Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (TM)
am 20.10.2008

NACHNAME:

Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus Matlab-Übung: O Ja O Nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	6	7
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Übertragungsfunktion des obigen Systems

$$G(s) = \frac{4(s-1)+2\alpha}{s^2+(\alpha+1)s+\alpha}$$

lautet. (*Hinweis: Das System kann als Parallelschaltung zweier Teilsysteme aufgefasst werden!*)

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α so, dass obiges mathematische Modell asymptotisch stabil ist.

c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes **asymptotisch stabile** mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

(α und β seien hierbei reelle Parameter.)

Auf das System wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei geeignet gewähltem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ die Eingangsfunktion $u(t) = 15e^{\xi t}$ (mit dem reellen Parameter ξ) aufgeschaltet und folgende Ausgangsgröße beobachtet (für $t \geq 0$):

$$y(t) = 10e^{2t} + 5e^{-3t}$$

a) Bestimmen Sie den Wert von ξ.

b) Ermitteln Sie die Werte von α und β.

c) Berechnen Sie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines homogenen Systems 2.Ordnung mit verschiedenen Eigenwerten, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a_1 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(a_1 und c_2 seien hierbei reelle Parameter.)
Im Labor stellte man erstaunt fest, dass bei zwei verschiedenen Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}^T$ die gleiche Ausgangsfunktion $y(t) = e^{-3t}$ gemessen wurde (für $t \geq 0$).

a) Bestimmen Sie einen nichttrivialen (also vom Nullvektor verschiedenen) Anfangszustand, mit dem für $t \geq 0$ gilt: $y(t) \equiv 0$. (*Hinweis: Das System ist linear!*)
b) Ermitteln Sie den Wert von c_2.
c) Bestimmen Sie den Wert von a_1.
d) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.
e) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein.)

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (TM)
am 29. 01. 2009

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	7	7	5
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein mathematisches Modell 2. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0)\,.$$

Ausgehend von zwei speziellen Anfangszuständen wurden die zugehörigen Lösungen

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ermittelt.

a) Ist das System asymptotisch stabil? (Geben Sie eine mathematische Begründung an!)

b) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

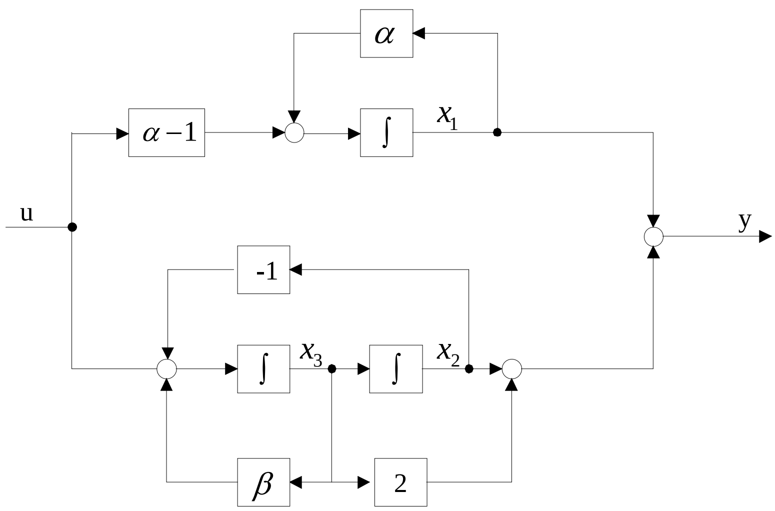
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinns für wachsende t-Werte) in der x_1x_2-Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Hierbei sind α und β reelle Parameter.



a) Erstellen Sie dazu ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Verwenden Sie dafür die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

c) Es sei $\alpha = 1$ und $\beta = -2$. Wählen Sie einen geeigneten Anfangszustand $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ so, dass für die Eingangsgröße

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$$

für den Grenzwert der Ausgangsgröße $y(t)$ gilt: $y(t)\big|_{t\to\infty} = 0$. (Geben Sie eine mathematische Begründung an.)

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion eines Systems mit der Eingangsgröße und der Ausgangsgröße y:

$$G(s) = \frac{2(s+4\alpha)}{s^2 + s - 3\alpha}$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Auf das System wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei geeignet gewähltem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ die Eingangsfunktion $u(t) = 5e^{-16t}$ aufgeschaltet und folgende Ausgangsgröße beobachtet (für $t \geq 0$):

$$y(t) = 4e^{-4t} + 2e^{\beta t}$$

Hier bei ist β ein reeller Parameter mit $\beta \neq -16$.

b) Bestimmen Sie die Parameter α und β.

Es werden nun $\alpha = 4$ und $\beta = 3$ gewählt. Auf das System werden jeweils (bei geeignet gewählten Anfangszuständen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$) zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ folgende Eingangsfunktionen aufgeschaltet und Ausgangsgrößen beobachtet (für $t \geq 0$):

i)	$u(t) = e^{-4t}$	liefert	$y(t) = 2e^{-4t} + e^{3t}$
ii)	$u(t) = e^{-2t}$	liefert	$y(t) = 2e^{3t} - 2{,}8e^{-2t}$
iii)	$u(t) = e^{t}$	liefert	$y(t) = e^{t}$
iv)	$u(t) = e^{-t}$	liefert	$y(t) = e^{-4t} + e^{3t}$
v)	$u(t) = -2e^{-16t}$	liefert	$y(t) = e^{-4t} + e^{3t}$

c) Zeigen Sie, dass von den angeführten Kombinationen von Ein- und Ausgangsgrößen nur zwei möglich sind.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (TM) am 20. 03. 2009

Name / Vorname(n):

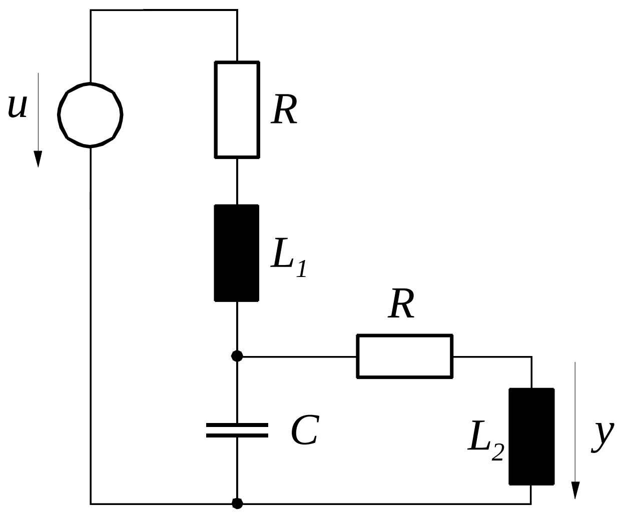
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	6	4	5	4	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrisches Netzwerk bestehend aus idealen Bauteilen: den Ohmschen Widerständen (R), einer Kapazität (C) und zwei Induktivitäten (L_1, L_2). Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.

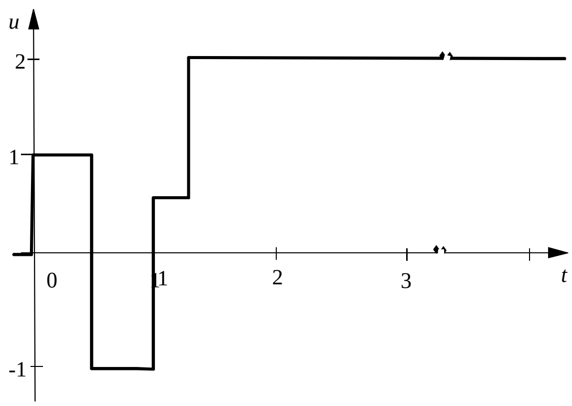


a) Für die Induktivitäten gilt: $L = L_1 = L_2$. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

b) Berechnen Sie für $u(t) = \sigma(t)$ die Grenzwerte: $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$, $\quad \lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

c) Ermitteln sie die **eingeschwungenen Lösungen** von $\mathbf{x}(t)$ und $y(t)$ für folgende Eingangsgröße $u(t)$:

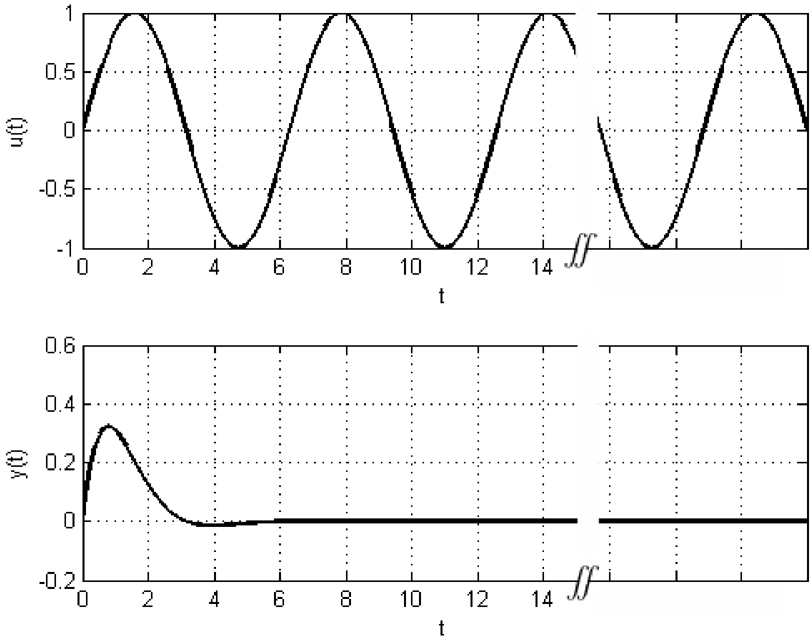


Aufgabe 2:

Auf ein lineares und zeitinvariantes System, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befindet (Anfangszustand $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{0}$) wird die Eingangsgröße

$$u(t) = \sin(t)$$

aufgeschaltet. Der Verlauf der Ausgangsgröße y auf obige Eingangsgröße ist in nachfolgender Abbildung dargestellt.



a) Durch welche der folgenden Übertragungsfunktionen wird das System beschrieben?

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{(s+3)^3} \qquad G_2(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G_3(s) = \frac{16}{5s+2} \qquad G_4(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+2}$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Berechnen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2+\beta \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei sind α und β reelle Parameter.

a) Zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild des Systems.

b) Bestimmen Sie die größtmöglichen Wertebereiche für die Parameter α und β, damit das obige System asymptotisch stabil ist.

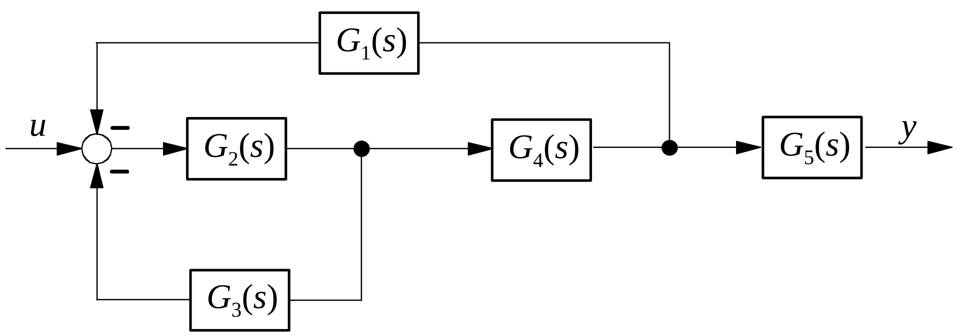
c) Es sei $\alpha = 3$ und $\beta = 2$. Wählen Sie einen geeigneten nichttrivialen Anfangszustand $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ so, dass für die Eingangsgröße

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t \end{cases}$$

für den Grenzwert der Ausgangsgröße $y(t)$ gilt: $y(t)\big|_{t\to\infty} = 0$. (Geben Sie eine mathematische Begründung an.)

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ als Funktion der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ und $G_5(s)$.

b) Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_1(s) = 2 \quad G_2(s) = \frac{s+2}{s} \quad G_3(s) = \frac{Ks}{s+2} \quad G_4(s) = \frac{1}{s + \frac{K-1}{K+1}} \quad G_5(s) = \frac{K}{s+2}$$

Hierbei ist K ein reeller, positiver Parameter.
Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch

$$G(s) = \frac{\frac{K}{1+K}}{s^2 + s + \frac{4}{1+K}}$$

gegeben ist.

c) Auf das System wird nun die Eingangsgröße $u(t) = \sin(2t)$ aufgeschalten.
Welche der beiden Funktionen

$$y_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{8}\sin(2t - \frac{3\pi}{4})$$

$$y_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{8}\sin(2t + \pi)$$

ist die zugehörige eingeschwungene Ausgangsfunktion. Ermitteln Sie den Parameter K.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (TM) am 30. 06. 2009

Name / Vorname(n):

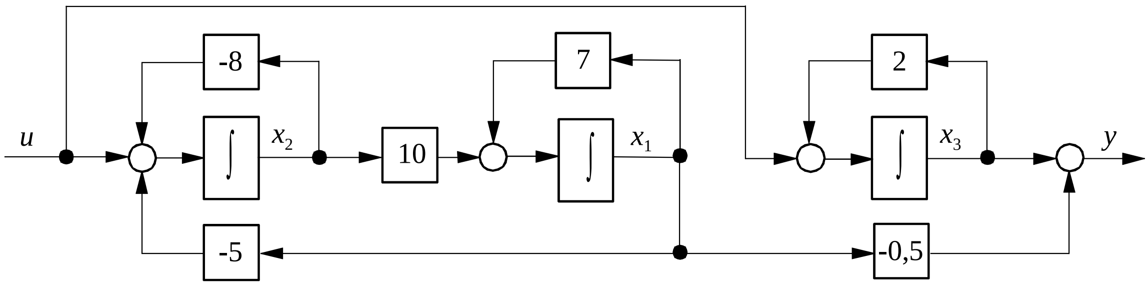
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	6	5	4	4	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes Strukturbild eines Systems (Eingangsgröße u, Ausgangsgröße y):



a) Ermitteln Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

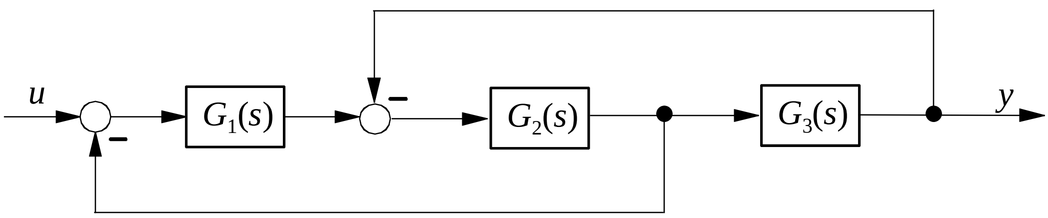
b) Ist das System asymptotisch stabil? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

d) Besitzt das System die BIBO Eigenschaft? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_1(s) = \frac{1}{\alpha s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{1+\beta s} \qquad G_3(s) = \frac{1-4s}{1+3s}$$

Hierbei sind α und β reelle, positive Parameter.

a) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ gilt:

$$G(s) = \frac{1-4s}{3\alpha\beta s^3 + \alpha(\beta-1)s^2 + (2\alpha+3)s + 1}$$

b) Es sei nun $\alpha = 1$. Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter β, damit die Übertragungsfunktion $G(s)$ die BIBO Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{P}$ so, dass das vorliegende System durch eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ in Diagonalform überführt wird.

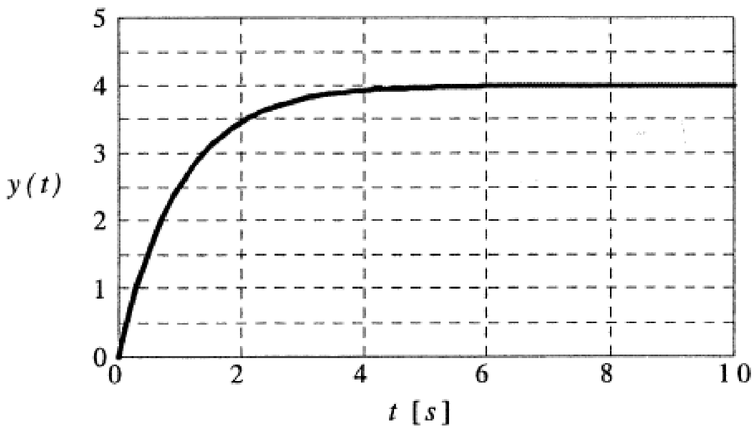
b) Ermitteln Sie die Parameter $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ so, dass das gegebene System weder steuerbar noch beobachtbar ist.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{\alpha}{s+\beta}$.

Um die unbekannten Parameter α und β zu bestimmen wurden bei verschwindendem Anfangswert 2 Messungen durchgeführt:

(i) Eine sprungförmige Eingangsgröße $u(t) = \sigma(t)$ liefert den in nachfolgender Abbildung dargestellten Verlauf der Ausgangsgröße.



(ii) Die Eingangsgröße $u(t) = \sin(t)$ liefert die Ausgangsgröße $y(t) = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \sin(t+\varphi)$.

Bestimmen Sie die Parameter α und β.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (BM)
am 20.10.2008

NACHNAME:

Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus Matlab-Übung: O Ja O Nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	5	6
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Übertragungsfunktion des obigen Systems

$$G(s) = \frac{4(s-1)+2\alpha}{s^2+(\alpha+1)s+\alpha}$$

lautet. (*Hinweis: Das System kann als Parallelschaltung zweier Teilsysteme aufgefasst werden!*)

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α so, dass obiges mathematische Modell asymptotisch stabil ist.

c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes **asymptotisch stabile** mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 8 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

(α sei hierbei ein reeller Parameter.)

Auf das System wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei geeignet gewähltem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ die Eingangsfunktion $u(t) = 15e^{\xi t}$ (mit dem reellen Parameter ξ) aufgeschaltet und folgende Ausgangsgröße beobachtet (für $t \geq 0$):

$$y(t) = 10e^{2t} + 5e^{-3t}$$

a) Bestimmen Sie den Wert von ξ.

b) Ermitteln Sie den Wert von α.

c) Berechnen Sie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines homogenen Systems 2.Ordnung mit verschiedenen Eigenwerten, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

(c_2 sei hierbei ein reeller Parameter.)

a) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\Phi(t)$.

b) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein.)

Im Labor stellte man erstaunt fest, dass bei zwei verschiedenen Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}^T$ die gleiche Ausgangsfunktion $y(t) = e^{-3t}$ gemessen wurde (für $t \geq 0$).

c) Bestimmen Sie einen nichttrivialen (also vom Nullvektor verschiedenen) Anfangszustand, mit dem für $t \geq 0$ gilt: $y(t) \equiv 0$. (*Hinweis: Das System ist linear!*)

d) Ermitteln Sie den Wert von c_2.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (BM)
am 29. 01. 2009

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	7	4	6
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein mathematisches Modell 2. Ordnung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0)\,.$$

Ausgehend von zwei speziellen Anfangszuständen wurden die zugehörigen Lösungen

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 8e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ermittelt.

a) Ist das System asymptotisch stabil? (Geben Sie eine mathematische Begründung an!)

b) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

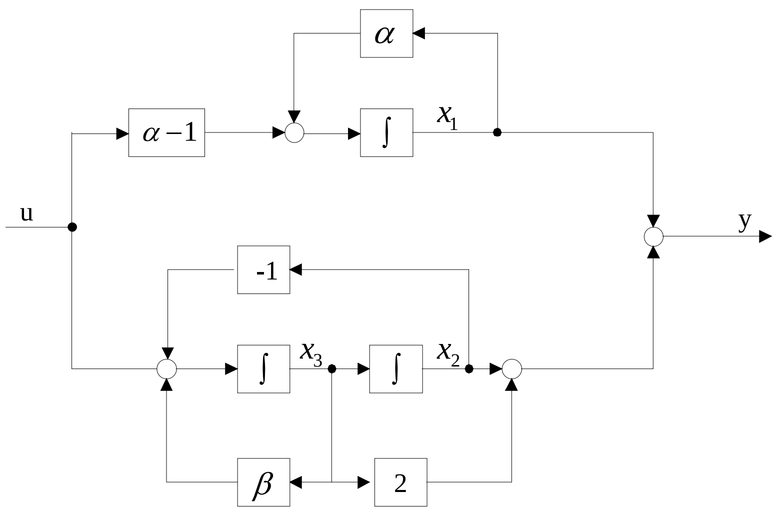
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinns für wachsende t-Werte) in der x_1x_2-Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y. Hierbei sind α und β reelle Parameter.



Aus diesem Strukturbild können folgende Gleichungen abgelesen werden:

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3$$
$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + (\alpha - 1)u$$
$$\frac{dx_3}{dt} = \beta x_3 + u - x_2$$
$$y = x_2 + 2x_3 + x_1.$$

a) Stellen Sie dazu ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

auf.
Verwenden Sie dafür die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$.

b) Für welchen Wert α ist das System nicht steuerbar?

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei ist α ein reeller Parameter.

a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

b) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters α so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Auf das Übertragungssystem wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei geeignet gewähltem Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ die Eingangsfunktion $u(t) = 5e^{-16t}$ aufgeschaltet und folgende Ausgangsgröße beobachtet (für $t \geq 0$):

$$y(t) = 4e^{-4t} + 2e^{\beta t}$$

Die Größe β ist hierbei ein reeller Parameter und es gilt $\beta \neq -16$.

c) Bestimmen Sie die Parameter α und β.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (BM) am 20. 03. 2009

Name / Vorname(n):

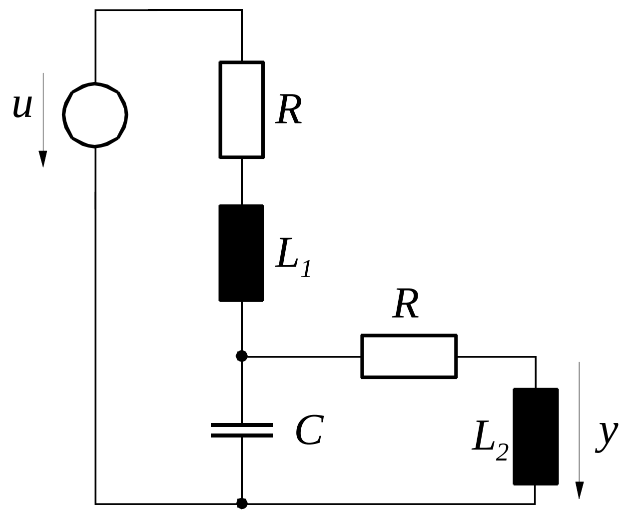
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	4	4	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrisches Netzwerk bestehend aus idealen Bauteilen: den Ohmschen Widerständen (R), einer Kapazität (C) und zwei Induktivitäten (L_1, L_2). Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Für die Induktivitäten gilt: $L = L_1 = L_2$. Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

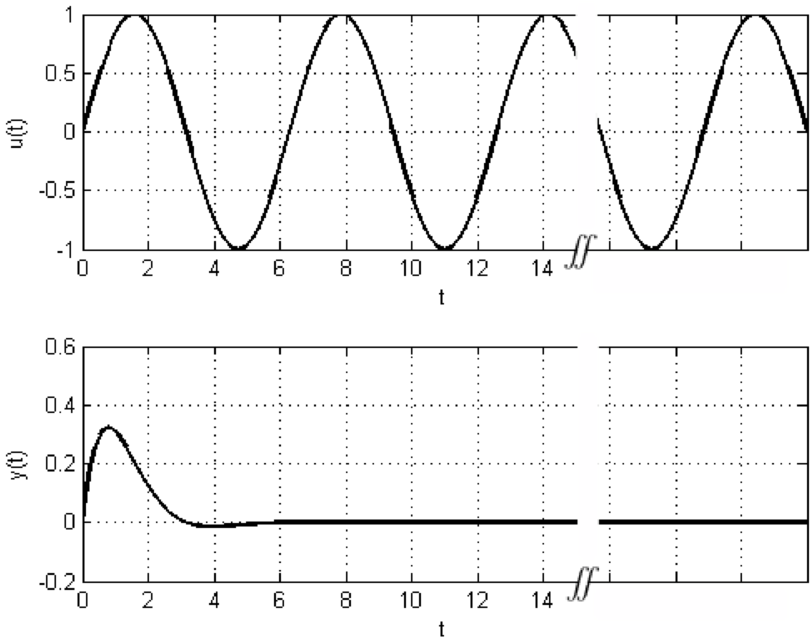
b) Berechnen Sie für $u(t) = \sigma(t)$ die Grenzwerte: $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$, $\quad \lim_{t\to\infty} y(t)$.

Aufgabe 2:

Auf ein lineares und zeitinvariantes System, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befindet (Anfangszustand $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{0}$) wird die Eingangsgröße

$$u(t) = \sin(t)$$

aufgeschaltet. Der Verlauf der Ausgangsgröße y auf obige Eingangsgröße ist in nachfolgender Abbildung dargestellt.



a) Durch welche der folgenden Übertragungsfunktionen wird das System beschrieben?

$$G_1(s) = \frac{2s+1}{(s+3)^3} \qquad G_2(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$G_3(s) = \frac{16}{5s+2} \qquad G_4(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+2}$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Berechnen Sie den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2+\beta \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei sind α und β reelle Parameter.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des obigen Systems durch

$$G(s) = \frac{2(s-2)}{(s+1)(s+\alpha)} + \frac{\beta-2}{s-4+\alpha}$$

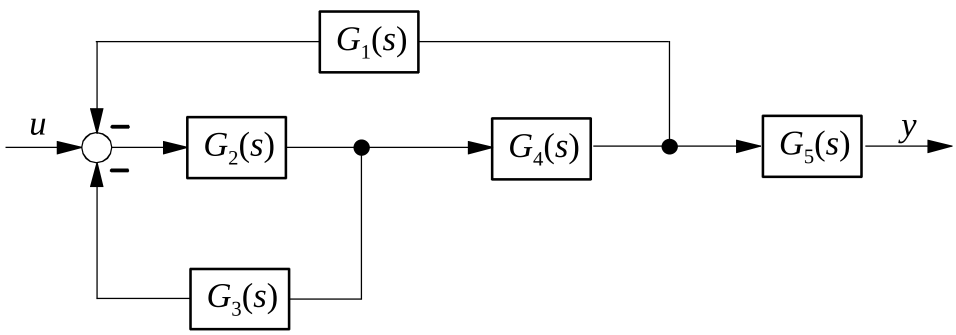
gegeben ist.

b) Bestimmen Sie die größtmöglichen Wertebereiche für die Parameter α und β, damit das obige System asymptotisch stabil ist.

c) Bestimmen Sie die größtmöglichen Wertebereiche für die Parameter α und β, damit das obige System steuerbar ist.

Aufgabe 4:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



a) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ als Funktion der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ und $G_5(s)$.

b) Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_1(s) = 2 \quad G_2(s) = \frac{s+2}{s} \quad G_3(s) = \frac{Ks}{s+2} \quad G_4(s) = \frac{1}{s + \frac{K-1}{K+1}} \quad G_5(s) = \frac{K}{s+2}$$

Hierbei ist K ein reeller, positiver Parameter.
Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch

$$G(s) = \frac{\frac{K}{1+K}}{s^2 + s + \frac{4}{1+K}}$$

gegeben ist.

c) Auf das System wird nun die Eingangsgröße $u(t) = \sin(2t)$ aufgeschalten.
Welche der beiden Funktionen

$$y_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{8}\sin(2t - \frac{3\pi}{4})$$

$$y_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{8}\sin(2t + \pi)$$

ist die zugehörige eingeschwungene Ausgangsfunktion. Ermitteln Sie den Parameter K.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (BM)
am 30. 06. 2009

Name / Vorname(n):

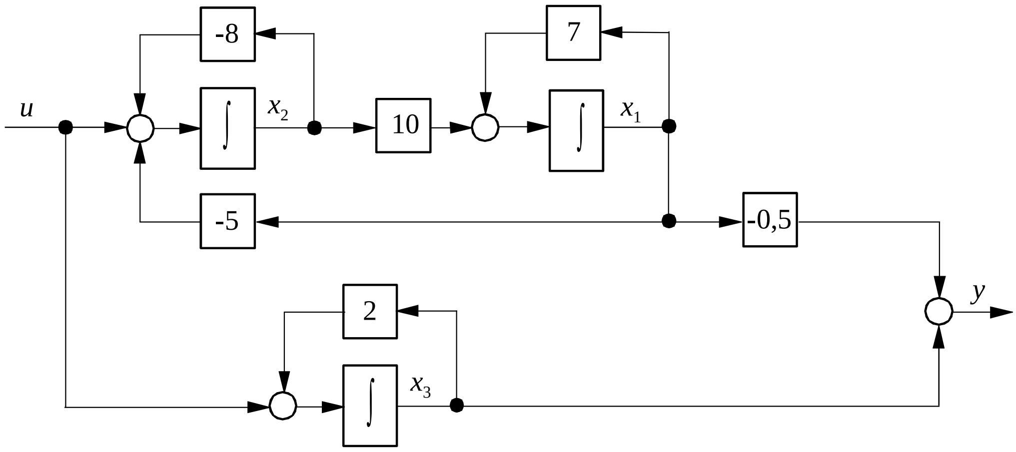
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	6	5	3	3	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes Strukturbild eines Systems (Eingangsgröße u, Ausgangsgröße y):



a) Ermitteln Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

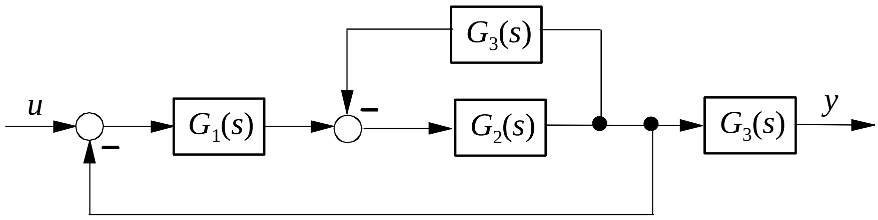
b) Ist das System asymptotisch stabil? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ des Systems.

d) Besitzt das System die BIBO Eigenschaft? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$G_1(s) = \frac{1}{\alpha s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{1+\beta s} \qquad G_3(s) = \frac{1-4s}{1+3s}$$

Hierbei sind α und β reelle, positive Parameter.

a) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion $G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}}$ gilt:

$$G(s) = \frac{1-4s}{3\alpha\beta s^3 + \alpha(\beta-1)s^2 + (2\alpha+3)s + 1}$$

b) Es ein nun $\alpha = 1$. Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter β, damit die Übertragungsfunktion $G(s)$ die BIBO Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 5 & \beta \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

a) Ermitteln Sie den Wertebereich für die Parameter α und β, für den das obige Modell steuerbar ist.

b) Ermitteln Sie den Wertebereich für die Parameter α und β, für den das obige Modell beobachtbar ist.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie ein System mit der Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0 = 0} = \frac{s^2 + s}{s^2 + 3s + 1}$$

Berechnen Sie die eingeschwungene Antwort (für $t \gg 0$) $y(t)$ des Systems für die Eingangsgröße:

$$u(t) = \sqrt{2}\,\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 8$$