

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 21.10. 2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus:

VO+UE (TM)

VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen:

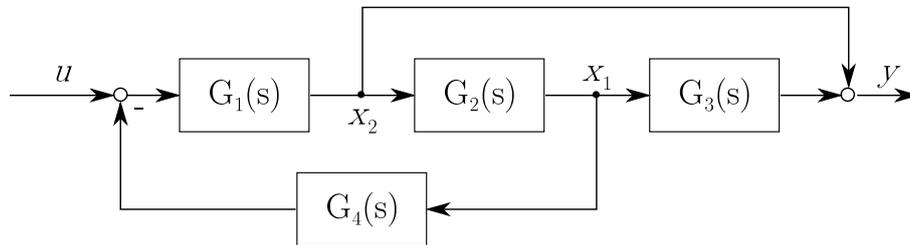
ja

nein

	①	②	③	④
erreichbare Punkte	7	4	4	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y :



- a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \Big|_{AW=0}$ in Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ und $G_4(s)$.

Es gilt nun für alle weiteren Aufgaben (a und b sind hierbei reelle Parameter):

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a+b}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s}, \quad G_3(s) = a, \quad G_4(s) = ab.$$

- b) Zeigen Sie, dass $G(s)$ durch $G(s) = \frac{1}{s+b}$ gegeben ist.
- c) Welches der beiden folgenden Zustandsraummodelle entspricht obigem Blockschaltbild? Berücksichtigen Sie dabei die Zuordnung $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2]!$ (*Hinweis:* Beachten Sie insbesondere die Übertragungsfunktion von x_2 zu x_1 !)

$$\text{i) } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ab & -a-b \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \text{ii) } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -ab \\ 1 & -a-b \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [a \quad 1] \mathbf{x} \quad \quad \quad y = [0 \quad 1] \mathbf{x}$$

- d) Ist das System **steuerbar** und / oder **beobachtbar**? (Begründen Sie Ihre Antwort).
- e) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter a und b , damit das obige System **asymptotisch stabil** ist.
- f) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter a und b , damit das obige System die **BIBO-Eigenschaft** aufweist.

Aufgabe 2:

Für die Übertragungsfunktionen zweier LZI-Systeme gilt:

$$\begin{aligned} \text{System 1:} \quad G_1(s) &= \left. \frac{y_1(s)}{u_1(s)} \right|_{AW=0} = \frac{3s-6}{s^3+2s^2+4s+5}, \\ \text{System 2:} \quad G_2(s) &= \left. \frac{y_2(s)}{u_2(s)} \right|_{AW=0} = \frac{3}{s^4+s^3+2s^2+4s+5}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für hinreichend große Werte von t die *eingeschwungenen* Antworten $y_1(t)$ und $y_2(t)$ der beiden Systeme auf die Eingangsgrößen:

$$u_1(t) = u_2(t) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes lineare zeitinvariante mathematische Modell mit der Eingangsgröße u :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2]$$

Folgende Lösungen wurden unter unterschiedlichen Bedingungen ermittelt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 : \quad \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3e^{-3t} \end{bmatrix}, & \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{0} : \quad \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2-2e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(t) \equiv 0 & & u(t) = \sigma(t) & \end{aligned}$$

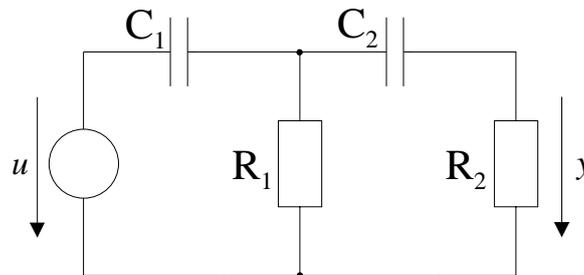
- Ermitteln Sie die Dynamikmatrix \mathbf{A} sowie den Eingangsvektor \mathbf{b} des mathematischen Modells.
- Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ -Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \rightarrow \infty$) erkennbar sein)

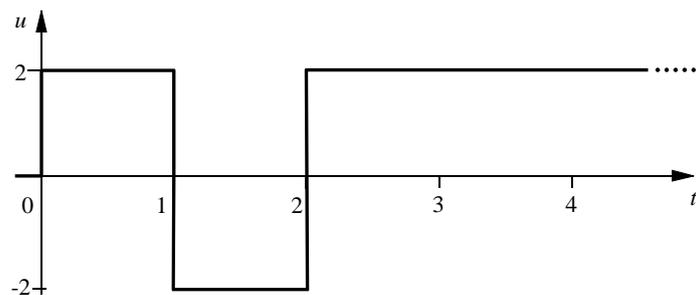
Aufgabe 4

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2 sowie zwei Kapazitäten C_1 und C_2 . Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2 (siehe Abbildung). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen soll für die Bauelemente gelten:
 $R_1=R_2=R$ und $C_1=C_2=C$.

- a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor \mathbf{x} ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.
- b) Ermitteln Sie die Grenzwerte $\mathbf{x}_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ und $y_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ für folgenden Spannungsverlauf $u(t)$:



Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 26.01. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus:

VO+UE (TM)

VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen:

ja

nein

	①	②	③	④
erreichbare Punkte	7	4	4	4
erreichte Punkte				

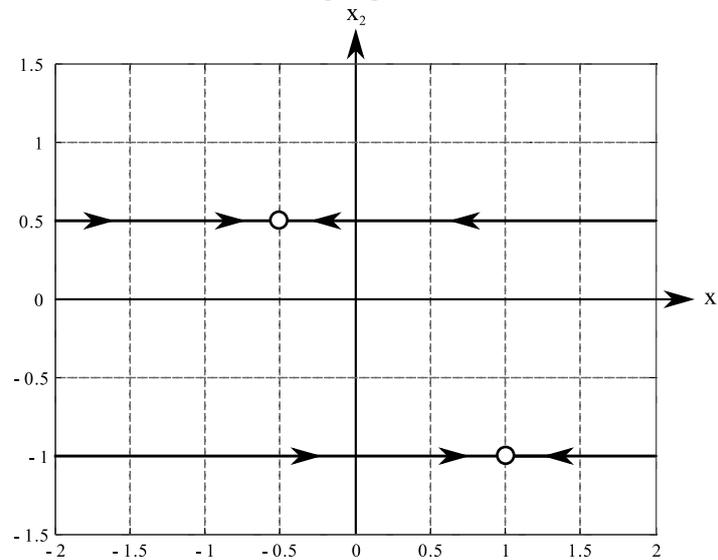
Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes lineare zeitinvariante mathematische Modell mit der Eingangsgröße u , der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor \mathbf{x} :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}^T := [x_1 \quad x_2]$$

$$y = [1 \quad 1]^T \mathbf{x}$$

Folgendes Trajektorienbild in der $x_1 - x_2$ -Ebene ergibt sich für verschiedene Anfangszustände $\mathbf{x}(t=0) =: \mathbf{x}_0$ und verschwindenden Eingang $u(t) \equiv 0$:



- Ermitteln Sie zwei linear unabhängige Rechtseigenvektoren \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 .
- Ist das System beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch.

Vier Übertragungsfunktionen $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \Big|_{AW=0}$ stehen zur Auswahl:

$$G_1(s) = \frac{2}{s(s+1)}, \quad G_2(s) = \frac{2}{s+1}, \quad G_3(s) = \frac{3}{s(s-1)}, \quad G_4(s) = \frac{5}{s-1}.$$

- Welche der vier Übertragungsfunktionen $G(s)$ beschreibt das Eingangs-/Ausgangsverhalten obigen Systems? Begründen Sie Ihre Wahl!
- Geben Sie eine Matrix \mathbf{A} und einen Vektor \mathbf{b} an, die zu der ermittelten Übertragungsfunktion $G(s)$ führen.

Aufgabe 2:

Ein lineares und zeitinvariantes System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [-4 \quad 1]\mathbf{x}$$

wird mit einem harmonischen Signal $u(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$ angeregt. Die Parameter U , ω und φ sind hierbei reellwertig. Nach hinreichend langer Zeit t (d.h. im *stationären* Zustand) misst man am Ausgang folgendes Signal: $y(t) = 10 \sin(2t)$.

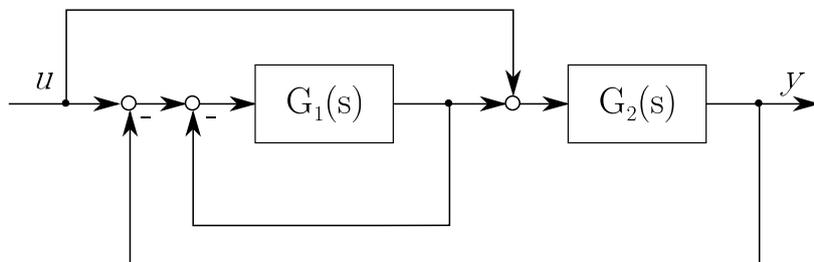
a) Welche der folgenden Systemmatrizen beschreibt obiges Verhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$(i) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (ii) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (iii) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Parameter U , ω und φ mit Hilfe der in a) gewählten Systemmatrix.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y :



Hierbei gilt:

$$G_1(s) = -2 \quad \text{und} \quad G_2(s) = \frac{3s+3}{2s-1}.$$

- a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left. \frac{y(s)}{u(s)} \right|_{AW=0}$ in Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$.
- b) Besitzt die Übertragungsfunktion $G(s)$ die BIBO-Eigenschaft?

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das mathematische Modell

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Folgende drei Eigenvektoren der Systemmatrix \mathbf{A} sind vorgegeben:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte s_1 , s_2 und s_3 der Systemmatrix \mathbf{A} .
- Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ für obigen Anfangswert \mathbf{x}_0 .

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 21.03. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus:

VO+UE (TM)

VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen:

ja

nein

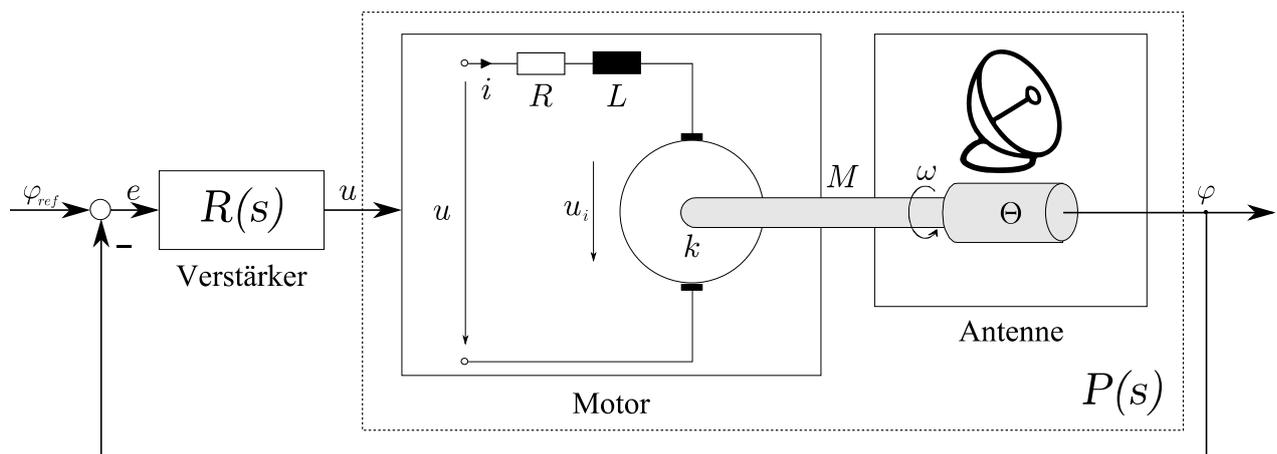
	①	②	③	
erreichbare Punkte	8	4	7	
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Der Winkel φ einer Parabolantenne soll geregelt werden. Als Antrieb wird hierzu ein Gleichstrommotor verwendet, welcher durch einen idealen Ohmschen Widerstand R sowie eine ideale Induktivität L näherungsweise beschrieben wird. Als Eingangsgröße des Motors wirkt die Spannung u , welche einen Strom i durch den Anker hervorruft. Das erzeugte Moment M (Ausgangsgröße des Motors) ist proportional zum Strom: $M = k \cdot i$ (k ist hierbei die positive, reelle Motorkonstante). Es hat eine Drehung der Antenne um den Winkel φ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$ zur Folge. Durch diese Drehung wird wiederum eine Spannung u_i induziert, welche der treibenden Spannung u entgegenwirkt: $u_i = k \cdot \omega$.

Die Rotationsbewegung der Antenne wird in erster Näherung durch $\Theta \frac{d\omega}{dt} = M$ beschrieben (Θ entspricht dabei dem Trägheitsmoment der Antenne).

Der Winkel φ der Antenne wird ideal gemessen und mit dem Referenzwinkel φ_{ref} verglichen. Ein Verstärker mit der Übertragungsfunktion $R(s) = V$ (V ist hierbei ein reeller Parameter) erzeugt schließlich aus dem Regelfehler $e = \varphi_{ref} - \varphi$ die Spannung u .



Betrachten Sie zunächst nur das markierte Teilsystem bestehend aus dem Motor und der Antenne.

- a) Entwerfen Sie ein lineares, zeitinvariantes mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}^T := [i, \varphi, \omega]$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

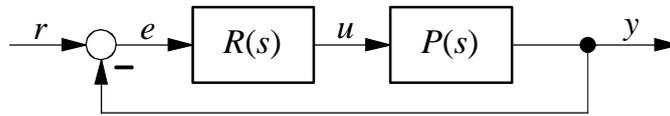
mit der Spannung u als Eingangsgröße und dem Winkel φ als Ausgangsgröße y .

- b) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $P(s) = \left. \frac{\varphi(s)}{u(s)} \right|_{AW=0}$ durch

$$P(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{k}{L\Theta}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k^2}{L\Theta}} \quad \text{mit } k > 0, \quad \Theta > 0$$

gegeben ist (Hinweis: Es handelt sich um eine Serienschaltung).

(Einstiegspunkt) Betrachten Sie nun den Regelkreis mit dem Verstärker $R(s) = V$ und der Übertragungsfunktion der Strecke $P(s)$ gemäß Punkt b):



- c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des reellen Verstärkungsfaktors V , damit die Übertragungsfunktion des Regelkreises $T(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi_{ref}(s)} \Big|_{AW=0}$ die BIBO-Eigenschaft besitzt.

- d) Für die Parameter gilt nun:

$$R = 1, \quad L = 1, \quad \Theta = 1, \quad k = 2.$$

Welchen Verlauf hat der Winkel $\varphi(t)$ im eingeschwungenen Zustand (also nach hinreichend langer Zeit t), wenn als Referenz die Funktion $\varphi_{ref}(t) = \pi + \sin(2t)$ aufgeschaltet wird und die Verstärkung mit

$$\text{i) } V = \frac{7}{4} \quad \text{ii) } V = \frac{9}{4}$$

gewählt wird?

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein **nicht steuerbares** System 2. Ordnung mit der Eingangsgröße u , dem Zustandsvektor \mathbf{x} und der Ausgangsgröße y :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad -2]\mathbf{x}$$

Das System besitze zwei *verschiedene* Eigenwerte s_1 und s_2 . Weiters sei ein Links-Eigenvektor $\rho_1^T = [1 \quad 0]$ mit dem zugehörigen Eigenwert $s_1 = -1$ bekannt.

- a) Bestimmen Sie für den zweiten Eigenwert einen Links-Eigenvektor ρ_2 des obigen Systems.
- b) Ist das System beobachtbar? (Geben Sie eine mathematische Begründung an!)
- c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^T = [1 \quad -1]$, wenn für den zweiten Eigenwert s_2 gilt:

$$\text{i) } s_2 = -2, \quad \text{ii) } s_2 = 0, \quad \text{iii) } s_2 = 1$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \rightarrow \infty$) erkennbar sein sowie der Richtungssinn für wachsende Werte der Zeit t angegeben werden.)

Aufgabe 3:

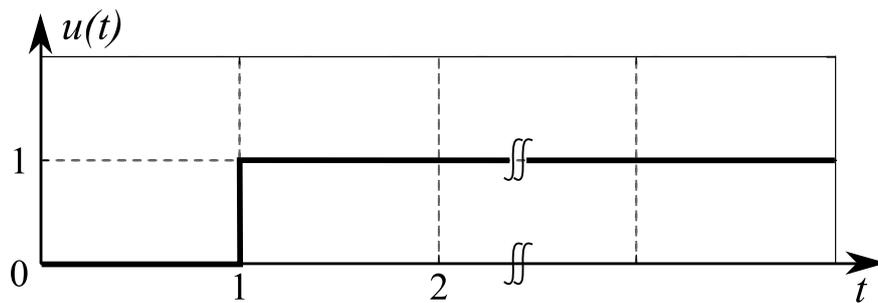
Das Modell eines Systems mit dem Zustandsvektor \mathbf{x} , der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y liegt vor:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}$$

- Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des freien Systems.
- Ist das System steuerbar und / oder beobachtbar?
- Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft?
(Begründen Sie Ihre Antworten jeweils mathematisch!)
- Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ sowie die Übertragungsfunktion $P(s)$ des Systems.

Als Eingang wird nun folgender Verlauf $u(t)$ aufgeschaltet:



- Berechnen Sie den Verlauf von $y(t)$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}(t=0) = [1 \quad 2 \quad 3]^T$.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 06.07. 2012

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus:

VO+UE (TM)

VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen:

ja

nein

	①	②	③	④
erreichbare Punkte	4	6	5	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Von einem autonomen linearen, zeitinvarianten System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0)$$

kennt man einen Teil der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ sowie eine spezielle Lösung $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} ? & e^{-t} - e^{-3t} \\ ? & e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}.$$

- Bestimmen Sie die fehlenden Einträge der Transitionsmatrix $\Phi(t)$, sowie die Systemmatrix \mathbf{A} . (*Hinweis: Beachten Sie die Deutung der Spalten von $\Phi(t)$!*)
- Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ -Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \rightarrow \infty$) erkennbar sein).

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein System 2. Ordnung mit der Eingangsgröße u , dem Zustandsvektor \mathbf{x} und der Ausgangsgröße y :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad \gamma] \mathbf{x}$$

(dabei ist γ ein reeller Parameter). Die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems hat folgende Form (mit den reellen Parametern n_1 , s_1 und s_2):

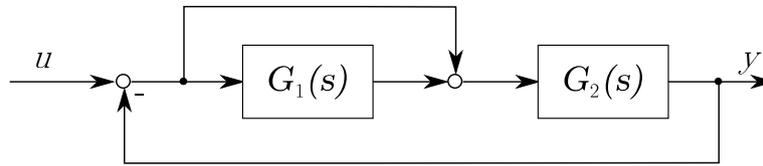
$$G(s) = \frac{s - n_1}{(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Bei einem Experiment wird die Eingangsgröße $u(t) = e^{-2t}$ auf das System geschaltet. Zur Überraschung aller kann aber kein Signal am Ausgang entdeckt werden: $y(t) \equiv 0$.

- Bestimmen Sie die Werte der Null- und Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$.
- Ist das System steuerbar und / oder beobachtbar? *Begründen Sie Ihre Antwort ohne Berechnungen durchzuführen!*
- Berechnen Sie den Parameter γ .
- Bestimmen Sie den Anfangswert $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t=0)$, der bei dem Experiment vorgelegen hat.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y :



Hierbei gilt:

$$G_1(s) = -\frac{2}{s+a} \quad \text{und} \quad G_2(s) = \frac{1}{s-2}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \Big|_{AW=0}$ durch

$$G(s) = \frac{s+(a-2)}{s^2+(a-1)s-(a+2)}$$

gegeben ist. (Hinweis: Berechnen Sie $G(s)$ zunächst allgemein als Funktion von $G_1(s)$ und $G_2(s)$.)

- b) Als Eingang wird nun $u(t) = 3 + \sqrt{2} \sin(t+2)$ gewählt. Bestimmen Sie für hinreichend große Werte von t die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$ für

- (i) $a = 1$ (ii) $a = 0$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus zwei Ohmschen Widerständen R sowie je einer Kapazität C und einer Induktivität L . Der von der Stromquelle gelieferte Strom wird mit i symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die gesamte abfallende Spannung (siehe Abbildung). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße i und der Ausgangsgröße y auf.

- a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor \mathbf{x} ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}i, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + di.$$

- b) Bestimmen Sie die Relation zwischen R , C und L , für die das System die Steuerbarkeit verliert.

- c) Ermitteln Sie die Grenzwerte $\mathbf{x}_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)$ und

$y_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ für folgenden Stromverlauf:

$$i(t) = \sigma(t) - 3\sigma(t-1).$$

