Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 25. 10. 2006

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3
erreichbare Punkte	8	5	7
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Von einem linearen und zeitinvarianten (LZI) System ${}^{d}\!/\!{}_{dt}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ lauten für folgende drei Anfangszustände und Eingangsfunktionen

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{(1)}(t) = \sigma(t), \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, u^{(2)}(t) = 2\sigma(t), \quad \mathbf{x}^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{(3)}(t) = 0$$

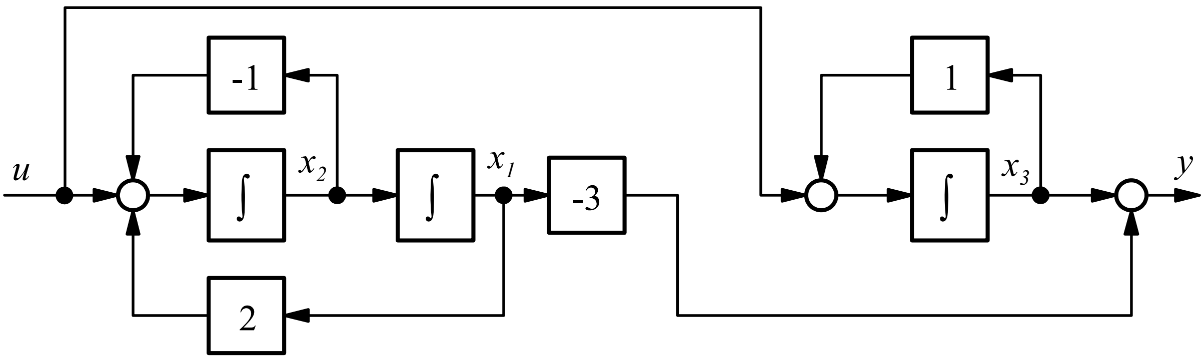
die Systemantworten $\mathbf{x}^{(i)}(t) = \Gamma\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(i)}(0) \\ u^{(i)}(\tau) \end{pmatrix}$ (mit $0 \le \tau \le t$ und $i = 1,\ldots,3$):

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2e^{t} - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 2 - e^{-3t} \\ e^{t} - 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{t} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Antwort des Systems für Zeiten $t \ge 1$ auf einen Anfangszustand $\mathbf{x}^{(4)}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ und die Eingangsgröße $u^{(4)}(t) = 3\sigma(t-1) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 3 & t > 1 \end{cases}$.
b) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
c) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und den Eingangsvektor $\mathbf{b}$.
d) Zeichnen Sie für $u(t) \equiv 0$ die Trajektorien des Systems in der (x_1, x_2)-Ebene. Wählen Sie dafür die oben angeführten 4 Anfangswerte $\mathbf{x}^{(1)}(0), \mathbf{x}^{(2)}(0), \mathbf{x}^{(3)}(0)$ und $\mathbf{x}^{(4)}(1)$. *Der Richtungssinn für wachsende Zeiten t und der asymptotische Verlauf für $t \to \infty$ soll dabei klar ersichtlich sein.*

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

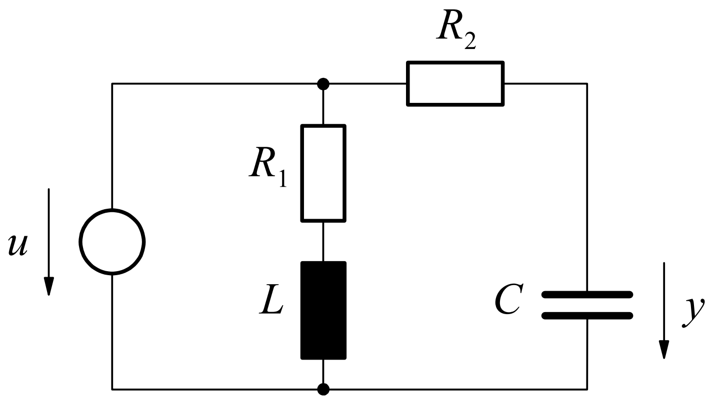


a) Ermitteln Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.
b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.
c) Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften des obigen Systems.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Bauelementen, den Ohmschen Widerständen R_1, R_2, einer Induktivität L und einer Kapazität C. Die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Kapazität C. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$
b) Für welche Bauteilwerte von R_1, R_2, L und C ist das System beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*
c) Für welche Bauteilwerte von R_1, R_2, L und C ist das System steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

Wählen Sie nun $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 100k\Omega$, $L = 0.1H$, $C = 10\,\mu F$ und:

d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.
e) Begründen Sie, dass die Antwort $y(t)$ des Netzwerkes für die Eingangsgröße $u(t) = 3 + \sin(t)$ betragsmäßig beschränkt ist und bestimmen Sie $y(t)$ für t ? 0 .

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 25. 10. 2006

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3
erreichbare Punkte	8	5	7
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Von einem linearen und zeitinvarianten (LZI) System ${}^{d}\!/_{dt}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ lauten für folgende drei Anfangszustände und Eingangsfunktionen

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{(1)}(t) = \sigma(t), \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{(2)}(t) = -2\sigma(t), \quad \mathbf{x}^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u^{(3)}(t) = 0$$

die Systemantworten $\mathbf{x}^{(i)}(t) = \Gamma\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(i)}(0) \\ u^{(i)}(\tau) \end{pmatrix}$ (mit $0 \le \tau \le t$ und $i = 1,\ldots,3$):

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2e^{-t} - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} - 2 \\ 2 - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Antwort des Systems für Zeiten $t \ge 1$ auf einen Anfangszustand $\mathbf{x}^{(4)}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ und die Eingangsgröße $u^{(4)}(t) = -\sigma(t-1) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ -1 & t > 1 \end{cases}$.

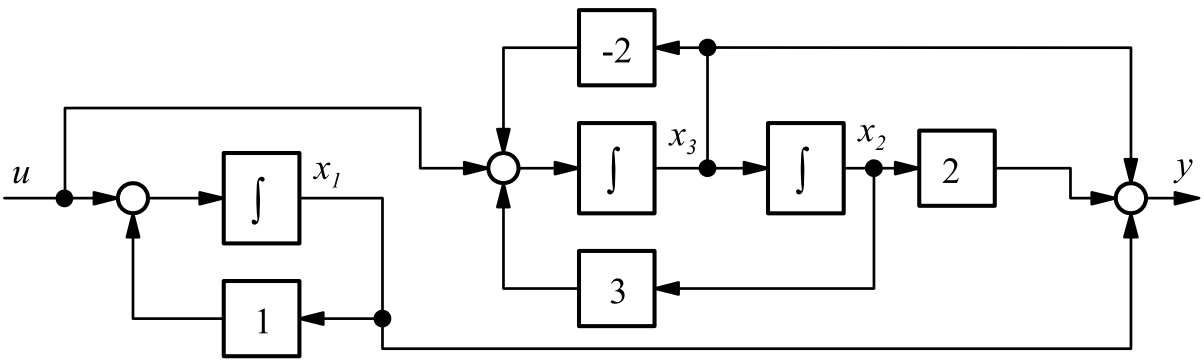
b) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und den Eingangsvektor $\mathbf{b}$.

d) Zeichnen Sie für $u(t) \equiv 0$ die Trajektorien des Systems in der (x_1, x_2)-Ebene. Wählen Sie dafür die oben angeführten 4 Anfangswerte $\mathbf{x}^{(1)}(0), \mathbf{x}^{(2)}(0), \mathbf{x}^{(3)}(0)$ und $\mathbf{x}^{(4)}(1)$. *Der Richtungssinn für wachsende Zeiten t und der asymptotische Verlauf für $t \to \infty$ soll dabei klar ersichtlich sein.*

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



a) Ermitteln Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

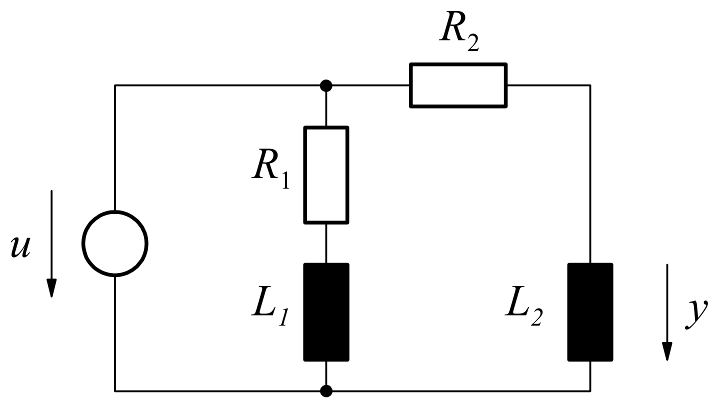
Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

c) Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften des obigen Systems.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Bauelementen, den Ohmschen Widerständen R_1, R_2, zwei Induktivitäten L_1 und L_2. Die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor **x** ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$

b) Für welche Bauteilwerte von R_1, R_2, L_1 und L_2 ist das System beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

c) Für welche Bauteilwerte von R_1, R_2, L_1 und L_2 ist das System steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

Wählen Sie nun $R_1 = R_2 = 1\Omega,\ L_1 = 0.1H,\ L_2 = 0.5H$ und:

d) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

e) Begründen Sie, dass die Antwort $y(t)$ des Netzwerkes für die Eingangsgröße $u(t) = 4 + \sin(2t)$ betragsmäßig beschränkt ist und bestimmen Sie $y(t)$ für t ? 0.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 19. 01. 2007

Name / Vorname(n):

Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3	4	
erreichbare Punkte	8	2	5	3	
erreichte Punkte					

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ m & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} u \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei sind m und p reelle Parameter.

a) Ermitteln Sie die Bedingungen für die Parameter m und p, damit das Modell steuerbar bzw. beobachtbar ist.

Für alle weiteren Berechnungen gilt: $m = -1$ $\qquad p = 0$

b) Untersuchen Sie die asymptotische Stabilität und die BIBO-Eigenschaft des Systems. Geben Sie mathematische Begründungen an!

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

d) Zeigen Sie, daß die Übertragungsfunktion obigen Systems durch

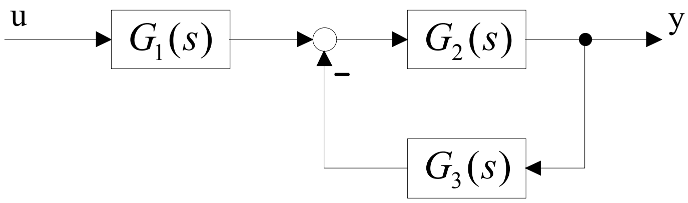
$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{5}{(s+1)(s+4)}$$

gegeben ist. Berechnen Sie die *eingeschwungene* Antwort $y(t)$ (t ? 0) des Systems auf die Eingangsgröße:

$$u(t) = 16 - 6\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgende Zusammenschaltung von drei Systemen $G_1(s)$, $G_2(s)$ und $G_3(s)$. Fassen Sie diese als ein Gesamtsystem $T(s)$ mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf:



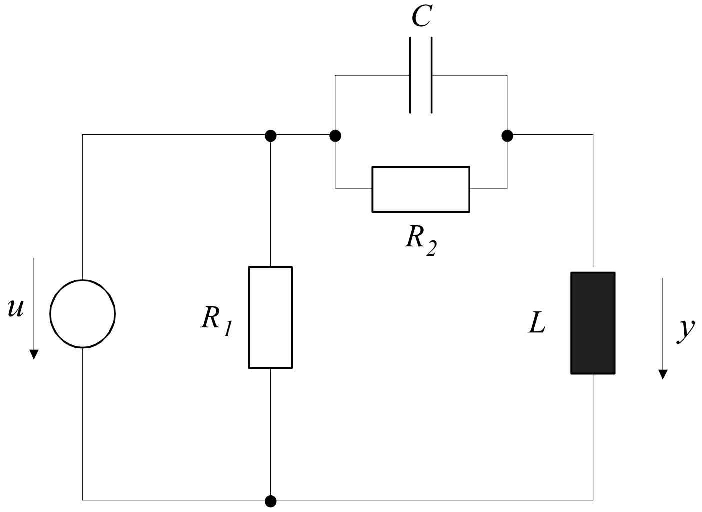
Für die Übertragungsfunktionen gilt:

$$T(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} \qquad G_1(s) = \frac{1}{s+2} \qquad G_2(s) = \frac{s+1}{s}$$

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G_3(s)$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Ohmschen Widerständen (R_1, R_2), einer idealen Kapazität (C) und einer idealen Induktivität (L). Die von der idealen Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,u \qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,u$$

Für die verwendeten Widerstände soll nun gelten: $R_1 = R_2 = R$

b) Berechnen (!) Sie für eine Eingangsgröße $u(t) = u_0\,\sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Aufgabe 4:

Betrachten Sie ein System mit der Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0} = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)}$$

a) Bestimmen Sie unter Verwendung der 1.Normalform (Steuerbarkeitsnormalform) ein mögliches Zustandsraummodell für das System $G(s)$.

b) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 09. 03. 2007

Name / Vorname(n):

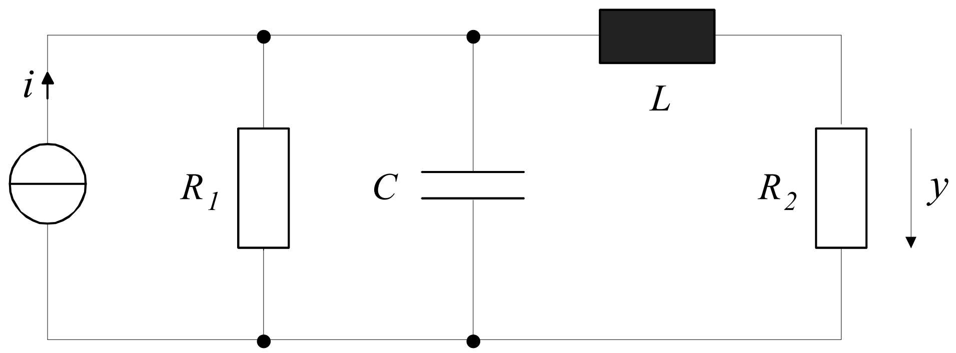
Kennzahl / Matrikel-Nummer:

Bonuspunkte aus den MATLAB-Übungen: O ja O nein

	1	2	3
erreichbare Punkte	5	2	11
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Ohmschen Widerständen (R_1, R_2), einer idealen Kapazität (C) und einer idealen Induktivität (L). Der von der idealen ***Stromquelle*** gelieferte Strom wird mit i symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße i und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}\,i \qquad\qquad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + d\,i$$

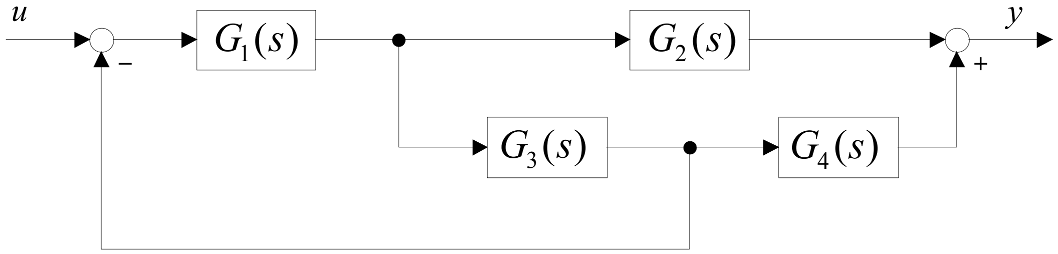
Für die verwendeten Widerstände soll nun gelten: $R_1 = R_2 = R$

b) **Berechnen (!)** Sie für eine Eingangsgröße $i(t) = i_0\,\sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad\qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Blockschaltbild mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $T(s) = \left.\frac{y(s)}{u(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=0}$ als Funktion der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ und $G_4(s)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2\,u$$

a) Zeichnen Sie das dazugehörige Strukturbild.

b) Ist das Modell asymptotisch stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

c) Ist das Modell BIBO-stabil? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

d) Ist das Modell steuerbar? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

e) Ist das Modell beobachtbar? Geben Sie eine mathematische Begründung an!

f) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

g) Skizzieren Sie für $u(t) \equiv 0$ den Verlauf der Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) in der $x_1 - x_2$ Ebene für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hierbei muss der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein!

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 29.6.2007

NACHNAME:

Vorname(n):

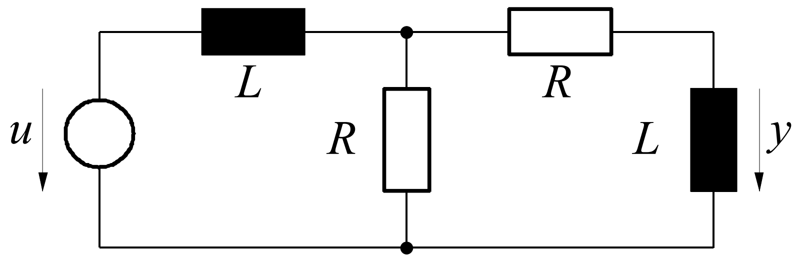
Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte aus Matlab-Übung: O Ja O Nein

	1	2	3	4
erreichbare Punkte	5	6	5	3
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus zwei Induktivitäten L und zwei Ohmschen Widerständen R. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der rechten Induktivität. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

b) **<u>Berechnen</u>** (!) Sie für die Eingangsfunktion $u(t) = u_0\sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell eines Systems mit der Eingangsgröße u, dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ und der Ausgangsgröße y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & \alpha - 2 & 0 \\ \alpha & 0 & -(\alpha+3) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Hierbei sei α ein reeller Parameter.

a) Zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild des Systems.
b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ des obigen Systems.
c) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das obige mathematische Modell asymptotisch stabil ist.
d) Ermitteln Sie den größtmöglichen Wertebereich für den Parameter α, damit das System die BIBO-Eigenschaft aufweist.
e) Ist das mathematische Modell beobachtbar ? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes mathematische Modell 2.Ordnung: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Ausgehend von einem speziellen Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$ wurde die zugehörige Lösung $\mathbf{x}(t)$ ermittelt:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{4t} \\ 4e^{4t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die zu obigem mathematischen Modell gehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
b) Ermitteln Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des mathematischen Modells.
c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit Angabe des Richtungssinnes für wachsende Zeiten t) für folgende Anfangszustände:

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(hierbei muß der asymptotische Verlauf der Trajektorien ($t \to \infty$) erkennbar sein)

Aufgabe 4:

Für die Übertragungsfunktionen zweier LZI-Systeme gilt:

System 1: $$G_1(s) = \left.\frac{y_1(s)}{u_1(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}} = \frac{s-2}{s^3+s^2+4s+2}$$

System 2: $$G_2(s) = \left.\frac{y_2(s)}{u_2(s)}\right|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{0}} = \frac{s-2}{s^3+s^2+2}$$

Berechnen Sie die eingeschwungenen Antworten (für t ? 0) $y_1(t)$ und $y_2(t)$ der beiden Systeme auf die Eingangsgrößen:

$$u_1(t) = u_2(t) = 2 - 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$