Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 19.10. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	3	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell 2.Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Eingangsgröße u.

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ und Eingangssignal $u(t) \equiv 0$ wurde die zugehörige Lösung $\mathbf{x}(t)$ ermittelt:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{4t} \\ 4e^{4t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Ermitteln Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ - Ebene für $u(t) \equiv 0$ und folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein).

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein System 2. Ordnung mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} c_1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Bei der Aufzeichnung der Daten wurden die reellen Parameter b_1 und c_1 vermischt. Einer davon beträgt *3*, der andere *2*. Es ist jedoch bekannt, dass das System die **BIBO**-Eigenschaft besitzt.

a) Ist das System asymptotisch stabil?

b) Bestimmen Sie die Werte b_1 und c_1.

c) Ist das System *steuerbar* und / oder *beobachtbar*?

Aufgabe 3:

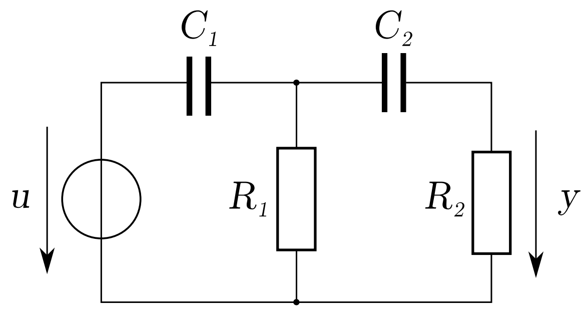
Gegeben sei ein System mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und der zugehörigen Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s+1}$$

Es wird nun $u(t) = 3 + \sqrt{2}\sin(t + \pi/4)$ gewählt. Bestimmen Sie für hinreichend große Werte von t die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2 sowie zwei Kapazitäten C_1 und C_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2 (siehe Abbildung). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

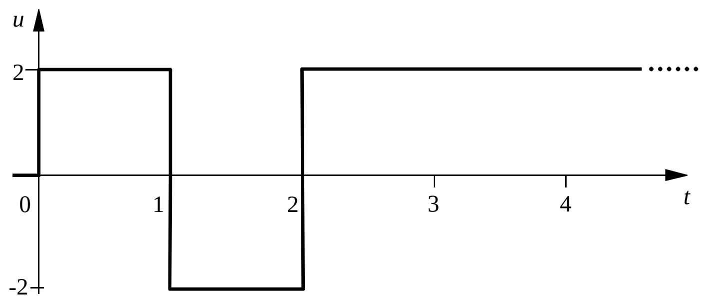


a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u, \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d\,u\,.$$

b) Ist das System sprungfähig? *Begründen Sie Ihre Antwort.*

c) *Berechnen* Sie die Grenzwerte $\mathbf{x}_\infty := \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ und $y_\infty := \lim_{t\to\infty} y(t)$ für folgenden Spannungsverlauf $u(t)$:



Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 25.01.2013

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein lineares und zeitinvariantes (LZI) System der Form $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$. Für die vier Eingangsfunktionen

$$u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t) = \sigma(t) \qquad u^{(3)}(t) = u^{(4)}(t) = 0$$

und unterschiedliche Anfangszustände ergeben sich folgende Lösungen:

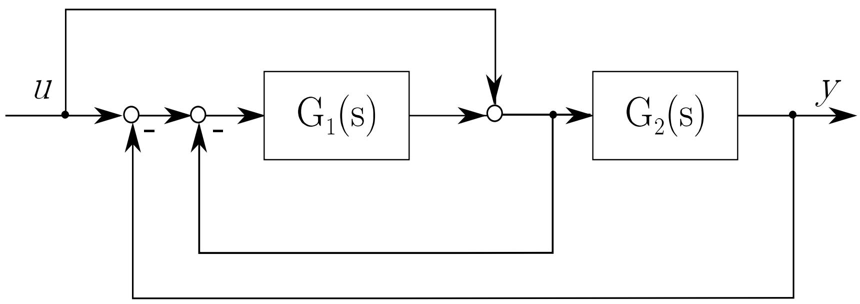
$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} + 3e^{-t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(4)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Dabei hat sich jedoch bei *einer Lösung ein Fehler eingeschlichen*!

a) Welche der obigen Lösungen ist fehlerhaft? *(Begründen Sie ihre Antwort!)*
b) Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{x}^{(5)}(t)$ des Systems für den Anfangszustand $\mathbf{x}^{(5)}(0) = \mathbf{0}$ und die Eingangsgröße $u^{(5)}(t) = \sigma(t)$.
c) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
d) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und den Eingangsvektor $\mathbf{b}$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



Hierbei gilt:

$$G_1(s) = \frac{s+4}{s+2} \quad \text{und} \quad G_2(s) = \frac{s+3}{1-s}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{AW=0}$ durch

$$G(s) = 2\frac{s+3}{6-s}$$

gegeben ist.
b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft? *(Begründen Sie ihre Antwort!)*
c) Ermitteln Sie ein Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du,$$

welches diese Übertragungsfunktion $G(s)$ besitzt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das LZI-System

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} c_1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

mit der reellen Konstante c_1.

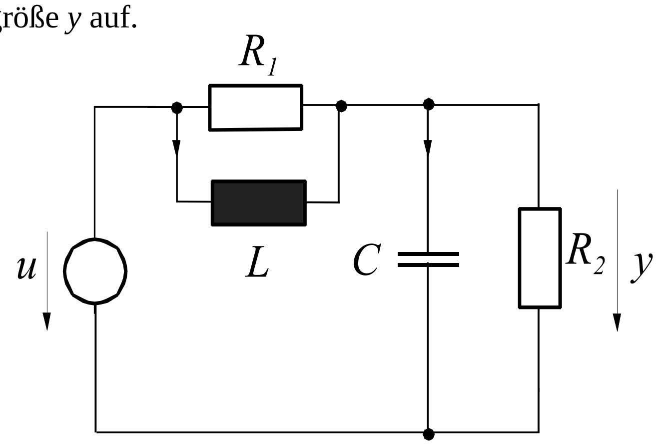
a) Ist das System asymptotisch stabil? (Geben Sie eine mathematische Begründung an!)
b) Ermitteln Sie eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$, sodass die Systemmatrix des transformierten Systems in Diagonalform vorliegt.
c) Für welche Werte von c_1 ist das System *nicht* steuerbar?
d) Für welche Werte von c_1 ist das System *nicht* beobachtbar?
e) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende t-Werte) für folgende Anfangszustände $\mathbf{x}(0)$:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) muss dabei erkennbar sein!

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Induktivität *L*, einer Kapazität *C* und zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Hierbei gilt $R_1 = R_2$. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und erstellen Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\,.$$

b) Zeichnen Sie ein Strukturbild des Systems.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 08.03.2013

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

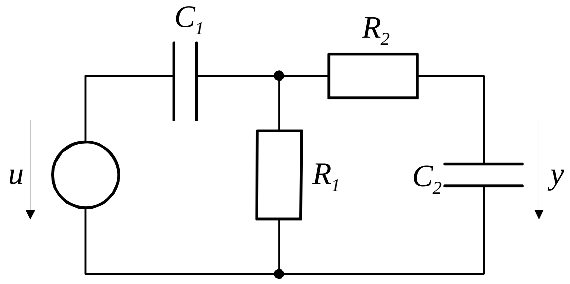
Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk (siehe Skizze) bestehend aus den Ohmschen Widerständen R_1 und R_2 und den Kapazitäten C_1 und C_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Kapazität C_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie für den Fall $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\,.$$

b) Setzen Sie alle Bauteilwerte als positiv voraus. Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort!*)

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des obigen Systems durch

$$G(s) = \frac{4s - 6 + 2\alpha}{s^2 + (\alpha + 1)s + \alpha}$$

gegeben ist.

b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

c) Auf das System wirkt die Eingangsgröße $u(t) = \sin(t)$. Berechnen Sie für hinreichend große Werte t die Ausgangsgröße $y(t)$ für die Fälle

i) $\alpha = 1$ ii) $\alpha = -1$

Aufgabe 3:

Gegeben sei das LZI-System mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,.$$

Hierbei ist β ein reellwertiger Parameter.

a) Für welche Werte von β ist das System *beobachtbar*? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
b) Für welche Werte von β ist das System *steuerbar*? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
c) Zeichnen Sie ein Strukturbild des Systems.
d) Ermitteln Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$ des Systems in Abhängigkeit von β. *(Hinweis: Beachten Sie dabei auch den Fall $\beta = 0$).*

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das LZI-System mit der Eingangsgröße u und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u\,.$$

a) Geben Sie zwei unterschiedliche, reguläre Transformationsmatrizen $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$ an, sodass das Modell bezüglich $\mathbf{z}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{z}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{x}$ in Diagonalform vorliegt.
b) Bestimmen Sie die zu obigem System gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
c) Für die Eingangsgröße u gelte $\lim_{t\to\infty} u(t) = 2$. Ermitteln Sie den Grenzwert $\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$.
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien des freien Systems in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende drei Anfangszustände (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende *t*-Werte):

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) muss dabei erkennbar sein!

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 08.07. 2013

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	4	4	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell 2.Ordnung eines **steuerbaren** Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$, der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y sowie der Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \qquad G(s) = \frac{3}{s+2}.$$

Ausgehend von einem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) := \mathbf{x}_0$ wird nun bei verschwindendem Eingang $u(t) \equiv 0$ folgender Endwert gemessen:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

a) Bestimmen Sie zwei linear unabhängige Rechtseigenvektoren $\mathbf{p}_{1,2}$ sowie die zugehörigen Eigenwerte $s_{1,2}$.

b) Ist das System beobachtbar? (*Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch).*

c) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ sowie den Ausgangsvektor $\mathbf{c}^T$.

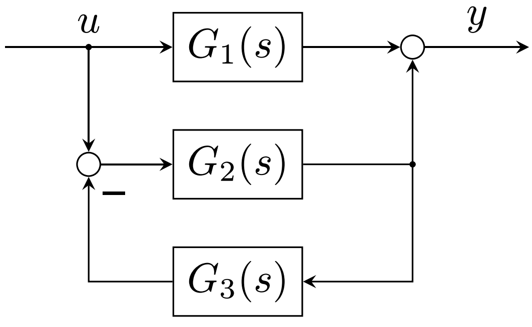
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$- Ebene für $u(t) \equiv 0$ und folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein).

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ - $G_3(s)$:



$$G_1(s) = 1, \quad G_2(s) = \frac{3}{s+2}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s^2+\gamma}.$$

Dabei stellt γ einen reellen Parameter dar.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ von u nach y durch

$$G(s) := \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathrm{AW}=0} = \frac{(s^2+\gamma)(s+5)+3}{(s^2+\gamma)(s+2)+3}$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie den Parameter γ so, dass ein Eingangssignal $u(t) = \cos(2t)$ nach hinreichend langer Zeit $t \gg$ unverändert am Ausgang erscheint: $y(t) = \cos(2t)$. (*Hinweis: Hierzu sind keine umfangreichen Rechnungen notwendig!)*

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Übertragungsfunktion eines Systems 3. Ordnung:

$$G(s) = \frac{s^2 - s - 2}{s^3 + \alpha s^2 - 4s - 4\alpha}.$$

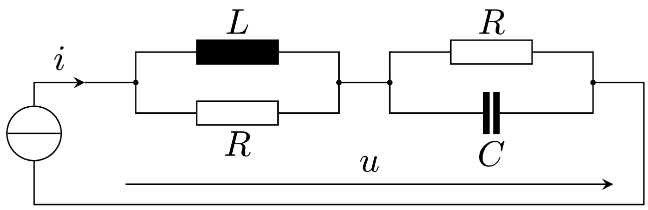
Dabei stellt α einen reellen Parameter dar.

a) Was für eine Aussage können Sie über die **asymptotische Stabilität** des Systems machen?

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α, für den das System die **BIBO-Eigenschaft** besitzt.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus zwei Ohmschen Widerständen *R* sowie einer Kapazität *C* und einer Induktivität *L*. Der von der Stromquelle gelieferte Strom wird mit *i* symbolisiert. Mit *u* bezeichnen wir die gesamte am Netzwerk abgefallene Spannung (siehe Abbildung). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße *i* und der Ausgangsgröße *u* auf(!).



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,i, \qquad u = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d\,i.$$

b) Ist das System sprungfähig? *Begründen Sie Ihre Antwort.*

c) Überprüfen Sie die Steuerbarkeit des Systems in Abhängigkeit von *R*, *C* und *L*.

d) **Skizzieren** Sie die Verläufe von $i_L(t)$, dem Strom durch die Induktivität, und $u_C(t)$, der Spannung am Kondensator bei einem **konstanten** Eingangsstrom $i(t) = I_0 \cdot \sigma(t)$ und den Anfangswerten

$$i_L(0) = I_0, \qquad u_C(0) = 0.$$

(*Hinweis: Betrachten Sie die Grenzwerte von* $i_L(t)$ *und* $u_C(t)$ *!)*

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 20.09. 2013

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	7	6	6
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines **beobachtbaren** Systems mit dem Zustandsvektor $\mathbf{z}$, der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y sowie der Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 & 1 \end{bmatrix}^T \mathbf{z}, \qquad G(s) = \frac{b}{s+2}.$$

Dabei stellen s_1 und s_2 die Eigenwerte der Systemmatrix, b, δ_2 sowie $\bar{\delta}_1$ (reelle) Parameter dar.

Ausgehend von einem bestimmten Anfangszustand $\mathbf{z}(0) =: \mathbf{z}_0$ wird bei einer sprungförmigen Eingangsgröße folgender Verlauf der Ausgangsgröße gemessen:

$$u(t) = 10\sigma(t) \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = 3e^{-3t} + 5.$$

a) Ist das System steuerbar? (*Begründen Sie Ihre Antwort).*

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte s_1 und s_2 sowie die fehlenden Parameter δ_2, b und $\bar{\delta}_1$.

c) Bestimmen Sie den Anfangszustand $\mathbf{z}(0) =: \mathbf{z}_0$, der zu obigem Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ führt.

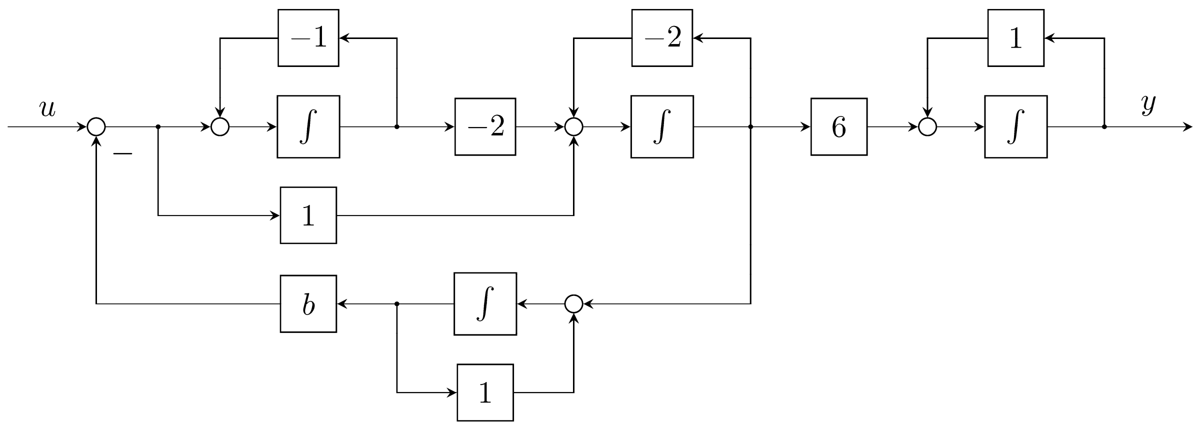
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $z_1 - z_2$- Ebene für $u(t) \equiv 0$ und folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{z}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{z}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein).

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild eines Systems 4. Ordnung mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y sowie dem reellen Parameter b:



a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ durch

$$G(s) := \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathrm{AW}=0} = \frac{6}{s^2+3s+2+b}$$

gegeben ist.

b) Ist das System asymptotisch stabil? (*Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch.*)

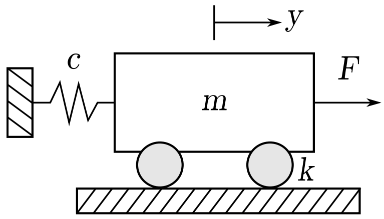
c) Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ nach hinreichend langer Zeit $t \gg$, wenn als Eingangssignal $u(t) = 1 + \sqrt{2}\cos(2t)$ wirkt und der Parameter b mit

(i) $b = -3$ (ii) $b = 8$

angenommen wird.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes mechanische System einer Masse m, welche durch eine Feder mit einer Wand verbunden ist. Die Feder besitzt eine lineare Federkennlinie mit der positiven Federkonstante c.



Die Position y der Masse wird ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Auf die Masse wirkt eine Kraft F sowie eine der Geschwindigkeit proportionale Reibkraft mit dem positiven Reibkoeffizienten k. Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße $u = F$ und der Ausgangsgröße y auf.

a) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y & \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \end{bmatrix}^T$.

Im Folgenden betrage die Masse $m = 1$.

b) Am Ausgang wird ausgehend von einem bestimmten Anfangszustand $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ und ohne Einwirkung einer Kraft, d.h. $u(t) \equiv 0$, folgender Verlauf gemessen: $y(t) = 2e^{-t} + e^{-3t}$. Bestimmen Sie die Werte der Federkonstante c sowie des Reibkoeffizienten k.

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

d) Zeigen Sie, dass eine konstante Kraft $u = \sigma(t)$ nach hinreichend langer Zeit zu einer konstanten Auslenkung $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1/c$ führt.

e) Untersuchen Sie die Steuerbarkeit des Systems in Abhängigkeit von den Parametern c und k.