Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 4. 11. 2005

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3
erreichbare Punkte	7	4	5
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Wir betrachten ein lineares und zeitinvariantes (LZI) System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} .$$

Das Verhalten des Systems sei durch die Transitionsmatrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0.5\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right) \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

und die Gewichtsfunktion $g(t) = 2e^{-3t} + e^{-5t}$ spezifiziert.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

b) Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften des obigen Systems.

c) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und den Eingangsvektor $\mathbf{b}$ für das obige System.

d) Bestimmen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems für Zeiten $t \geq 0$ bei einer Eingangsgröße $u(t) = 2\sigma(t)$ wobei für den Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ gelte: $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei folgendes System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} .$$

Spezifiziert sei dieses System durch den Eingangs- und Ausgangsvektor

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

sowie durch die beiden Rechts-Eigenvektoren

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

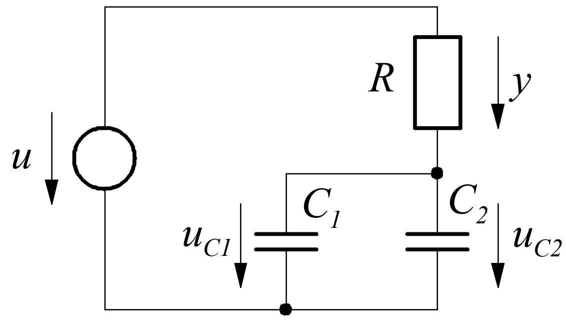
a) Berechnen Sie die LINKS-Eigenvektoren für die unbekannte Dynamik Matrix $\mathbf{A}$.

b) Ist das System steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*.

c) Ist das System beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Bauelementen, dem Ohmschen Widerstand R und den Kapazitäten C_1 und C_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein *steuerbares* mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

c) Wie müssen die Anfangsspannungen $u_{c1}(t_0), u_{c2}(t_0), t_0 = 0$ gewählt werden, damit bei einer Eingangsspannung $u(t) = \sigma(t)$ für die Ausgangsgröße $y(t)$ für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt:

$$y(t) = 0 .$$

Anmerkung: $\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 20. 1. 2006

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	7	6
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Wir betrachten ein lineares und zeitinvariantes (LZI) System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

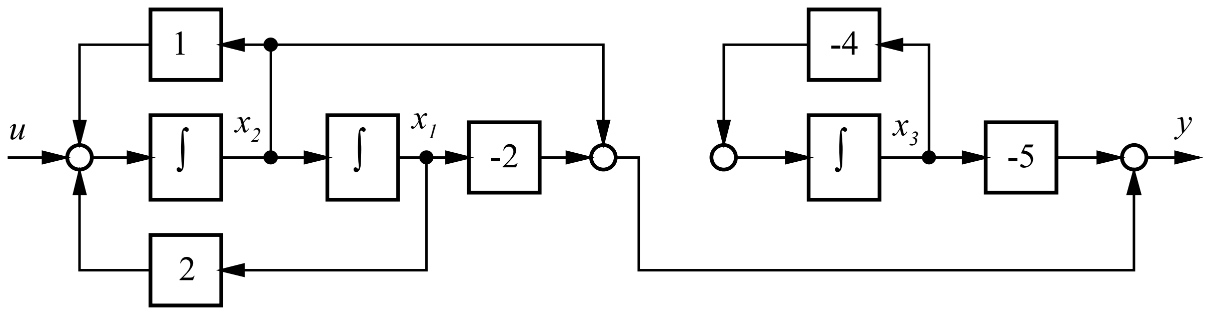
a) Bestimmen Sie die Gewichtsfunktion $g(t)$ des Systems.

b) Bestimmen Sie die Antwort $y(t)$ des Systems für Zeiten $t \geq 0$ bei einer Eingangsgröße für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und einer Eingangsgröße:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:



a) Ermitteln Sie dazu ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$.

Verwenden Sie hierbei die eingezeichneten Zustandsvariablen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

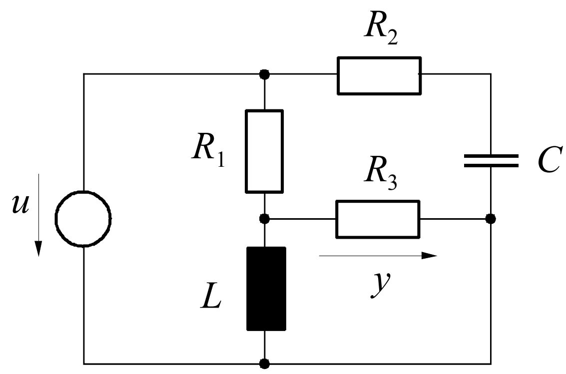
c) Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften des obigen Systems.

d) Ist das System steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

e) Ist das System beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Bauelementen, den Ohmschen Widerständen R_1, R_2, R_3 der Kapazität C und der Induktivität L. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_3. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} + du.$

Wählen Sie nun $R_1 = R_2 = R_3 = R$ und

b) berechnen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$,

c) ***berechnen*** Sie für eine Eingangsspannung $u(t) = \sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t), \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t).$$

Hinweis: Die Beantwortung dieser Frage soll durch ***Berechnung*** erfolgen! Für die Grenzwerte gilt, dass das System in Ruhe ist (d.h. $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{0}$).

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 10. 3. 2006

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3	
erreichbare Punkte	6	6	6	
erreichte Punkte				

Aufgabe 1:

Von einem linearen und zeitinvarianten (LZI) System $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ lauten für folgende drei Anfangszustände und Eingangsfunktionen

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{(1)}(t) = \sigma(t), \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, u^{(2)}(t) = \sigma(t), \quad \mathbf{x}^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u^{(3)}(t) = 0 .$$

die Systemantworten $\mathbf{x}^{(i)}(t) = \Gamma\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(i)}(0) \\ u^{(i)}(\tau) \end{pmatrix}$ (mit $0 \le \tau \le t$ und $i = 1,\ldots,3$):

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf einen Anfangszustand $\mathbf{x}^{(4)}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und die Eingangsgröße $u^{(4)}(t) = \sigma(t-1) = \begin{cases} 0 & t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$.
b) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.
c) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und den Eingangsvektor $\mathbf{b}$

Aufgabe 2:

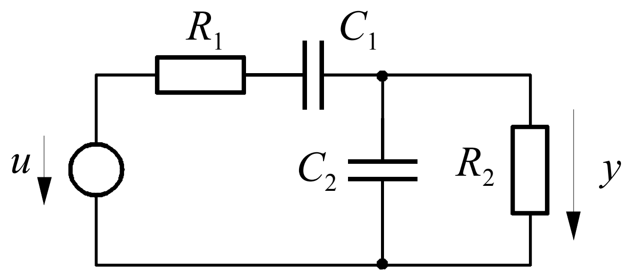
Gegeben sei ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

a) Ist das System steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*
b) Ist das System beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*
c) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*
d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.
e) Begründen Sie mathematisch, dass die Antwort $y(t)$ des Systems für den Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und der Eingangsgröße $u(t) = \sin(t), t \ge 0$ betragsmäßig beschränkt ist und bestimmen Sie $y(t)$ für $t \gg 0$.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Bauelementen, den Ohmschen Widerständen R_1, R_2, und den Kapazitäten C_1, C_2. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_2. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$

Wählen Sie nun $R_1 = R_2 = R,\ C_1 = C_2 = C$ und

b) ***berechnen*** Sie für eine Eingangsspannung $u(t) = \sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)\,, \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)\,.$$

Hinweis: Die Beantwortung dieser Frage soll durch ***Berechnung*** erfolgen! Für die Grenzwerte gilt, dass das System in Ruhe ist (d.h. $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{0}$). Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand physikalischer Überlegungen!

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 30. 6. 2006

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3
erreichbare Punkte	5	10	5
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Wir betrachten ein lineares und zeitinvariantes (LZI) System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}.$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

Als Systemantwort $y(t)$ des Systems für Zeiten $t \geq 0$ mit einer Eingangsgröße $u(t) = U \cdot e^{\xi t}$ mit $U \neq 0$ stehen nun folgende Zeitfunktionen zur Auswahl:

1) $y(t) = 2e^{t} + e^{-5t}$
2) $y(t) = e^{-4t}$

b) Welche Ausgangsfunktion kann durch obiges System erzeugt werden? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*
c) Bestimmen Sie für Ihre Wahl von $y(t)$ die Parameter U und ξ der Eingangsfunktion, sowie den entsprechenden Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein lineares und zeitinvariantes (LZI) System

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -15 & 0 & -8 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

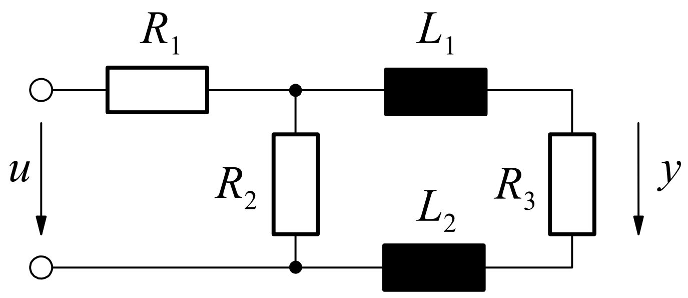
a) Zeichnen Sie das zugehörige Strukturbild.
b) Ermitteln Sie nun *anhand der Struktur* eine Transformations- bzw. Permutationsmatrix $\mathbf{T}$ mit $\det(\mathbf{T}) = -1$ so, dass eine Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$ ein transformiertes System der Form

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_2 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ b_2 \end{bmatrix}u, \quad y = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T & c_2 \end{bmatrix}\mathbf{z}$$

liefert. Wie lauten die Matrix $\mathbf{A}_1$, die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1^T$ und die Parameter a_2, b_2 und c_2?
c) Ist das System steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*
d) Ist das System beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*
e) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}_x(t)$ für das System mit Zustandsvariable $\mathbf{x}$.
(Hinweis: Nutzen Sie hier die durchgeführte Transformation aus!)
f) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.
g) Untersuchen Sie die Stabilitätseigenschaften des Systems.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie folgendes elektrische Netzwerk bestehend aus idealen Bauelementen, den Ohmschen Widerständen R_1, R_2, R_3 und den Induktivitäten L_1 und L_2. Die Eingangsspannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung am Widerstand R_3. Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein *steuerbares* mathematisches Modell der Form $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + du.$

Wählen Sie nun $R_1 = R_2 = R_3 = R, \quad L_1 = L_2 = L$ und

b) berechnen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$,

c) ***berechnen*** Sie für eine Eingangsspannung $u(t) = 1 \cdot \sigma(t)$ die Grenzwerte:

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t), \qquad y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t).$$

Hinweis: Die Beantwortung dieser Frage soll durch ***Berechnung*** erfolgen! Für die Grenzwerte gilt, dass das System in Ruhe ist (d.h. $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{0}$).