Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 22.10. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

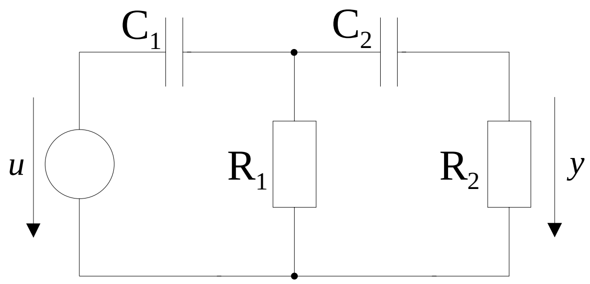
Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	4	5	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk, bestehend aus zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2 sowie zwei Kapazitäten C_1 und C_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2 (siehe Abbildung). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen soll für die Bauelemente gelten:
$R_1=R_2=R$ und $C_1= C_2=C$

a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d\,u$.

b) Ermitteln Sie den Grenzwert $\mathbf{x}_\infty := \lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)$ für

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\ge 0 \end{cases} \text{ und } \mathbf{x}(t=0) \text{ beliebig}.$$

Aufgabe 2

Gegeben sei folgendes mathematisches Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ \frac{1}{2}(3-\alpha) & -\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei ist α ein reeller, ***positiver*** Parameter.
In einer Laborübung wird auf das System zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei geeignet gewähltem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ die Eingangsfunktion $u(t) = 3e^{-7t}$ aufgeschaltet und die Ausgangsgröße $y(t)$ (für $t \ge 0$) beobachtet. Beim Verfassen des Laborberichts bemerken zwei Studenten, dass Sie zwei unterschiedliche Ergebnisse notiert haben:

Student 1: $y(t) = 2e^{2t} + e^{\beta t}$ Student 2: $y(t) = 2e^{-3t} + e^{\beta t}$

Die Größe β ist hierbei ein reeller Parameter und es gilt $\beta \ne -7$.

a) Ermitteln Sie welcher Student die Ausgangsgröße richtig notiert hat.
(Begründen Sie Ihre Antwort!)

b) Bestimmen Sie die Parameter α und β sowie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

Aufgabe 3

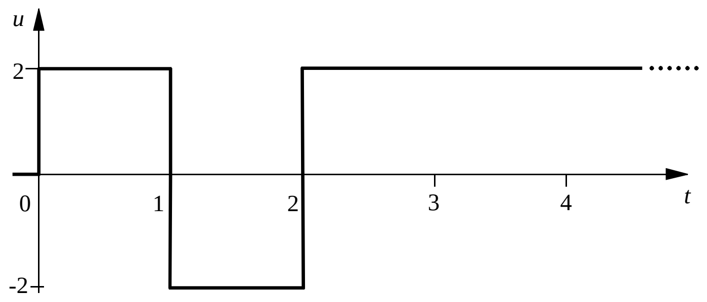
Gegeben sei die Übertragungsfunktion eines Systems 2. Ordnung:

$$G(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2}$$

a) Geben Sie für dieses System eine mögliche Zustandsraumdarstellung der Form $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ an.

b) Berechnen Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$.

c) Berechnen Sie die Antwort des Systems $y(t)$ für den Fall $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und folgender Eingangsgröße $u(t)$:



Aufgabe 4

Das System *S1*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

wird durch die Zustandstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$$

in das System *S2*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{z}$$

transformiert. Ein etwas zerstreuter Professor hat die Daten des Systems *S1* verloren. Er kann sich aber noch daran erinnern, dass das System in Diagonalform vorlag.

a) Bestimmen Sie die Systemdaten $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}^T$ von *S1*.

b) Ist das System S*1* asymptotisch stabil?
(Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Ist das System S1 *steuerbar* bzw. *beobachtbar*?
(*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 28.01.2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	4	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes zeitinvariante System 3. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \, .$$

Ausgehend von den drei Anfangszuständen $\mathbf{x}^{(1)}(t_0)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t_0)$ und $\mathbf{x}^{(3)}(t_0)$ zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ wurden die drei zugehörigen Lösungen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ und $\mathbf{x}_3(t)$ ermittelt:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} \\ e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

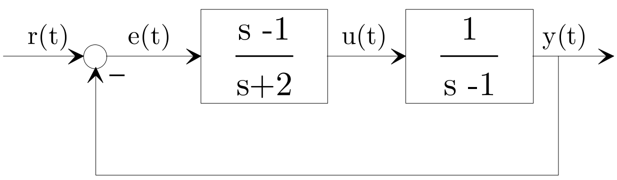
a) Bestimmen Sie die zu obigem System gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

b) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

c) Bestimmen sie die Eigenwerte und zugehörige Rechts-Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein System gemäß nachfolgender Abbildung.



a) Führen Sie einen zweidimensionalen Zustandsvektor ein und ermitteln Sie ein mathematische Modell der Form

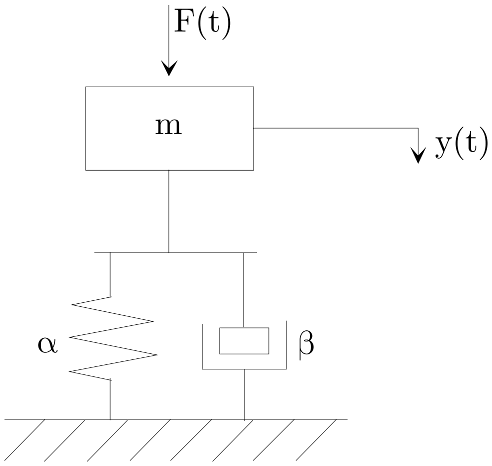
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}r \qquad\qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \, .$$

b) Ist das System steuerbar? (Begründen Sie Ihre Antwort).

c) Ist das System beobachtbar? (Begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 3

Betrachten Sie folgendes mechanisches System bestehend aus der reibungsfrei gelagerten Masse m , einer Feder mit der positiven Federkonstante α und einem Dämpfer mit dem positiven Dämpferkonstante β . Die Position y der Masse wird ausgehend von einem Gleichgewichtszustand gemessen. Auf die Masse wirken eine Federkraft proportional zur Position der Masse, eine geschwindigkeitsproportionale Dämpferkraft und eine äußere Kraft F . Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße F und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}F \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

b) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

c) Bestimmen Sie für $F(t) = F_0\sigma(t)$ den Grenzwert: $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$.

Aufgabe 4

Gegeben seien das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y sowie die zugehörige Übertragungsfunktion:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad G(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + (5-\alpha)s^2 + (6-5\alpha)s - 6\alpha}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter.

a) Zeichnen Sie das Strukturbild des Systems.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, für den das obige System asymptotisch stabil ist.

c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, für den das System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 18.03.2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	4	5	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, der Ausgangsgröße y und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Ermitteln Sie den Wertebereich für den Parameter α für den das System steuerbar ist.

Es gelte nun $\alpha = 0$.

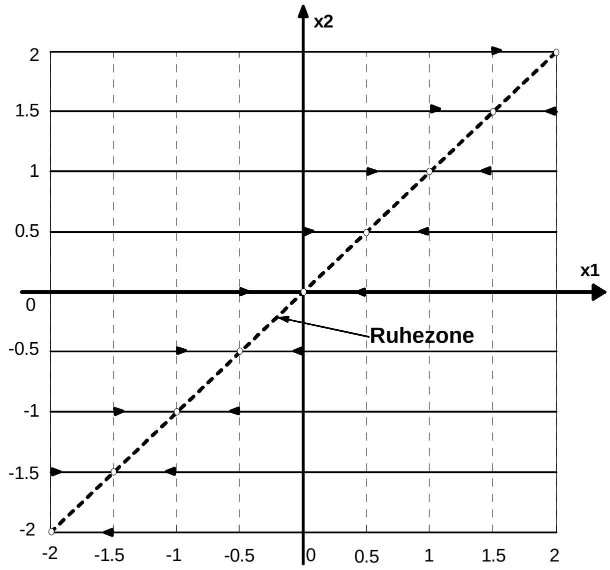
b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x_0}=\mathbf{0}}$.

c) Ist das System beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*

d) Berechnen Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand, wenn auf das System die Eingangsfunktion $u(t) = \sin(t)$ wirkt.

Aufgabe 2

Für ein freies System 2. Ordnung der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}$ ist das dazugehörige Trajektorienbild gegeben:



Außerdem ist die zugehörige Systemmatrix $\mathbf{A}$ (teilweise) bekannt: $A = \begin{bmatrix} . & 4 \\ . & . \end{bmatrix}$.

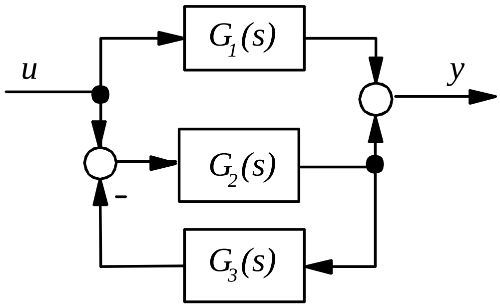
Aufgrund von Faschingsfeierlichkeiten sind leider einige Elemente verloren gegangen.

a) Bestimmen Sie die fehlenden Elemente der Systemmatrix $\mathbf{A}$.
(HINWEIS: Benützen Sie das angegebene Trajektorienbild!)

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte der Systemmatrix $\mathbf{A}$.
c) Bestimmen Sie zugehörige Rechts-Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$.
d) Ist das System asymptotisch stabil? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an)*

Aufgabe 3

Betrachten Sie folgendes System mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y*.



Die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme lauten:

$$G_1(s) = \frac{s}{s+2}, \qquad G_2 = \frac{2}{s^2+2s+3}, \qquad G_3(s) = s\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ durch

$$G(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

gegeben ist.

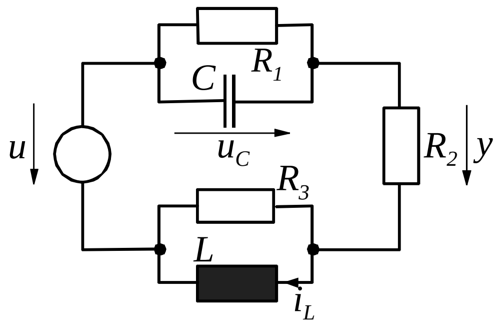
b) Besitzt das System die BIBO Eigenschaft? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*
c) Wählen Sie geeignete Zustandsvariablen und ermitteln Sie ein mathematisches Modell für das Gesamtsystem in der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\,.$$

d) Zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild des Systems.
e) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle, einer Induktivität L, einer Kapazität C und drei Ohmschen Widerständen R_1, R_2 und R_3. Hierbei gilt $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y wird die Spannung am Widerstand R_2 bezeichnet.



Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

Führen Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L & u_C \end{bmatrix}^T$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form: $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 05.07. 2011

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

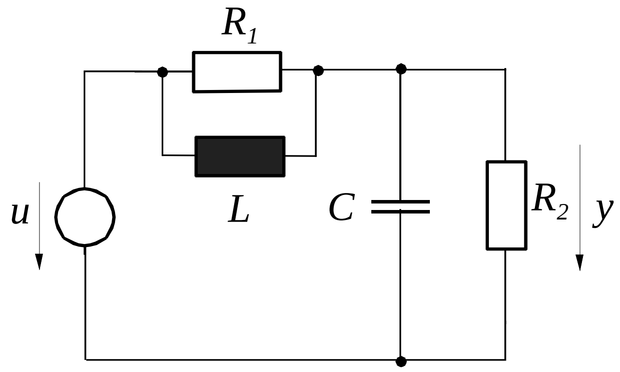
Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	4	4	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Induktivität *L*, einer Kapazität *C* und zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Hierbei gilt $R_1 = R_2$. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit *u* symbolisiert. Mit *y* bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y* auf.



a) Erstellen Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Wählen Sie als Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L & u_c \end{bmatrix}^T$, wobei u_C die Spannung am Kondensator *C* und i_L den Strom durch die Induktivität *L* symbolisiert.

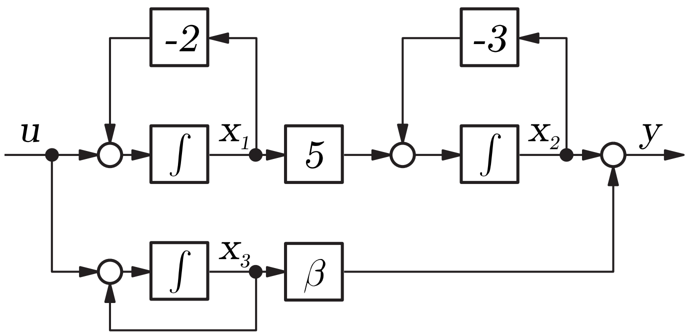
Bei einem Laborexperiment wird festgestellt, dass das Netzwerk **nicht steuerbar** ist.

b) Bestimmen Sie die mathematische Beziehung zwischen *R*, *L* und *C*, für welche das Netzwerk die Eigenschaft der Steuerbarkeit verliert.

c) Auf das System wird nun eine Spannung $u(t) = \sigma(t)$ aufgeschaltet. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} y(t)$ und $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ in Abhängigkeit von *R*, *L* und *C*.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes Strukturbild eines **nicht beobachtbaren** Systems mit der Eingangsgröße *u* und der Ausgangsgröße *y*.



Hierbei ist β eine reelle Konstante.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)=\left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{AW=0}$. Welchen Wert besitzt die konstante β?

b) Für die Eingangsgröße $u(t)=\frac{6}{5}+\sin(t)$ will man eine eingeschwungene Lösung $\bar{y}(t)=A+B\sin(t+\varphi)$ erhalten. Für welche Anfangszustände $\mathbf{x}(0)\neq\mathbf{0}$ ist dies möglich? Begründen Sie Ihre Antwort und berechnen Sie die reellen Parameter A, B und φ.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das mathematische Modell 2. Ordnung: $\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}$. Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(t=0)=:\mathbf{x}_0$ wurde die zugehörige Lösung $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}2-e^{-t}\\1+2e^{-t}\end{bmatrix}$ ermittelt.

a) Bestimmen Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
b) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende *t*-Werte) für die folgenden Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}_0^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}_0^{(3)}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}.$$

Der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t\to\infty$) muss dabei erkennbar sein!

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & \alpha-2 & 0\\\alpha & 0 & 2+\alpha\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}6\\2\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das obige System asymptotisch stabil ist.
b) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das System die BIBO-Eigenschaft aufweist.