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)}\right|_{AW=0}$.
c) Ist das System BIBO-stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
d) Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = [0 \quad 0]^T$ und $u(t) = e^{-t}$.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 26.09.2014

Name / Vorname(n):

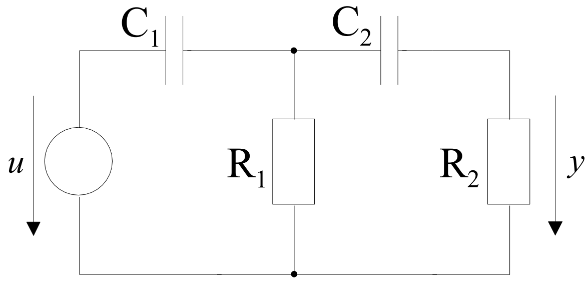
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, zwei Kapazitäten C_1 und C_2 und zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung am Widerstand R_2 bezeichnet.



Zur Vereinfachung der folgenden Berechnungen soll für die Bauelemente $C_1 = C_2 = C$ und $R_1 = R_2 = R$ gelten.
Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d\,u$.

Aufgabe 2:
Betrachten Sie folgendes lineare und zeitinvariante System zweiter Ordnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & a \end{bmatrix}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei ist a ein reeller Parameter. Es ist bekannt, dass das System *verschiedene Eigenwerte* besitzt.
Im Rahmen eines Experiments wurde festgestellt, dass das System bei zwei Versuchen mit unterschiedlichen Anfangszuständen $\mathbf{x}_{0,1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $\mathbf{x}_{0,2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ den gleichen Verlauf der Ausgangsgröße liefert: $y_1(t) = y_2(t) \equiv -3$ (für $t \geq 0$).

a) Bestimmen Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Anfangszustand $\mathbf{x}_{0,3}$, für welchen die Ausgangsgröße verschwindet: $y_3(t) \equiv 0$ (für $t \geq 0$).
b) Wie viele Ruhelagen besitzt das System? *Begründen Sie Ihre Antwort!*
c) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a.
HINWEIS: Beachten Sie die Anzahl der Ruhelagen!
d) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*
e) Ermitteln Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

Aufgabe 3:
Betrachten Sie folgendes lineare und zeitinvariante System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y in Form einer Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(3-\alpha)\frac{dy}{dt}+(\beta-6)\,\mathrm{y}=\frac{d^2u}{dt^2}+(4-\alpha)\frac{du}{dt}+(\beta-6-\alpha)\,\mathrm{u}$$

Hierbei sind α und β zwei reelle Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Übertragungsfunktion durch

$$G(\mathrm{s}):=\left.\frac{y(\mathrm{s})}{u(\mathrm{s})}\right|_{AW=\mathbf{0}}=\frac{s-\alpha}{s^2+(3-\alpha)\mathrm{s}+(\beta-6)}+1$$

gegeben ist.

b) Ermitteln Sie ein zugehöriges Zustandsraummodell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\,\mathbf{x}+\mathbf{b}\,u \qquad y=\mathbf{c}^T\mathbf{x}+d\,u\,.$$

c) Bestimmen Sie die Wertebereiche von α und β für welche das System asymptotisch stabil ist.

d) Bestimmen Sie die Wertebereiche von α und β für welche das System BIBO-stabil ist.

Aufgabe 4:
Gegeben sei folgendes lineare und zeitinvariante System zweiter Ordnung mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}u, \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Die zugehörige Transitionsmatrix lautet:

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}e^t & -e^t+e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$ der Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

b) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

c) Ist das System asymptotisch stabil? *Geben Sie eine mathematische Begründung an!*

d) Zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild.

e) Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(\mathrm{t})$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u(\mathrm{t})=\sigma(\mathrm{t})$. Hierbei wird mit $\sigma(\mathrm{t})$ die Einheitssprungfunktion symbolisiert.