Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 25. 10. 2007

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

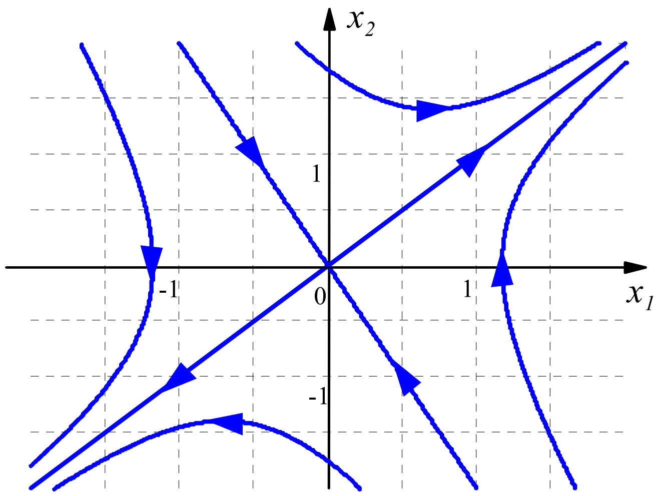
Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	5	4	4
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Von einem linearen und zeitinvarianten (LZI) System ${}^{d}\!/_{dt}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sei folgendes Trajektorienbild bekannt (die Pfeilrichtung entspricht dem Verlauf der Trajektorien für anwachsende Zeiten t):



a) Ermitteln Sie, welche der 3 folgenden Eigenwertpaare zu obigem System passt *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*

$$I)\ s_1 = -1, s_2 = -4, \qquad II)\ s_1 = 1, s_2 = -2, \qquad III)\ s_1 = -1 + j, s_2 = -1 - j$$

b) Bestimmen Sie für die in Punkt a) gewählten Eigenwerte s_1, s_2 die zugehörigen rechts-Eigenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$.

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ und die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ zu obigem System.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

b) Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften des obigen Systems in Abhängigkeit des reellen Parameters α.

c) Beurteilen Sie Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems. Ergibt sich hier eine Abhängigkeit vom Parameter α?

Aufgabe 3:

Von einem System kennt man nur die Struktur seiner Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{b(a-s)}{a+s}$.

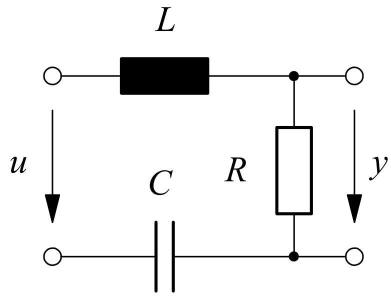
Um die unbekannten (reellen) Parameter a und b zu ermitteln wurde folgende Messung durchgeführt:

Die Eingangsgröße $u(t) = \sin(2t)$ liefert für hinreichend große Zeiten t folgende Ausgangsgröße: $y(t) = 3\sin(2t - \frac{\pi}{2})$.

Ermitteln Sie die reellen Parameter a und b.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus einem idealen Ohmschen Widerstand R, einer idealen Kapazität C und einer idealen Induktivität L. Die Eingangsspannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an dem Widerstand R. Fassen Sie das Netzwerk als System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Wählen Sie geeignete Zustandsvariablen und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form: $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

b) Berechnen Sie für $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} y(t), \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t). \qquad \textit{Anmerkung}: \sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 1.2.2008

Name / Vorname(n):

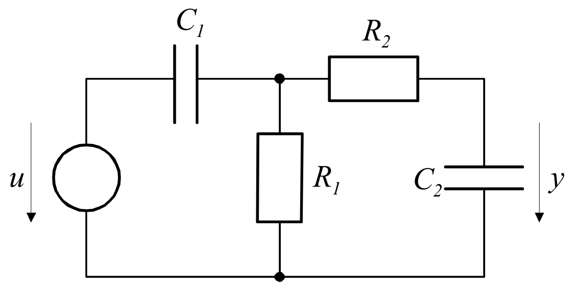
Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte: O ja O nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	6	7
erreichte Punkte			

Aufgabe1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus zwei Ohmschen Widerständen R_1 und R_2 und zwei Kapazitäten C_1 und C_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Kapazität C_2 (siehe Skizze). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie für den Fall $R_1=R_2=R$ und $C_1=C_2=C$ ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

Wählen Sie nun für die Bauteile folgende Werte:

$$R = 100k\Omega$$
$$C = 10\mu F$$

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ zu obigem System.

c) Bestimmen Sie die Ausgangsgröße $y(t)$ für hinreichend große Werte von t (t ? 0), wenn als Eingangsgröße

$$u(t) = 5 + \sin(t + \frac{\pi}{4})$$

gewählt wird.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das mathematische Modell 2. Ordnung:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $x(t=0)=x_0$ wurde die zugehörige Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2+3e^{-4t} \\ 2+e^{-4t} \end{bmatrix}$$

ermittelt.

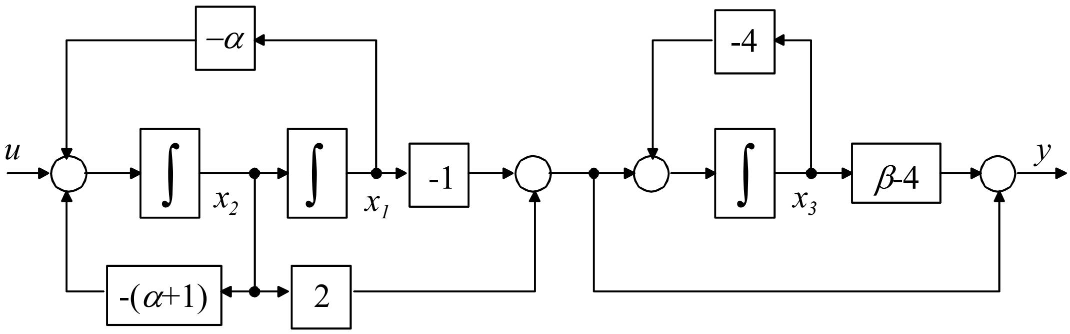
a) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$ und die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
b) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an!)*
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende t-Werte) für die folgenden Anfangszustände

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) muss dabei erkennbar sein!

Aufgabe 3:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y (siehe Skizze). Hierbei sind α und β reelle Parameter



a) Stellen Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$ auf.

Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

(HINWEIS: Betrachten Sie das System als eine Zusammenschaltung von zwei geeignet gewählten Teilsystemen!)

c) Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften (asymptotische Stabilität und BIBO-Eigenschaft) des obigen Systems in Abhängigkeit der reellen Parameter α und β.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 7. 3. 2008

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung o Ja o Nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	6	8
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei das mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.

$$d\mathbf{x}/dt = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} .$$

Ermitteln Sie für hinreichend grosse Werte von t (t ? t_0) die eingeschwungene Systemantwort $y(t)$ für die Eingangsgrösse

$$u(t) = 3 + 4\sin(2t)$$

und dem Anfangszustand

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}^T .$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} .$$

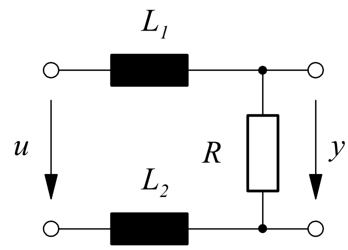
Die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ besitzt die Eigenwerte $s_1 = 2$ und $s_2 = -1$. Ferner sind folgende zum Eigenwert $s_1 = 2$ zugehörige Eigenvektoren bekannt:

Rechtseigenvektor $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, Linkseigenvektor $\boldsymbol{\rho}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$. *(Hinweis: Die Ermittlung der Dynamikmatrix* $\mathbf{A}$ *ist hierzu nicht notwendig!)*
b) Untersuchen Sie obiges System auf Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit.
c) Bestimmen Sie die zugehörige Gewichtsfunktion $g(t)$ und beurteilen Sie die Stabilitätseigenschaften (asymptotische Stabilität und BIBO Stabilität) des Systems.

Aufgabe 3:

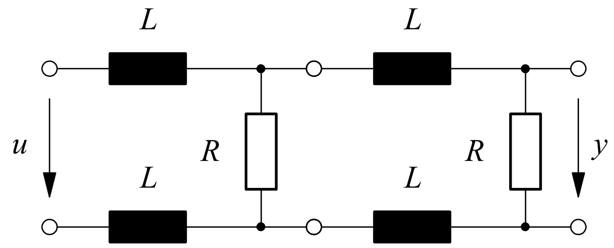
Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus einem idealen Ohmschen Widerstand R und zwei idealen Induktivitäten L_1 und L_2. Die Eingangsspannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an dem Widerstand R. Fassen Sie das Netzwerk als System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Wählen Sie eine geeignete Zustandsvariable und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form: $dx/dt = ax + bu, \quad y = cx + du$.

b) Für eine spezielle Wahl der identen Induktivitäten ($L_1 = L_2 = 1\,[H]$) soll das obige System die Übertragungsfunktion $G_1(s) = \dfrac{5}{s+5}$ aufweisen. Bestimmen Sie den Widerstand R .

Betrachten Sie nun die Hintereinanderschaltung zweier Systeme obiger Form mit $L_1 = L_2 = L$.



c) Bestimmen Sie ein mathematisches Modell der Form $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$ und berechnen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G_2(s)$.

d) Zeigen Sie, dass $G_2(s)$ nicht durch $G_1(s)G_1(s)$ gebildet wird *(geben Sie dazu eine mathematische Begründung an)*. Wie lautet die physikalische Begründung für diesen Umstand?

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (TM) am 30.06.2008

NACHNAME:

Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus Matlab-Übung: O Ja O Nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	6	7
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -3\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Hierbei seien α und β reelle Parameter mit $\beta\neq-1$.

a) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
b) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Gewichtsfunktion $g(t)$.
c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β so, dass obiges mathematische Modell asymptotisch stabil ist.
d) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes **nicht beobachtbare** mathematische Modell eines Systems 2. Ordnung mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Weiters ist ein Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_1^T=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$ mit dem zugehörigen Eigenwert $s_1=-1$ bekannt.

a) Bestimmen Sie den zweiten Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_2$ des obigen mathematischen Modells.
b) Ist das mathematische Modell steuerbar? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_0^T=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}$, wenn für den zum zweiten Rechts-Eigenvektor $\mathbf{p}_2$ zugehörigen Eigenwert s_2 gilt:

$$s_2^{(1)}=-4,\qquad s_2^{(2)}=0,\qquad s_2^{(3)}=1$$

(Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t\to\infty$) erkennbar sein.)

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u$$

(a_1, a_2 und c_2 seien hierbei reelle Parameter.)

Auf das System werden jeweils (bei geeignet gewählten Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$) zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ folgende Eingangsfunktionen aufgeschaltet und Ausgangsgrößen beobachtet (für $t \geq 0$):

i. $u(t) = 2e^{1t}$ liefert $y(t) = 20e^{-1t}$

ii. $u(t) = 2e^{2t}$ liefert $y(t) = 20e^{-2t}$

iii. $u(t) = 2e^{\xi t}$ liefert $y(t) = 20e^{-3t}$ (ξ sei ein reeller Parameter)

a) Bestimmen Sie die Werte von a_1, a_2 und ξ.

b) Ermitteln Sie den Wert von c_2.

c) Berechnen Sie für den dritten Fall (iii.) den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** (BM) am 30.06.2008

NACHNAME:

Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus Matlab-Übung: O Ja O Nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	5	6
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei seien α und β reelle Parameter mit $\beta \neq -1$.

a) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
b) Berechnen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Gewichtsfunktion $g(t)$.
c) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β so, dass obiges mathematische Modell asymptotisch stabil ist.
d) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für die Parameter α und β so, dass obiges System die BIBO-Eigenschaft aufweist.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell 2. Ordnung: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ wurde die zugehörige Lösung $\mathbf{x}(t)$ ermittelt:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.
b) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(hierbei muß der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein)

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u$$

a) Ist das mathematische Modell steuerbar? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

b) Ist das mathematische Modell beobachtbar? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

Auf das System wird (bei geeignet gewähltem Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$) zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Eingangsfunktionen $u(t) = Ue^{\xi t}$ aufgeschaltet (hierbei sind U und ξ reelle Parameter) und für $t \geq 0$ als Ausgangsfunktion $y(t) = 20e^{-3t}$ beobachtet.

c) Ermitteln Sie die Werte von ξ und U sowie den Anfangszustand $\mathbf{x}_0$.