Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1** am 21.10.2004

Name / Vorname(n):

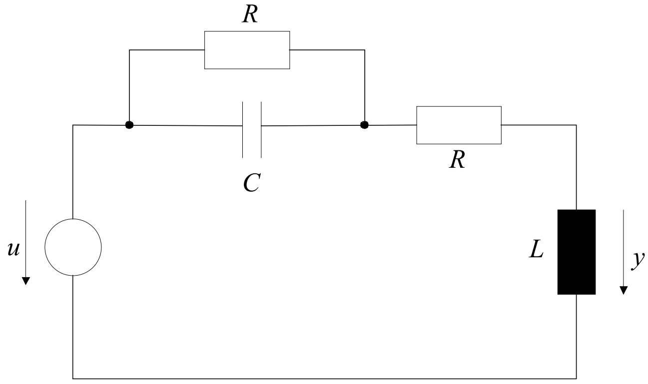
Kenn-Matr.Nr.:

Bonuspunkte:

	1	2	3	
erreichbare Punkte	5	6	5	
erreichte Punkte				

Aufgabe1:

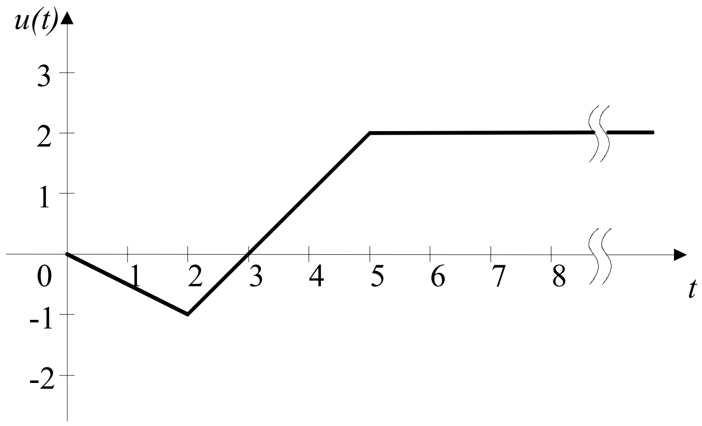
Betrachten Sie folgendes ideale elektrische Netzwerk bestehend aus einer Induktivität L, einer Kapazität C und zwei Ohmschen Widerständen R. Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung wird mit u symbolisiert. Mit y bezeichnen wir die Spannung an der Induktivität L (siehe Skizze). Fassen Sie das Netzwerk als ein System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y auf.



a) Führen Sie einen geeigneten Zustandsvektor $\mathbf{x}$ ein und ermitteln Sie ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du.$$

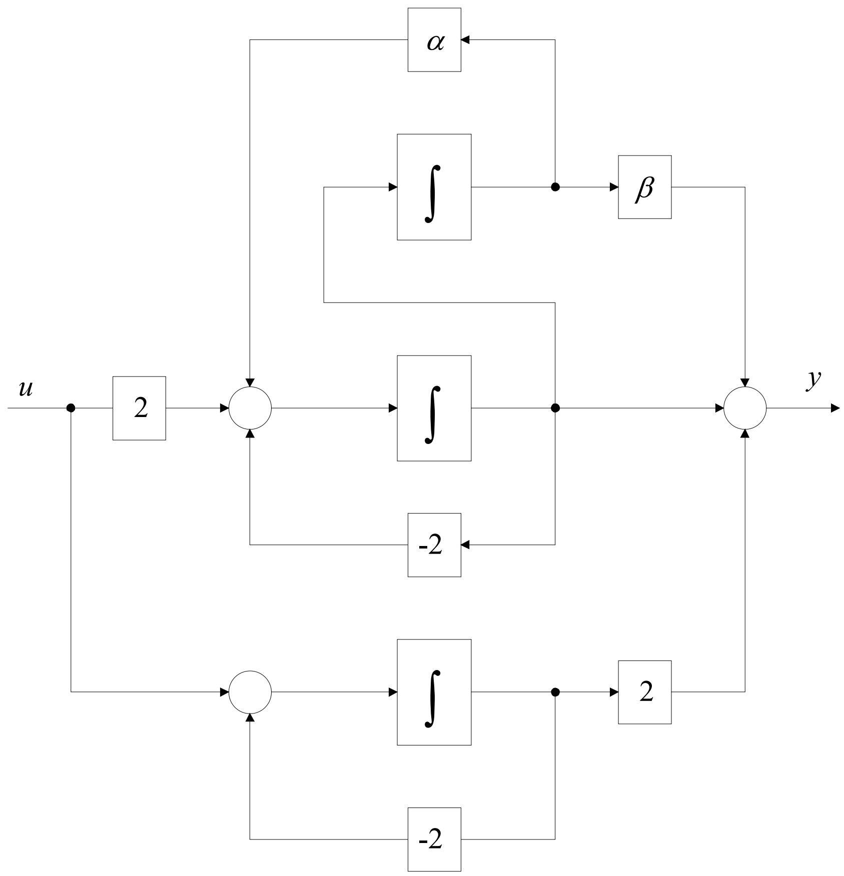
b) Ermitteln Sie den Grenzwert des Zustandsvektors $\lim_{t\to\infty}(\mathbf{x}(t))$ und den Grenzwert der Ausgangsgröße $\lim_{t\to\infty}(y(t))$ für die dargestellte Eingangsgröße $u(t)$.



Hinweis: Zur Beantwortung dieser Frage sind *keine* längeren Rechnungen notwendig, physikalische Überlegungen sind ausreichend.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.



Hierbei sind α und β reelle Parameter.

a) Führen Sie einen Zustandsvektor ein und geben sie eine Systembeschreibung der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$
$$y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du$$

an.

b) Geben Sie die größtmöglichen Wertebereiche für die Parameter α und β an, damit das System asymptotisch stabil ist.

Für den Parameter α wird nun der Wert $\alpha = 3$ gewählt.

c) Für welche Werte des Parameters β wird das System nicht beobachtbar?

d) Bestimmen Sie den größtmöglichen Wertebereich des Parameters β so, dass das System die BIBO-Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das System 2. Ordnung mit der Eingangsgröße u und dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

Die beiden Rechts-Eigenvektoren der Systemmatrix $\mathbf{A}$ sind ebenfalls bekannt:

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Ist das System steuerbar? (*Geben Sie eine mathematische Begründung an!*)

Der zu Eigenvektor $\mathbf{p}_1$ gehörige Eigenwert sei nun $s_1 = -3$, der zweite Eigenwert sei $s_2 = 0$.

b) Ermitteln Sie die Systemmatrix $\mathbf{A}$.

c) Skizzieren Sie in der Zustandsebene die Trajektorien (mit der Angabe des Richtungssinnes für wachsende t-Werte) für die folgenden Anfangszustände.

$$x_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 7. 2. 2005

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

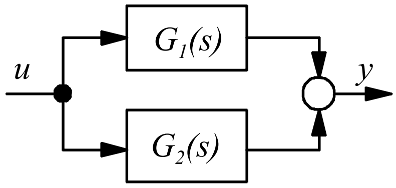
Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3
erreichbare Punkte	7	4	8
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.



Die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme lauten: $G_1(s) = \dfrac{2}{s^2+4s+3}, \quad G_2(s) = \dfrac{s}{s+2}$

a) Wählen Sie geeignete Zustandsvariablen und ermitteln Sie ein mathematisches Modell für das Gesamtsystem in der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\,.$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

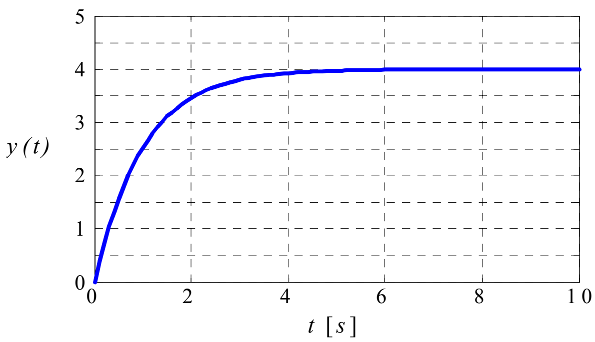
c) Besitzt das System die BIBO Eigenschaft? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*

Aufgabe 2:

Von einem System kennt man nur die Struktur seiner Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{b}{s+a}$.

Um die unbekannten (reellen) Parameter a und b zu ermitteln wurden 2 Messungen durchgeführt:

(1) Eine sprungförmige Eingangsfunktion $u(t) = \sigma(t)$ liefert den in der nachfolgenden Abbildung dargestellten Verlauf der Ausgangsgröße.



(2) Die Eingangsgröße $u(t) = \sin(t)$ liefert ihrerseits im eingeschwungenen Zustand folgende sinusförmige Ausgangsgröße $y(t) = \dfrac{4}{\sqrt{2}}\sin(t+\varphi)$.

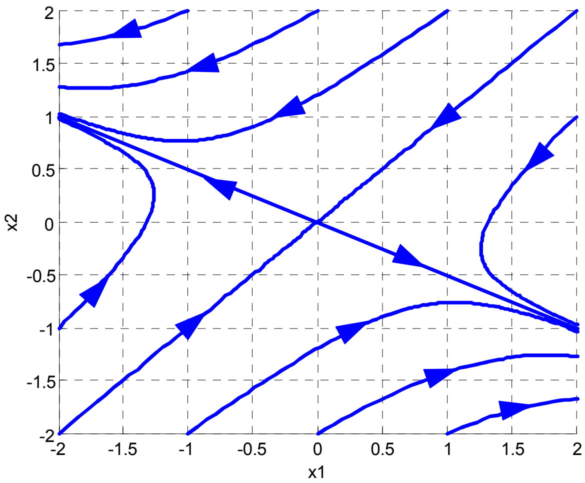
Bestimmen Sie die Parameter a und b der Übertragungsfunktion.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das Trajektorienfeld für $u(t) \equiv 0,\ \mathbf{x}(t_0) \neq 0$ eines linearen zeitinvarianten Systems der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u\,.$$

Hierbei sind b_1 und b_2 reelle Parameter.



(Die Pfeilrichtung entspricht dem Verlauf der Trajektorie für anwachsende Werte der Zeit *t*)

a) Ist das System asymptotisch stabil?

b) Ermitteln Sie, welche der 3 folgenden Eigenwertkombinationen zu obigem System passt. *(Geben Sie eine mathematische Begründung an)*

1) $s_1 = -1, \quad s_2 = 1,$
2) $s_1 = -2, \quad s_2 = 0.5,$
3) $s_1 = -1 + j, \quad s_2 = -1 - j.$

c) Bestimmen Sie für die im Punkt (b) gewählten Eigenwerte s_1, s_2 die zugehörigen Rechtseigenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ und berechnen daraus die zugehörigen Linkseigenvektoren $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$.

d) Bestimmen Sie Bedingungen für die Parameter b_1 und b_2, sodass obiges System steuerbar ist.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 18. 3. 2005

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

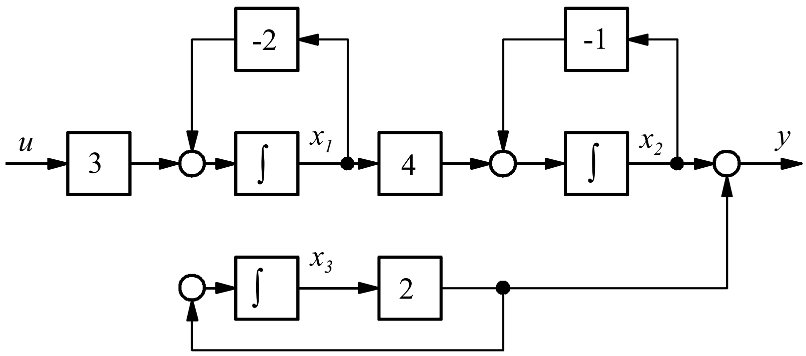
Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3
erreichbare Punkte	8	4	6
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Betrachten Sie folgendes Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.



a) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell für das Gesamtsystem in der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du\,.$$

Verwenden Sie hierbei die oben eingezeichneten Zustandsvariablen.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$.

c) Ist das dargestellte System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

d) Ist das System steuerbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

e) Wählen Sie einen geeigneten Anfangszustand $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ so, dass für die Eingangsgröße

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t \end{cases}$$

nach hinreichend langer Zeit t gilt $y(t)\,|_{t\square\,0} = 0$.

(Hinweis: Für die Beantwortung dieser Frage sind KEINE langen Berechnungen notwendig!)

Aufgabe 2:

Von einem System kennt man nur die Struktur seiner Übertragungsfunktion $G(s) = \dfrac{b}{s+a}$.

Um die unbekannten (reellen) Parameter *a* und *b* zu ermitteln wurde als Eingangsgrösse eine Sinusfunktion

$$u(t) = 6\sin(2t)$$

gewählt. Nach hinreichend langer Zeit t wurde der Verlauf der Eingangsgrösse $u(t)$ und der Ausgangsgrösse $y(t)$ messtechnisch erfasst:

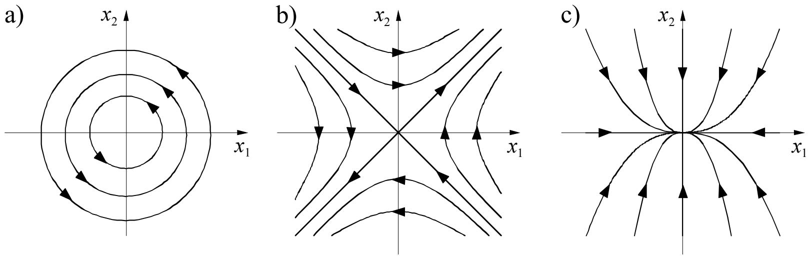
$$y(t)\,\big|_{t \gg t_0} = 3\sqrt{2}\,\sin(2t - 45°)\ .$$

Darüber hinaus liefert eine konstante Eingangsgrösse $u(t) = 2\sigma(t)$, ebenfalls nach hinreichend langer Zeit t eine gleichbleibende Ausgangsgröße von $y(t)\,\big|_{t \gg t_0} = 2$.

Bestimmen Sie die Parameter *a* und *b* der Übertragungsfunktion.

Aufgabe 3:

Gegeben sei der Trajektorienverlauf für drei Systeme zweiter Ordnung:



Bestimmen Sie die Zuordnung der nachfolgenden mathematischen Modelle zu den obigen Trajektorienverläufen. (*Geben Sie eine mathematische Begründung an*!).

1) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$ 3) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$ 5) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}\mathbf{x}$

2) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$ 4) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}\mathbf{x}$ 6) $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x}$

Für die reellen Parameter α und β gelte: $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta$.

Schriftliche Prüfung aus **Control Systems 1**
am 1. 7. 2005

Name / Vorname(n):

Kenn-Matr.Nr.:

Geburtsdatum:

BONUSPUNKTE aus Computerrechenübung:

	1	2	3
erreichbare Punkte	6	8	8
erreichte Punkte			

Aufgabe 1:

Wir betrachten ein lineares und zeitinvariantes (LZI) System der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Die Eingangsgröße $u(t)$ besitzt prinzipiell die Form $u(t) = Ue^{\xi t}\sigma(t - t_0)$.
Gegeben seien nun folgende zwei Ausgangsfunktionen dieses Systems:

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u^{(1)}(t) = \sigma(t) \quad \rightarrow \quad y^{(1)}(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{4}e^{-4t}$$

$$\mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad u^{(2)}(t) = \sigma(t) \quad \rightarrow \quad y^{(2)}(t) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{15}{4}e^{-4t}$$

Welche der folgenden Zeitfunktionen $y^{(3)}(t)$, $y^{(4)}(t)$ und $y^{(5)}(t)$ sind mögliche Ausgangsfunktionen dieses Systems? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

$$a) \quad y^{(3)}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{4}{4}e^{-4t}$$

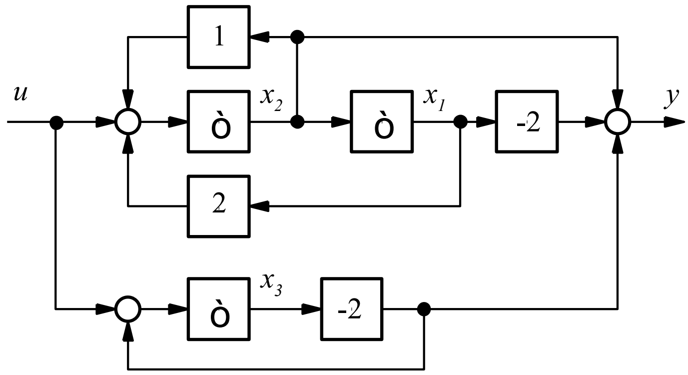
$$b) \quad y^{(4)}(t) = \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{4}e^{-4(t-1)} \right)\sigma(t-1)$$

$$c) \quad y^{(5)}(t) = -e^{-2t} - 2e^{-4t}$$

Anmerkung: Die Ermittlung der Systemmatrix ($\mathbf{A}$), des Eingangs- bzw. Ausgangsvektors ($\mathbf{b}, \mathbf{c}$), sowie der Transitionsmatrix ($\mathbf{\Phi}(t)$) ist für die Beantwortung NICHT notwendig.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie folgendes Strukturbild eines Systems mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y.



a) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell für das System in der Form

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du .$$

Verwenden Sie hierbei die oben eingezeichneten Zustandsvariablen.

b) Ist das System asymptotisch stabil? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

c) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$.

d) Besitzt das System die BIBO Eigenschaft? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

e) Ist das System steuerbar bzw. beobachtbar? *(Geben Sie eine mathematische Begründung an).*

Aufgabe 3:

Gegeben sei folgendes System mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u =: \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} =: \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

a) Begründen Sie mathematisch, dass dieses System durch eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ in die Diagonalform

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \boldsymbol{\delta}u, \quad y = \bar{\boldsymbol{\delta}}^T\mathbf{z}$$

mit:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \end{bmatrix}$$

übergeführt werden kann.

b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$, sowie die Dynamikmatrix $\mathbf{\Lambda}$, den Eingangsvektor $\boldsymbol{\delta}$, und den Ausgangsvektor $\bar{\boldsymbol{\delta}}$ für das Diagonalsystem.

c) Ermitteln Sie die Transitionsmatrizen $\mathbf{\Phi}_z(t) := e^{\mathbf{\Lambda}t}$, $\mathbf{\Phi}_x(t) := e^{\mathbf{A}t}$.

d) Bestimmen Sie den Verlauf der Zustandsgrößen $\mathbf{x}(t)$ bei verschwindender Eingangsgröße ($u(t) \equiv 0,$ für $t \geq 0$) und folgenden 3 Anfangswerten:

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

e) Ermitteln Sie die jeweiligen Gewichtsfunktionen ($g_\mathbf{x}(t), g_\mathbf{z}(t)$) dieser zwei Systeme.