Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 23.10. 2009

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

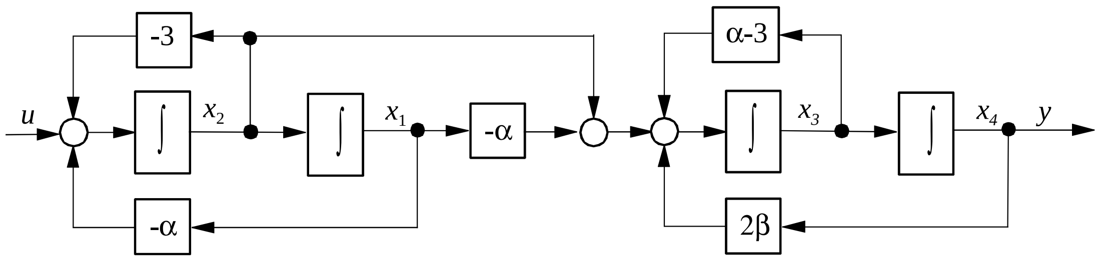
Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	6	4	4	5
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes Strukturbild eines Systems (Eingangsgröße u , Ausgangsgröße y):



Hierbei sind α und β reelle Parameter.

a) Ermitteln Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$.

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β, für den die Übertragungsfunktion $G(s)$ die BIBO-Eigenschaft besitzt. Stellen Sie den ermittelten Bereich in der $\alpha\beta$ -Ebene graphisch dar.

d) Berechnen Sie die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$ auf die Eingangsgröße

$$u(t) = 3 + 7\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

jeweils für die Parameterwerte

(i) $\alpha = 2$, $\beta = 3$

(ii) $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematisches Modell 2.Ordnung: $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$.

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ wurde die zugehörige Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3e^t - 4e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

ermittelt.

a) Bestimmen Sie die zu obigem Modell gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

b) Ermitteln Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das mathematische Modell

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 .$$

Folgende drei Eigenvektoren der Systemmatrix sind vorgegeben:

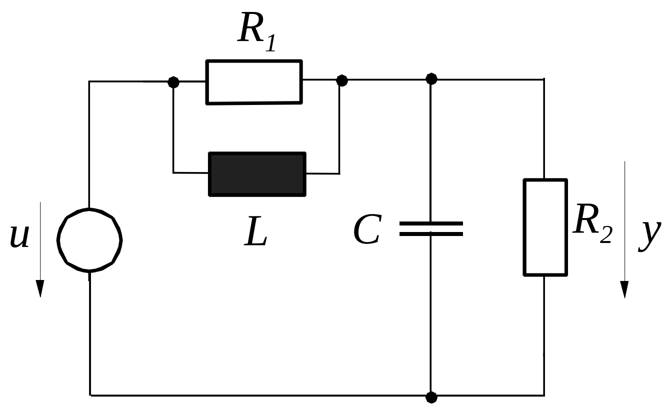
$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte s_1, s_2 und s_3.

b) Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ für den Anfangswert: $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -4 \end{bmatrix}^T$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Induktivität L, einer Kapazität C und zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2. Hierbei gilt $R_1 = R_2 = R$. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form: $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

b) Bestimmen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ und $\lim_{t\to\infty} y(t)$.
(Geben Sie eine mathematische Begründung an.)

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 21.01. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

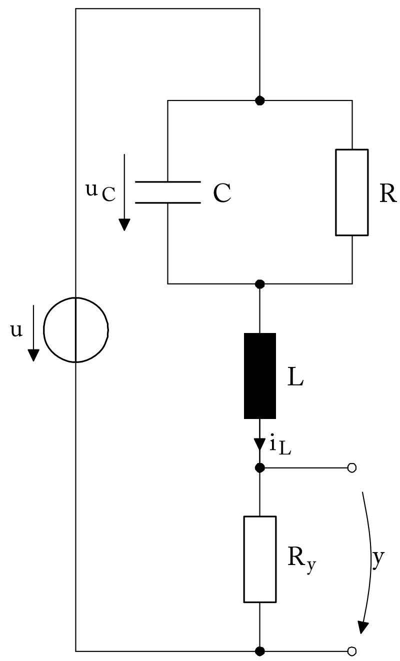
Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	
erreichbare Punkte	6	7	6	
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Induktivität *L*, einer Kapazität *C* und zwei Ohmschen Widerständen R und R_y. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_y. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Zeigen Sie, dass sich ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$ folgendermaßen bilden lässt:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_y}{L} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & R_y \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Der Zustandsvektor wurde mit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_c & i_L \end{bmatrix}^T$ angenommen, wobei u_C die Spannung am Kondensator *C* und i_L den Strom durch die Induktivität *L* symbolisiert.

Die Werte für den Widerstand *R* und die Induktivität *L* sind bekannt und betragen $R = 3\Omega$ bzw. $L = 1H$.

Im Labor wird nun eine Spannung von $u(t) = u_0 = 8V$ an das System gelegt und gewartet, bis ein **stationärer** Zustand erreicht wird. Danach wird die Spannungsversorgung zum Zeitpunkt $t = 0$ kurzgeschlossen ($u \equiv 0V$) und der folgende Verlauf der Ausgangsgröße beobachtet:

$$y_{Auslauf}(t) = -\frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{15}{2}e^{-4t}$$

b) Bestimmen Sie für die konstante Spannung $u(t) = u_0$ die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t)$ und $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Anfangswert des Auslaufversuches $y_{Auslauf}(t = 0)$, um den Wert des Widerstandes R_y zu bestimmen.

c) Bestimmen Sie den Wert der Kapazität *C*.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -3-\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2+\beta \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei sind α und β reelle Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des obigen Systems durch

$$G(s) = \frac{2(s-1)}{(s+3)(s+\alpha)} + \frac{\beta - 2}{s+3+\alpha}$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die größtmöglichen Wertebereiche der Parameter α und β, für die das obige System asymptotisch stabil ist. Stimmen diese mit jenen überein, für die das System die BIBO-Eigenschaft besitzt?

c) Bestimmen Sie die größtmöglichen Wertebereiche der Parameter α und β, für die das obige System steuerbar ist.

d) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ für $\alpha = -1$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes **nicht steuerbare** System 2. Ordnung mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Das System besitze zwei verschiedene Eigenwerte s_1 und s_2.

Weiters sei ein Links-Eigenvektor $\rho_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ mit dem zugehörigen Eigenwert $s_1 = -1$ bekannt.

a) Bestimmen Sie für den zweiten Eigenwert einen Links-Eigenvektor ρ_2 des obigen Systems.

b) Ist das System beobachtbar? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, wenn für den zum zweiten Links-Eigenvektor ρ_2 zugehörigen Eigenwert s_2 gilt:

Fall 1: $s_2 = -2$, Fall 2: $s_2 = 0$, Fall 3: $s_2 = 1$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein sowie der Richtungssinn für wachsende Werte der Zeit t angegeben werden.)

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 19.03. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

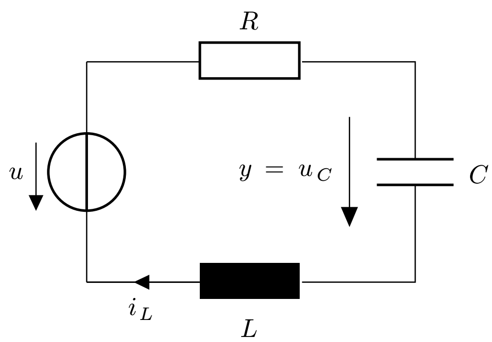
Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	8	5	6
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Induktivität L, einer Kapazität C und einem Ohmschen Widerstand R. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Kondensator C. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

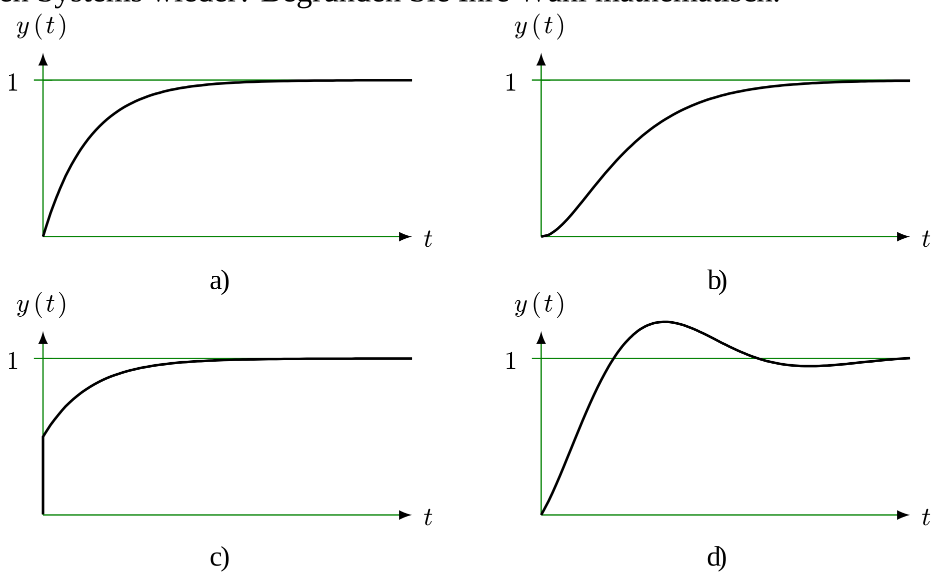


a) Erstellen Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Wählen Sie als Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_c & i_L \end{bmatrix}^T$, wobei u_C die Spannung am Kondensator C und i_L den Strom durch die Induktivität L symbolisiert.

b) Die Systemmatrix des Modells soll einen doppelten Eigenwert bei $s_{1,2} = -1$ haben. Wie kann dies durch Wahl der Bauelemente erfolgen?

c) Es wird nun $u(t) = \sin(t)$ für $t \geq 0$ gewählt. Wie sollen, unter Berücksichtigung von b), die Werte der Bauelemente R, L und C gewählt werden, damit im eingeschwungenen Zustand die Ausgangsgröße $y(t) = \frac{1}{2}\sin(t+\varphi)$, $t >> 0$ lautet? Ermitteln Sie die zugehörige Phasenverschiebung φ.

d) Welche der im Folgenden abgebildeten Sprungantworten gibt qualitativ die Verhältnisse des obigen Systems wieder? Begründen Sie Ihre Wahl mathematisch.



Aufgabe 2:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des obigen Systems durch

$$G(s) = \frac{s + 4 - 3\alpha}{(s+1)(s+3)} + \frac{1}{s-2}$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α, für den das obige System beobachtbar ist.
(Hinweis: Auch für die Beantwortung dieser Frage sind KEINE Berechnungen mit 3x3-Matrizen erforderlich!)

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Rechts-Eigenvektoren.

b) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\boldsymbol{\Phi}(t)$.

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende *t*-Werte) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende drei Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 02.07. 2010

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Prüfungsmodus: O VO+UE (TM) O VO (BM)

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	5	5	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1

Von einem linearen und zeitinvarianten (LZI) System $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ ergeben sich für folgende drei Anfangszustände und Eingangsfunktionen

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{(1)}(t) = \sigma(t); \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, u^{(2)}(t) = \sigma(t); \quad \mathbf{x}^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u^{(3)}(t) = 0 .$$

jeweils die Systemantworten:

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

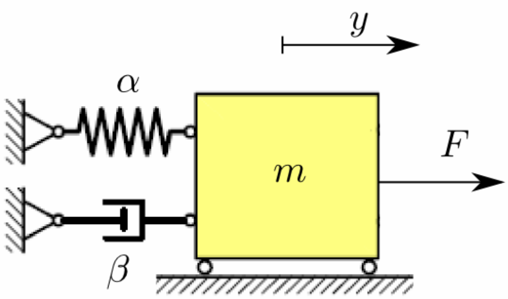
a) Bestimmen Sie die Antwort $\mathbf{x}^{(4)}(t)$ des Systems auf den Anfangszustand $\mathbf{x}^{(4)}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u^{(4)}(t) = \sigma(t-1) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$.

b) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und den Eingangsvektor $\mathbf{b}$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes mechanisches System bestehend aus der reibungsfrei gelagerten Masse m, einer Feder mit der positiven Federkonstante α und einem Dämpfer mit der positiven Dämpferkonstante β. Die Position y der Masse wird ausgehend vom entspannten Zustand der Feder gemessen. Auf die Masse wirken eine Federkraft proportional zur Position der Masse, eine geschwindigkeitsproportionale Dämpferkraft und eine äußere Kraft F. Fassen Sie den mechanischen Aufbau als ein System mit der Eingangsgröße F und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form: $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}F \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

b) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild des Systems.

c) Bestimmen Sie für $F(t) = F_0\sigma(t)$ die Grenzwerte: $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t), \qquad \lim_{t\to\infty} y(t).$

Aufgabe 3

Gegeben sei folgendes System 3. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Die Eigenwerte s_1, s_2 und s_3 bzw. zugehörige Rechts-Eigenvektoren $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ und $\mathbf{p}_3$ der Systemmatrix $\mathbf{A}$ lauten:

$$s_1 = -1, \qquad s_2 = -2 \qquad \text{und} \qquad s_3 = 1$$

bzw.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des obigen Systems.
(*Hinweis: Die Ermittlung der Systemmatrix* **A** *ist hierzu nicht nötig!*)

b) Besitzt das System die BIBO-Eigenschaft?
(*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

c) Ist das mathematische Modell *steuerbar*?
(*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

d) Ist das mathematische Modell *beobachtbar*?
(*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

Aufgabe 4

Gegeben seien zwei äquivalente Systeme 2. Ordnung *S1* und *S2*:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \qquad S1$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z} \qquad S2$$

a) Bestimmen Sie eine konstante und reguläre Transformationsmatrix **T**, die das System *S1* in das System S*2* überführt, d.h.

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}\,.$$

b) Ist das System S*2* asymptotisch stabil?
(Begründen Sie Ihre Antwort!)