Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung

Theorie der Elektrotechnik

(437.251)

von

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Oszkár Bíró

Inhalt

1. Die Maxwellschen Gleichungen
    1.1 Einteilung der Elektrodynamik
    1.2 Grundlagen der Netzwerktheorie
    1.3 Energieumwandlungen im elektromagnetischen Feld
    1.4 Eindeutige Lösbarkeit der Maxwellschen Gleichungen
2. Statische und stationäre Felder
    2.1 Randwertprobleme für das Skalarpotential
    2.2 Analytische Lösungsmethoden der Laplaceschen Gleichung
        2.2.1 Methode der fiktiven Ladungen (Spiegelungsprinzip)
        2.2.2 Trennung der Variablen (Separationsmethode)
        2.2.3 Konforme Abbildung
    2.3 Numerische Lösungsmethoden der Randwertprobleme für das Skalarpotential
        2.3.1 Methode der finiten Differenzen
        2.3.2 Variationsproblem der Elektrostatik
        2.3.3 Das Ritzsche Verfahren
        2.3.4 Die Methode der finiten Elemente
    2.4 Integralgleichungen für das Skalarpotential
        2.4.1 Elemente der Potentialtheorie
        2.4.2 Integralgleichung für die Oberflächenladungsdichte
        2.4.3 Methode der Randelemente

2.5 Randwertprobleme für das Vektorpotential
2.5.1 Ebene 2D Probleme
2.5.2 Rotationssymmetrische 2D Probleme
2.5.3 3D Probleme
3. Quasistationäre Felder
3.1 Einige analytische Lösungen des Randwertproblems für das magnetische Vektorpotential
3.1.1 Strom in unendlichem leitendem Halbraum
3.1.2 Strom in unendlich ausgedehnter leitender Platte
4. Elektromagnetische Wellen
4.1 Ebene Wellen
4.2 Elektromagnetische Wellen im unendlichen, homogenen Raum
4.2.1 Lösung der Maxwellschen Gleichungen mit retardierten Potentialen
4.2.2 Der Hertzsche Dipol
4.3 Geführte Wellen
4.3.1 TM- und TE-Wellen
4.3.2 Wellen in rechteckigen Hohlleitern

1. Die Maxwellschen Gleichungen:

$I. \quad rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$ verallgemeinerter Durchflutungssatz,

$II. \quad rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$ Induktionsgesetz,

$III. \, div\mathbf{B} = 0,$ Quellenfreiheit der magnetischen Induktion,

$IV. \, div\mathbf{D} = \rho,$ Gaußsches Gesetz.

Folgegleichung: Kontinuitätsgesetz:

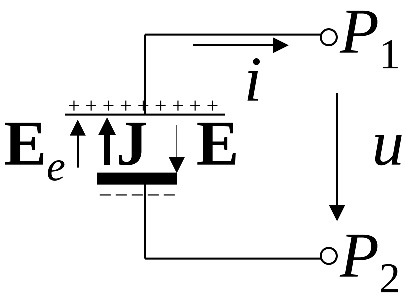
$$div\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

(die Divergenz der I. Maxwellschen Gleichung + die IV. Maxwellsche Gleichung:

$$div\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0, \; div\mathbf{D} = \rho.)$$

Feldgrößen in Spannungsquellen

In Spannungsquellen erfolgt eine Ladungstrennung in Folge von nichtelektrischen (z.B. chemischen) Vorgängen. Die eingeprägte Feldstärke $\mathbf{E}_e$ ist eine fiktive, äquivalente elektrische Feldstärke, welche die gleiche Ladungstrennung hervorrufen würde: $u_q = \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{r}, \quad u = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$



Γ: Querschnitt
γ: spezifische Leitfähigkeit

$$iR_q = \int_{P_2}^{P_1} \frac{\mathbf{J}\Gamma}{\gamma\Gamma} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{\mathbf{J}}{\gamma} \cdot d\mathbf{r}$$

reale Spannungsquelle: $u = u_q - iR_q \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{E}_e + \dfrac{\mathbf{J}}{\gamma}$

ideale Spannungsquelle: $u = u_q \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{E}_e, \gamma \to \infty$

$$\boxed{\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e)}$$

Materialgleichungen:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},\ \mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e).$$

Energie- und Leistungsdichte:

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\ \left(= \int_0^D \mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \int_0^B \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B} \right),$$

$$p = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma}.$$

Energie und Verlustleistung in einem Volumen Ω:

$$W = \int_\Omega w d\Omega, \quad P = \int_\Omega p d\Omega.$$

1.1 Einteilung der Elektrodynamik

1. Statische und stationäre Felder $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J},\ rot\mathbf{E} = \mathbf{0},\ div\mathbf{B} = 0,\ div\mathbf{D} = \rho,\ div\mathbf{J} = 0.$$

elektrostatisches Feld: $rot\mathbf{E} = \mathbf{0},\ div\mathbf{D} = \rho,\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}.$

stationäres Magnetfeld: $rot\mathbf{H} = \mathbf{J},\ div\mathbf{B} = 0,\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$

stationäres Strömungsfeld: $rot\mathbf{E} = \mathbf{0},\ div\mathbf{J} = 0,\ \mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e).$

2. Quasistationäres Feld $\left(|\mathbf{J}| >> \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \right)$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J},$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$div\mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H},\ \mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e).$$

3. Elektromagnetische Wellen

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$div\mathbf{B} = 0,$$

$$div\mathbf{D} = \rho,$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},\ \mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e).$$

1.2 Grundlagen der Netzwerktheorie

Netzwerksignale:

$$u_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad i_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma,$$

$$Q_\Omega = \int_\Omega \rho d\Omega = \int_\Omega div \mathbf{D} d\Omega = \oint_\Gamma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \Phi_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$

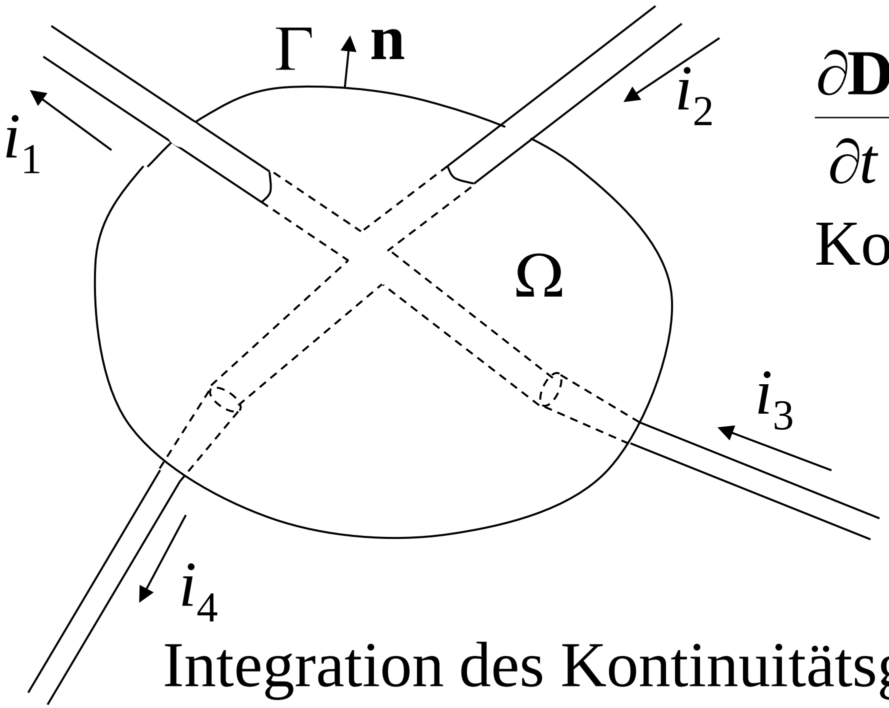
Netzwerkelemente:

Widerstand: $u = Ri,$

idealer Kondensator: $i = C \dfrac{du}{dt},$

ideale Spule: $u = L \dfrac{di}{dt}.$

Die Kirchhoffsche Knotenregel:



$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \text{ auf } \Gamma, \text{ da } \Gamma \text{ keine}$$

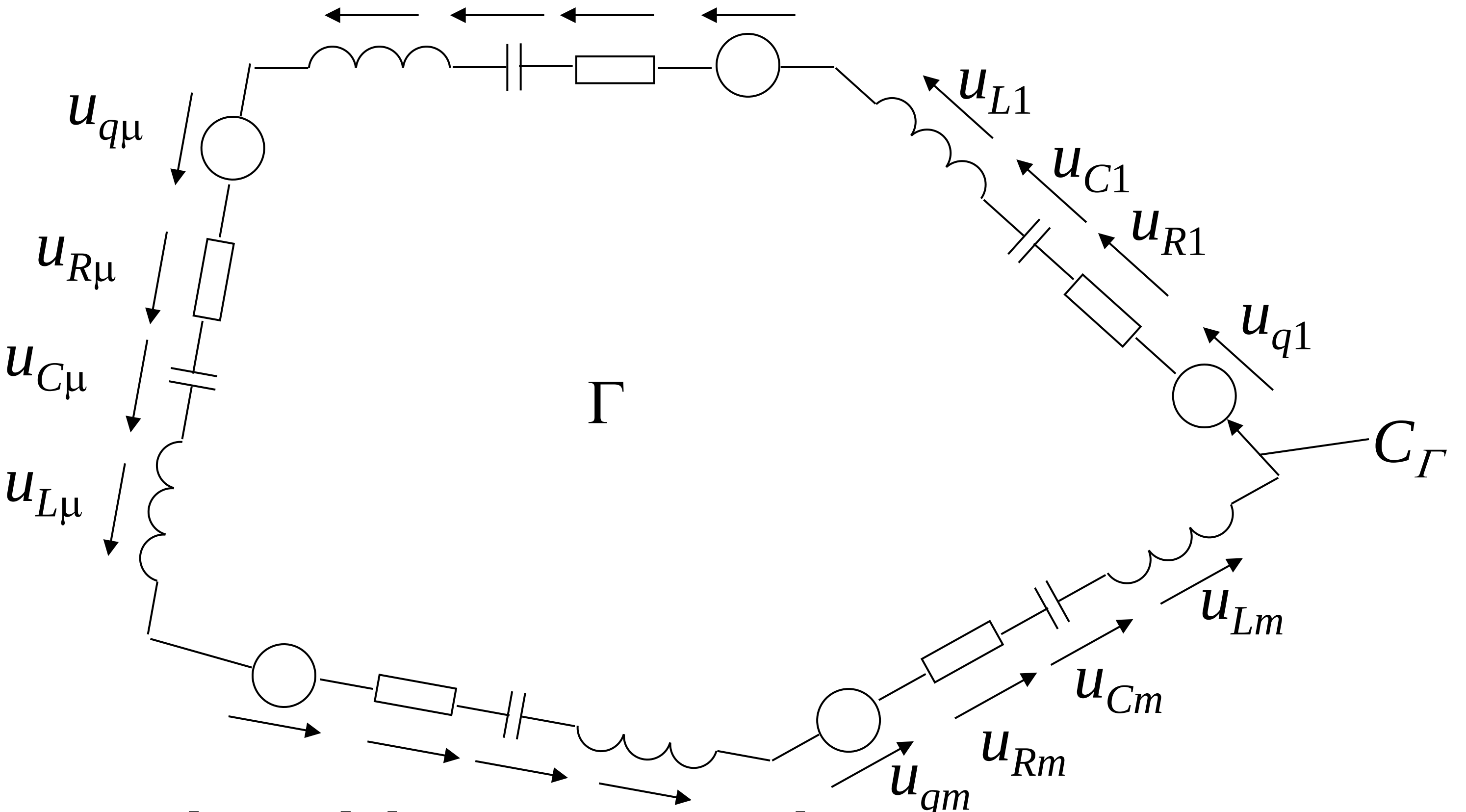
Kondensatoren schneidet.

Integration des Kontinuitätsgesetzes über Ω:

$$\int_{\Omega} \left(div\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\Omega = \int_{\Omega} div \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0.$$

$$\boxed{\sum_{\nu} i_{\nu} = 0}$$

Die Kirchhoffsche Maschenregel:



Integration des Induktionsgesetzes über Γ:

$$\int_\Gamma \left(rot\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{C_\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \frac{d}{dt} \int_\Gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0.$$

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^{m} \left(u_{q\mu} + u_{R\mu} + u_{C\mu} + u_{L\mu} \right) = 0}$$

1.3 Energieumwandlungen im elektromagnetischen Feld

$$-\mathbf{E}\cdot rot\mathbf{H} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$ I. MGl.$\cdot$ (**-E**)

$$+\quad \mathbf{H}\cdot rot\mathbf{E} = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$ II. MGl. $\cdot\,\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}\cdot rot\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot rot\mathbf{H} = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H}\cdot rot\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot rot\mathbf{H} = \mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) =$$

$$= \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c) + \nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H}) = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

Integration über ein Volumen Ω:

$$-\int_{\Omega}\left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)d\Omega=\int_{\Omega}\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}d\Omega+\int_{\Omega}div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)d\Omega$$

$$\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{0}^{B}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}=\frac{\partial w_m}{\partial t}\left(=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\mu\left|\mathbf{H}\right|^2\right)$$

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{0}^{D}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}=\frac{\partial w_e}{\partial t}\left(=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\varepsilon\left|\mathbf{E}\right|^2\right)$$

für lineare Medien

$$\mathbf{J}=\gamma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}_e\right)\Rightarrow\mathbf{E}=\frac{\mathbf{J}}{\gamma}-\mathbf{E}_e\Rightarrow\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}=\frac{\left|\mathbf{J}\right|^2}{\gamma}-\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{J}=p-\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{J}$$

$$\int_{\Omega}div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)d\Omega=\oint_{\Gamma}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{n}d\Gamma\qquad\text{(Gaußscher Satz)}$$

Poyntingscher Satz:

$$\boxed{-\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(w_m + w_e)d\Omega = \int_{\Omega}\frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma}d\Omega - \int_{\Omega}\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}d\Omega + \oint_{\Gamma}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}d\Gamma}$$

rechte Seite:

Ursachen für die Abnahme der Energie im Volumen

$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ Poyntingscher Vektor: Leistung durch Einheitsfläche

$\oint_{\Gamma}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}d\Gamma$ ist die Leistung, welche durch Strahlung das Volumen Ω verläßt.

1.4 Eindeutige Lösbarkeit der Maxwellschen Gleichungen

Die Lösung der Maxwellschen Gleichungen in einem Volumen Ω mit dem Rand Γ ist für $t > t_0$ eindeutig, vorausgesetzt, dass die

1. Anfangsbedingungen

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t = t_0) = \mathbf{H}_{0anf}(\mathbf{r}), \mathbf{E}(\mathbf{r}, t = t_0) = \mathbf{E}_{0anf}(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \boldsymbol{\Omega}, \text{ und die}$$

2. Randbedingungen für die Tangentialkomponenten

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{0tan}(\mathbf{r}, t) \ \underline{\text{oder}}\ \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0tan}(\mathbf{r}, t), \forall \mathbf{r} \in \Gamma, t \geq t_0$$

erfüllt sind. Sowohl die Funktionen $\mathbf{H}_{0anf}(\mathbf{r}), \mathbf{E}_{0anf}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}_{0tan}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{E}_{0tan}(\mathbf{r}, t)$ als auch die eingeprägte Feldstärke $\mathbf{E}_e$ müssen bekannt sein. Lineare Materialeigenschaften werden angenommen.

Beweis:

Annahme:

es existieren zwei Lösungen: $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$ und $\mathbf{E}'', \mathbf{H}''$.

Die Differenz der beiden: $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}' - \mathbf{E}''$, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$ erfüllen die Maxwellschen Gleichungen (dies sind linear). Dabei sind die Anfangsbedingungen und Randbedingungen homogen bzw. $\mathbf{E}_{e0}$=0. So gilt für sie der Poyntingsche Satz:

$$-\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\mu\left|\mathbf{H}_0\right|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\left|\mathbf{E}_0\right|^2\right)d\Omega = \int_{\Omega}\frac{\left|\mathbf{J}_0\right|^2}{\gamma}d\Omega + \oint_{\Gamma}\left(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0\right)\cdot \mathbf{n}\,d\Gamma$$

Da, wegen der Randbedingungen, entweder $\mathbf{E}_0$ oder $\mathbf{H}_0$ in die Normalrichtung $\mathbf{n}$ zeigen, hat $\mathbf{S}_0 = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0$ keine Normal-komponente. So ist das Oberflächenintegral Null.

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\mu\left|\mathbf{H}_0\right|^2+\frac{1}{2}\varepsilon\left|\mathbf{E}_0\right|^2\right)d\Omega=\int\limits_{\Omega}\frac{\left|\mathbf{J}_0\right|^2}{\gamma}\,d\Omega$$

Die rechte Seite kann nie negativ werden, d.h. dass der Ausdruck dessen negative Zeitableitung an der linken Seite steht nie zunehmen kann. Er ist wegen der Anfangsbedingungen im Zeitpunkt t_0 gleich Null und da er offensichtlich nicht negativ ist, kann er auch nicht abnehmen. Daher muss er immer Null sein:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\mu\left|\mathbf{H}_0\right|^2+\frac{1}{2}\varepsilon\left|\mathbf{E}_0\right|^2\right)d\Omega=0.$$

Daraus folgt $\mathbf{E}_0=\mathbf{0}$, $\mathbf{H}_0=\mathbf{0}$, d.h. $\mathbf{E}'=\mathbf{E}''$ und $\mathbf{H}'=\mathbf{H}''$.

q. e. d.

2. Statische und stationäre Felder

Maxwellsche Gleichungen $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$:

$$\begin{aligned} rot\mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ rot\mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ div\mathbf{B} &= 0, \\ div\mathbf{D} &= \rho, \\ div\mathbf{J} &= 0. \end{aligned}$$

elektrostatisches Feld:

$$rot\mathbf{E} = \mathbf{0},$$
$$div\mathbf{D} = \rho,$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}.$$

stationäres Magnetfeld:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J},$$
$$div\mathbf{B} = 0,$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$$

stationäres Strömungsfeld:

$$rot\mathbf{E} = \mathbf{0},$$
$$div\mathbf{J} = 0,$$
$$\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_e).$$

2.1 Randwertprobleme für das Skalarpotential

Elektrostatisches Feld und stationäres Strömungsfeld:

$rot\mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E} = -gradV$, V: elektrisches Skalarpotential

Stationäres Magnetfeld, wenn **J**=**0**:

$rot\mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -grad\psi$, ψ: magnetisches Skalarpotential

Differentialgleichungen:

$$div\mathbf{D} = \rho \Rightarrow -div(\varepsilon gradV) = \rho,$$

$$div\mathbf{B} = 0 \Rightarrow -div(\mu grad\psi) = 0,$$

$$div\mathbf{J} = 0 \Rightarrow -div(\gamma gradV) = 0,$$

verallgemeinerte Laplace-Poissonsche bzw. Laplacesche Gleichung.

Die Lösung der Laplace-Poissonschen Gleichung im unendlichen, leeren ($\varepsilon=\varepsilon_0$) Raum:

$$V(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\Omega}\frac{\rho(\mathbf{r}')d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\ V(\mathbf{r}\to\infty)=0.$$

Im ladungsfreien Gebiet gilt auch für das elektrostatische Feld die verallgemeinerte Laplacesche Gleichung:

$$-div(\varepsilon grad V)=0.$$

Randbedingungen:

Dirichletsche Randbedingung: $V = V_0$ (bekannt) auf Γ_D,

$\psi = \psi_0$ (bekannt) auf Γ_D.

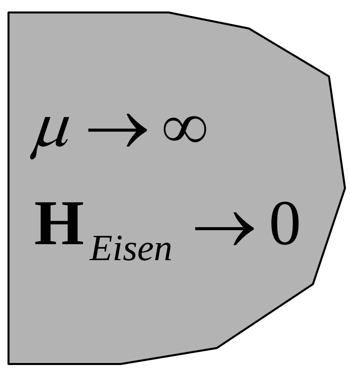
Bedeutet die Vorgabe von $\mathbf{E_t}$ oder $\mathbf{H_t}$.

Γ_D wird im elektrostatischen Feld und stationären Strömungsfeld typischerweise durch Elektroden gebildet. Hier gilt $\mathbf{E_t} = \mathbf{0} \Rightarrow V =$ konstant.

Stationäres Magnetfeld: Grenzfläche zu hochpermeablem Gebiet, magnetischer Wand $(\mu \to \infty)$.

$\mu = \mu_0$

$\mathbf{H_t} = \mathbf{0}$



da $\mathbf{H_t} = \mathbf{H}_{\mathbf{t}Eisen}$

Neumannsche Randbedingung: $\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial n} = \sigma$ (bekannt) auf Γ_N,

$$\gamma \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma_N,$$

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} = b \text{ (bekannt) auf } \Gamma_N.$$

Bedeutet die Vorgabe von D_n, J_n, bzw. B_n.

Im stationären Strömungsfeld ist Γ_N die Grenzfläche zum nichtleitenden Gebiet.

Falls σ=0 im elektrostatischen Feld und b=0 im stationären Magnetfeld, ist Γ_N eine Fläche parallel zu den Feldlinien. Sonst ist D_n, B_n bekannt auf Γ_N.

Randwertprobleme:

elektrostatisches Feld:

$$-div(\varepsilon grad V) = \rho \text{ in } \Omega,$$

$$V = V_0 \text{ auf } \Gamma_D, \; \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} = \sigma \text{ auf } \Gamma_N.$$

stationäres Magnetfeld:

$$-div(\mu grad \psi) = 0 \text{ in } \Omega,$$

$$\psi = \psi_0 \text{ auf } \Gamma_D, \; \mu \frac{\partial \psi}{\partial n} = b \text{ auf } \Gamma_N.$$

stationäres Strömungsfeld:

$$-div(\gamma grad V) = 0 \text{ in } \Omega,$$

$$V = V_0 \text{ auf } \Gamma_D, \; \gamma \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma_N.$$

Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems:

Wegen der Analogie reicht es, nur den Fall Elektrostatik zu behandeln.

Beweis:

Annahme: es existieren zwei Lösungen: V' und V''.

Die Differenz der beiden: $V = V' - V''$ erfüllt das

Randwertproblem $-div(\varepsilon grad V) = 0 \text{ in } \Omega,$

$$V = 0 \text{ auf } \Gamma_D, \ \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma_N .$$

Identität (1. Greenscher Satz):

$$div(V \varepsilon grad V) = \varepsilon \left| grad V \right|^2 + V div(\varepsilon grad V).$$

Integration über ein Volumen Ω mit dem Rand Γ:

$$\int_\Omega \varepsilon \left| gradV \right|^2 d\Omega = -\int_\Omega V div(\varepsilon gradV) d\Omega + \oint_\Gamma V \varepsilon gradV \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$

Wegen des Randwertproblems für V ist die rechte Seite Null $(\varepsilon gradV \cdot \mathbf{n} = \varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial n})$.

Daraus folgt $gradV = \mathbf{0} \Rightarrow V = \text{konstant}$ in Ω.

Da aber $V = 0$ auf Γ_D, $V = 0$ in $\Omega \Rightarrow V' = V''$.

q. e. d.

2.2 Analytische Lösungsmethoden der Laplaceschen Gleichung

Laplacesche Gleichung: $divgradV = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$

$$(divgrad\,\psi = 0).$$

elektrostatisches Feld: $\rho = 0,\ \varepsilon =$ konstant $(= \varepsilon_0)$,

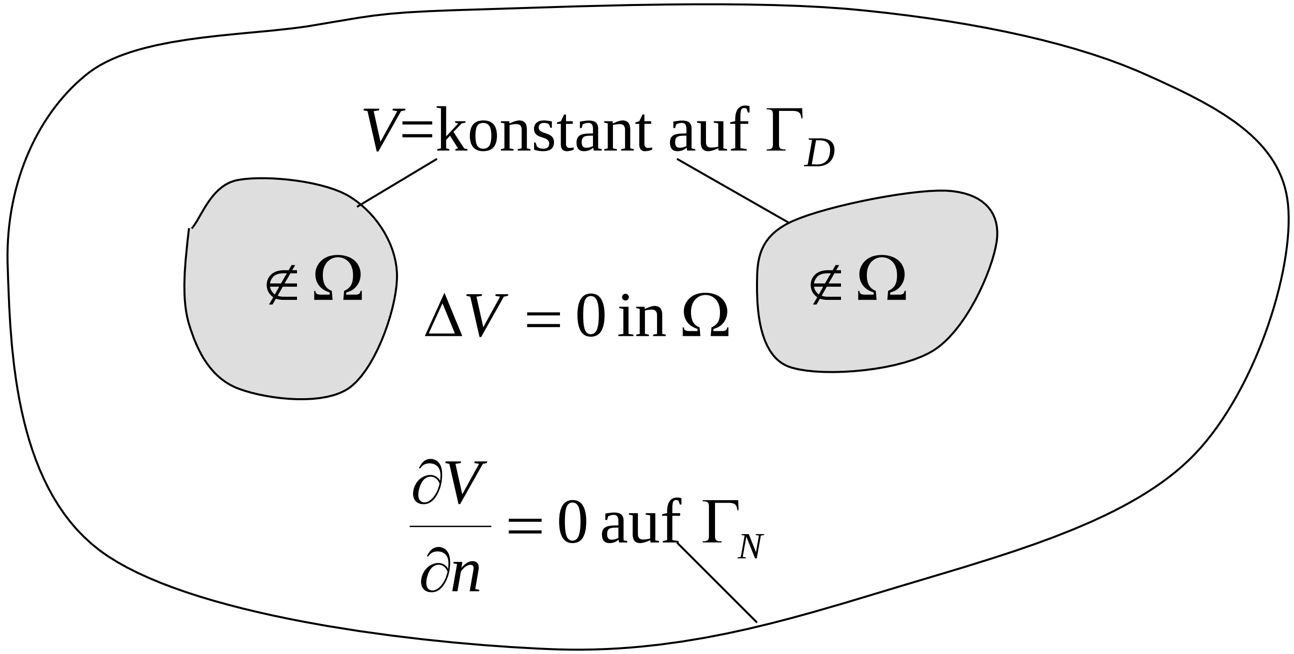
stationäres Magnetfeld: $\mathbf{J} = \mathbf{0},\ \mu =$ konstant $(= \mu_0)$,

stationäres Strömungsfeld: $\gamma =$ konstant.

$\Delta V = 0 \Rightarrow V$ ist eine harmonische Funktion.

Es gibt unendlich viele harmonische Funktionen!

Dirichletsche oder Neumannsche Randbedingungen :



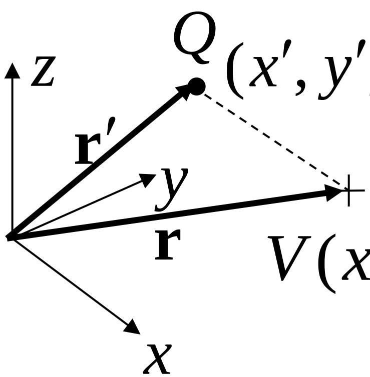
Analytische Methoden:

Bereitstellung von harmonischen Funktionen und Auswahl derjenigen, welche die Randbedingungen erfüllt.

Dies ergibt die richtige Lösung, da sie eindeutig ist.

2.2.1 Methode der fiktiven Ladungen (Spiegelungsprinzip)

Die Potentialfunktion einer Punktladung ist in allen Punkten des Raumes, bis auf die Stelle der Ladung, harmonisch.



$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \ \mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z$$

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(x-x'\right)\left[\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(x-x'\right)\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-3} - 3\left(x-x'\right)^2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-5}\right]$$

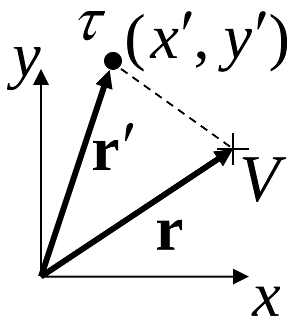
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} - 3\frac{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^5}\right] =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}3\left[\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} - \frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^2}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^5}\right] = 0, \text{ wenn } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'.$$

q. e. d.

In zwei Dimensionen (ebene Probleme, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$),

ist die Potentialfunktion einer unendlich langen Linienladung harmonisch.



$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y, \;\; \mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y$$

$$V(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$V(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \left\{ \ln r_0 - \frac{1}{2} \ln\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right] \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x - x'}{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 - 2(x - x')^2}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right]^2} =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(x - x')^2 - (y - y')^2}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right]^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(x - x')^2 - (y - y')^2 + (y - y')^2 - (x - x')^2}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2\right]^2} = 0$$

q. e. d.

Wegen der Linearität der Laplaceschen Gleichung wird sie durch die Potentialfunktion einer *beliebigen Ladungsverteilung* erfüllt (in ladungsfreien Gebieten).

Erfüllung der Randbedingungen: eine fiktive Ladungsverteilung innerhalb der Elektroden soll Äquipotentialflächen haben, welche mit den Elektroden übereinstimmen.

Beispiele:

- *Eine Punktladung:* konzentrische Kugeloberflächen (Kugelkondensator)
- *Eine unendlich lange Linienladung:* konzentrische Zylinderoberflächen (Zylinderkondensator)
- *Liniendipol:* nichtkonzentrische Zylinderoberflächen
- *Spiegelung an Ebene:* unendlich ausgedehnte leitende Ebene
- *Mehrfache Spiegelung an Ebenen:* abgewinkelte Elektroden ($\alpha = 180 / n$)

2.2.2 Trennung der Variablen (Separationsmethode)

<u>Laplace Operator im allgemeinen, orthogonalen Koordinatensystem:</u>

$$\Delta u = div(grad u)$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\right]$$

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\Delta u(r, \phi, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\Delta u(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

Separationsmethode:

Ansatz: $V(x_1, x_2, x_3) = X_1(x_1) X_2(x_2) X_3(x_3)$

Es wird versucht die Laplacesche Gleichung (eine partielle Differentialgleichung) für V auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen für jeweils X_1, X_2 und X_3 zurückzuführen. Aus den allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen erhält man spezielle Lösungen der Laplaceschen Gleichung mit Hilfe des obigen Ansatzes. Wegen der Linearität der Laplaceschen Gleichung wird sie durch eine beliebige Linearkombination dieser Lösungen erfüllt. Die Lösung eines konkreten Randwertproblems ist diejenige Linearkombination, welche die Randbedingungen des Problems erfüllt. Dies ist dann möglich, wenn die Randbedingungen entlang x_i = konstant Oberflächen gegeben sind.

Kartesische Koordinaten, 2D Fall:

Ansatz: $V(x,y) = X(x)Y(y)$

Laplacesche Gleichung: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$

$$Y(y)\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0$$

Division durch $X(x)Y(y)$ ergibt:

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}_{g(y)} = 0$$

Dies ist nur dann möglich, wenn

$f(x) = \text{konstant},\ g(y) = \text{konstant}.$

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen sind dann:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = fX(x), \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = gY(y),$$

wobei $g = -f$.

$$f = -p^2,\ g = p^2: \quad X(x) = C_1 \cos px + C_2 \sin px$$

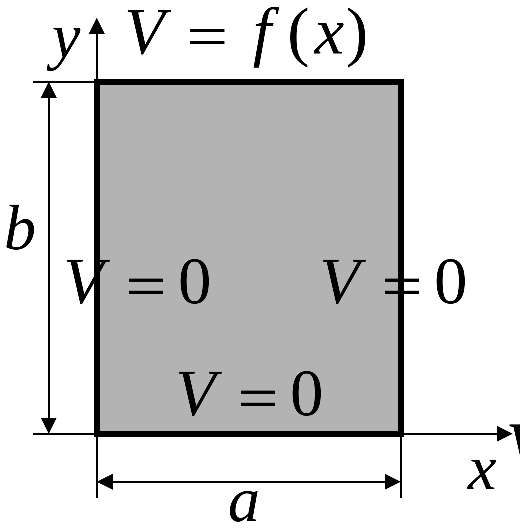
$$Y(y) = C_3 e^{py} + C_4 e^{-py} = C_3' \cosh py + C_4' \sinh py$$

Eine Lösung: $\boxed{V = \sum_n A_n^{\pm} e^{\pm p_n y} \cos p_n x + B_n^{\pm} e^{\pm p_n y} \sin p_n x}$

Eine weitere Lösung erhält man durch das Vertauschen von *x* und *y*:

$$\boxed{V = \sum_n A_n^{\pm} e^{\pm p_n x} \cos p_n y + B_n^{\pm} e^{\pm p_n x} \sin p_n y}$$

Beispiel:



Randbedingungen:

$$\begin{array}{lll} (1) & y=b, \quad V = f(x); & \\ (2) & y=0, \quad V=0; & \Rightarrow \sinh p_n y, \\ (3) & x=0, \quad V=0; & \multirow{2}{*}{$\Big\}\Rightarrow$} \sin p_n x,\ p_n = n\pi/a, \\ (4) & x=a, \quad V=0. & \qquad n=1,2,\ldots . \end{array}$$

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right):$$

(2), (3), (4) erfüllt.

Fourier-Reihe von $f(x)$: $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$

$$V(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \Rightarrow B_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = b_n$$

$$\boxed{V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).}$$

Zylinderkoordinaten, 2D Fall:

Ansatz: $V(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$

Laplacesche Gleichung: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0.$

$$\Phi(\phi)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + R(r)\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = 0.$$

Multiplikation mit r^2 und Division durch $R(r)\Phi(\phi)$ ergibt:

$$\underbrace{\frac{1}{R(r)}r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)}_{f(r)} + \underbrace{\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}}_{g(\phi)} = 0.$$

Dies ist nur dann möglich, wenn

$f(r) = \text{konstant},\ g(\phi) = \text{konstant}.$

Die gewöhnlichen Differentialgleichungen sind dann:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) = fR(r), \quad \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = g\Phi(\phi),$$

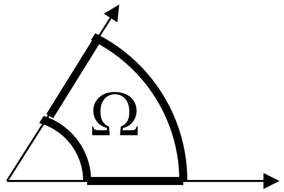
wobei $g = -f$.

Da $\Phi(\phi)$ mit 2π periodisch sein muss, ist nur $g = -n^2$ (n: ganze Zahl)

möglich: $\Phi(\phi) = C_3 \cos n\phi + C_4 \sin n\phi \; (n > 0)$.

Der Fall $n = 0$ ergibt $\Phi(\phi) = C_3 + C_4\phi$.

Dies ist nur dann periodisch, wenn $C_4 = 0$. Der Fall $C_4 \neq 0$,
ist dann sinnvoll, wenn im Problemgebiet $0 \leq \phi \leq \phi_{\max}$
$\phi_{\max} < 2\pi$ gilt.



$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)=n^2R(r).$$

a) $n=0$: $\quad r\frac{dR(r)}{dr}=C_1,\ \ R(r)=C_1\ln r+C_2.$

b) $n>0$: $\quad$ Ansatz: $R(r)=r^\alpha,$

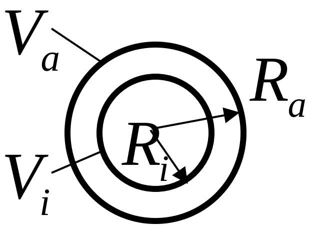
$$\frac{dR(r)}{dr}=\alpha r^{\alpha-1},\quad r\frac{dR(r)}{dr}=\alpha r^\alpha,\quad \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)=\alpha^2 r^{\alpha-1},$$

$$\alpha^2 r^\alpha=n^2 r^\alpha \Rightarrow \alpha=\pm n: \qquad R(r)=C_1r^n+C_2r^{-n}$$

Lösung:

$$\boxed{V=\left(C_1\ln r+C_2\right)\left(C_3+C_4\phi\right)+\sum_n\left(A_n^\pm r^{\pm n}\cos n\phi+B_n^\pm r^{\pm n}\sin n\phi\right)}$$

Beispiel: Zylinderkondensator



Rotationssymmetrie: $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow V = C_1 \ln r + C_2.$

Randbedingungen: $V_i = C_1 \ln R_i + C_2,$

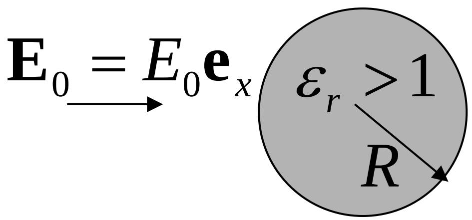
$$V_a = C_1 \ln R_a + C_2.$$

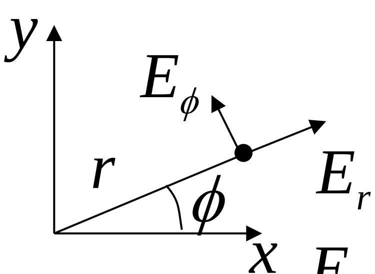
$$C_1 = \frac{V_a - V_i}{\ln R_a / R_i}, \, C_2 = \frac{V_i \ln R_a - V_a \ln R_i}{\ln R_a / R_i}.$$

$$V = \frac{V_a \ln r / R_i - V_i \ln r / R_a}{\ln R_a / R_i}.$$

Die gleiche Lösung erhält man mit Hilfe der Methode der fiktiven Ladungen.

Beispiel: Dielektrischer Zylinder im homogenen Feld





Homogenes Feld: $V = -E_0 r \cos\phi.$

Beweis:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_0 \cos\phi, \quad E_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} = -E_0 \sin\phi.$$

$$E_x = E_r \cos\phi - E_\phi \sin\phi = E_0 \cos^2\phi + E_0 \sin^2\phi = E_0,$$

$$E_y = E_r \sin\phi + E_\phi \cos\phi = E_0 \cos\phi \sin\phi - E_0 \sin\phi \cos\phi = 0.$$

q. e. d.

$$V(r,\phi) = \begin{cases} V_i(r,\phi), \text{ wenn } r < R, \\ V_a(r,\phi), \text{ wenn } r > R. \end{cases}$$

Rand-
bedingungen:

$$\lim_{r\to 0} V_i(r,\phi) < \infty \Rightarrow V_i = \sum_{n\geq 1}\left(A_{in} r^n \cos n\phi + B_{in} r^n \sin n\phi\right),$$

$$\lim_{r\to\infty} V_a(r,\phi) = -E_0 r \cos\phi \Rightarrow$$

$$V_a = -E_0 r \cos\phi + \sum_{n\geq 1}\left(A_{an} r^{-n} \cos n\phi + B_{an} r^{-n} \sin n\phi\right).$$

Rand- und Grenzflächenbedingungen:

$$E_{\phi i}(r=R)=E_{\phi a}(r=R)\Rightarrow V_i(R,\phi)=V_a(R,\phi)\Rightarrow$$

$$A_{i1}R=-E_0R+A_{a1}R^{-1},\ A_{in}R^n=A_{an}R^{-n}\ (n>1),\ B_{in}R^n=B_{an}R^{-n}$$

$$D_{ri}(r=R)=D_{ra}(r=R)\Rightarrow \varepsilon_r\frac{\partial V_i(R,\phi)}{\partial r}=\frac{\partial V_a(R,\phi)}{\partial r}\Rightarrow$$

$$\varepsilon_r A_{i1}=-E_0-A_{a1}R^{-2},\ \varepsilon_r A_{in}nR^{n-1}=-A_{an}nR^{-n-1}\ (n>1),$$

$$\varepsilon_r B_{in}nR^{n-1}=-B_{an}nR^{-n-1}.$$

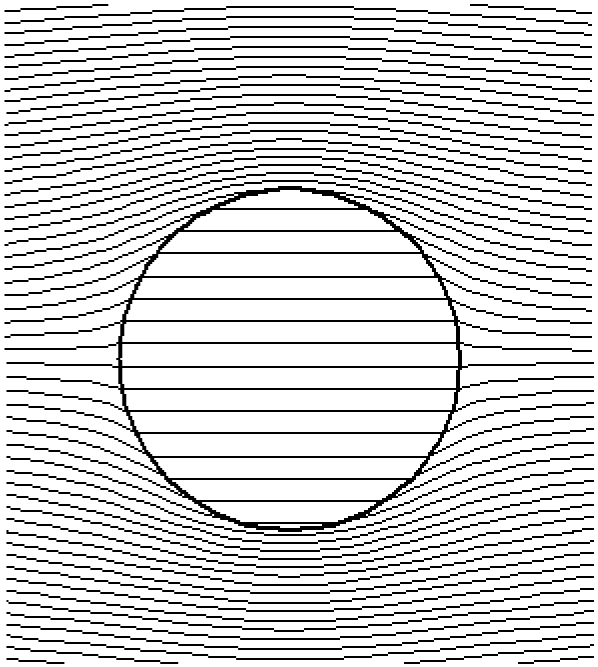
Lösung: $$A_{i1}=\frac{-2}{\varepsilon_r+1}E_0,\ A_{a1}=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}E_0R^2,$$

$$A_{in}=A_{an}=0\quad(n>1),\ \ B_{in}=B_{an}=0.$$

$$V_i(r,\phi) = \frac{-2E_0}{\varepsilon_r + 1} r\cos\phi,$$

$$V_a(r,\phi) = -E_0 r\cos\phi + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} E_0 \frac{R^2}{r}\cos\phi.$$

Das Feld innerhalb des Zylinders ist homogen.

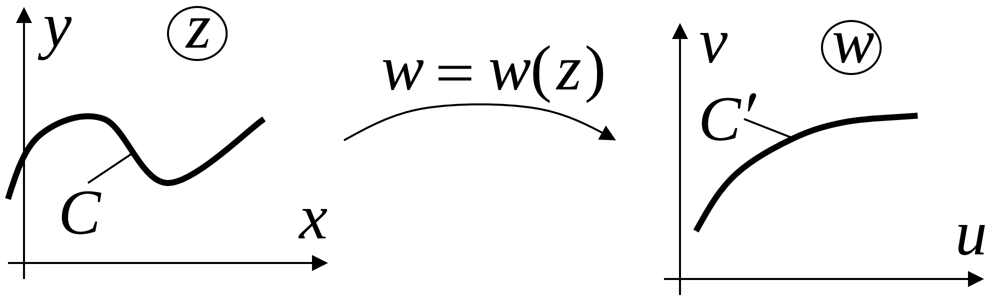


2.2.3 Konforme Abbildung

Betrachten wir eine beliebige, reguläre, komplexe Funktion:

$$w(z) = u(x, y) + jv(x, y), \quad z = x + jy.$$

Sie stellt eine Abbildung der x-y Ebene in die u-v Ebene dar:



Die Abbildung ist konform: im Kleinen winkeltreu.

Reguläre komplexe Funktionen haben die Eigenschaft

$$w'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{w(z+\Delta x) - w(z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{w(z+j\Delta y) - w(z)}{j\Delta y},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + j\,\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{j\Delta y} + j\,\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{j\Delta y} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j\,\frac{\partial v}{\partial x} = -j\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

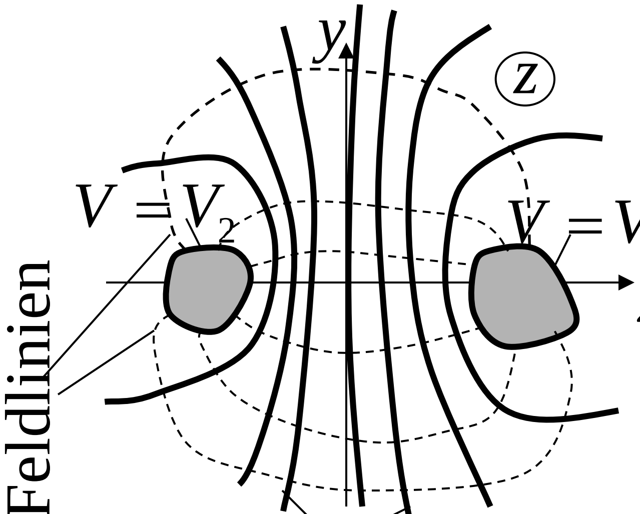
Cauchy-Riemann Gleichungen: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

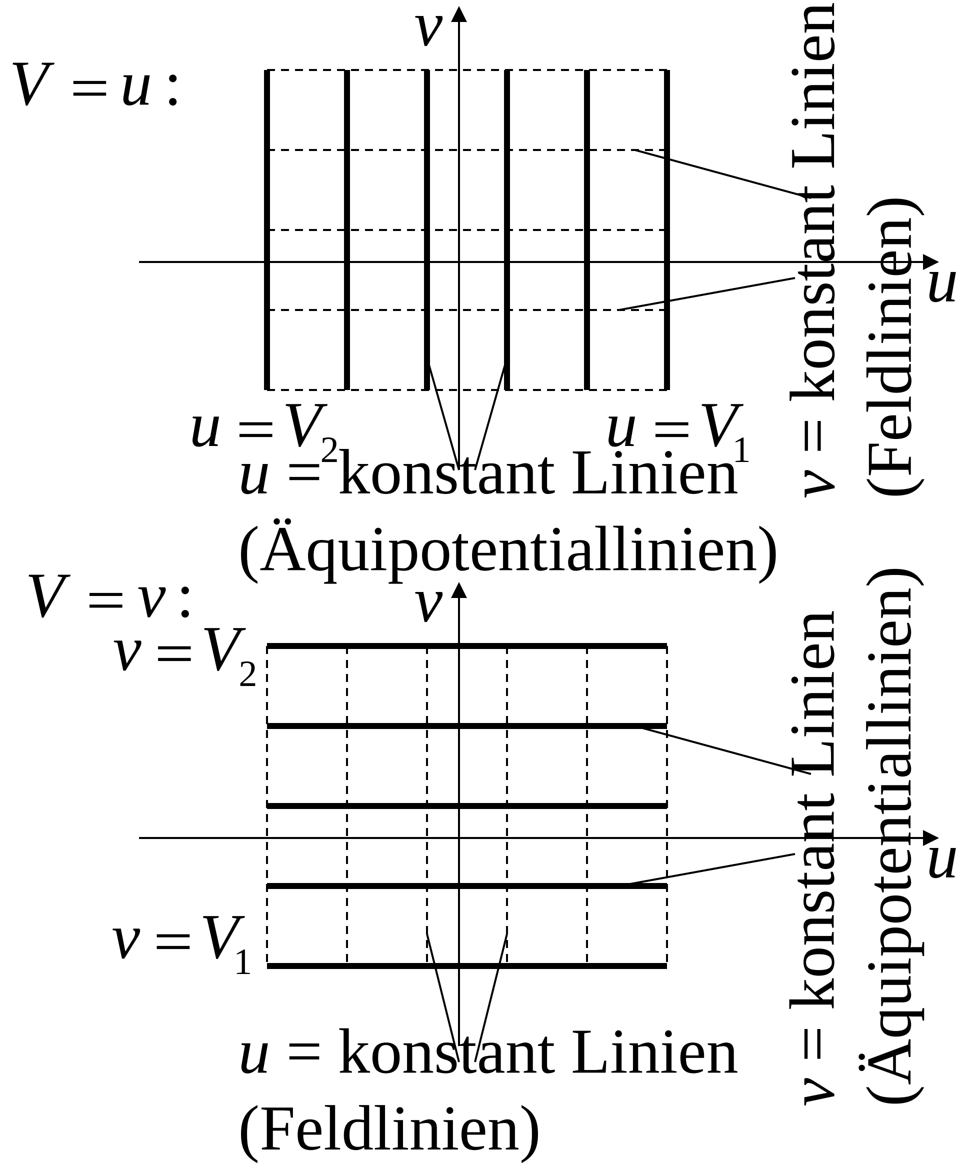
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.}$$

Sowohl der Realteil, als auch der Imaginärteil einer regulären komplexen Funktion sind Lösungen der zweidimensionalen Laplaceschen Gleichung.

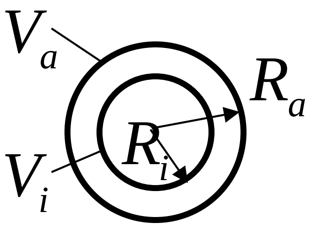
Der Real- oder Imaginärteil einer regulären, komplexen Funktion ist die Lösung eines Problems, wenn er entlang der Elektroden konstant ist.





Allgemein: $C_1 w(z) + C_2$.

Beispiel: Zylinderkondensator



$$w(z) = \ln z = \ln re^{j\phi} = \ln r + j\phi,$$

$$u = \ln r = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \phi = \arctan\frac{y}{x}.$$

$$u = \text{konstant} \Rightarrow r = \text{konstant} : \text{Kreise.}$$

Die Randbedingungen können erfüllt werden, wenn

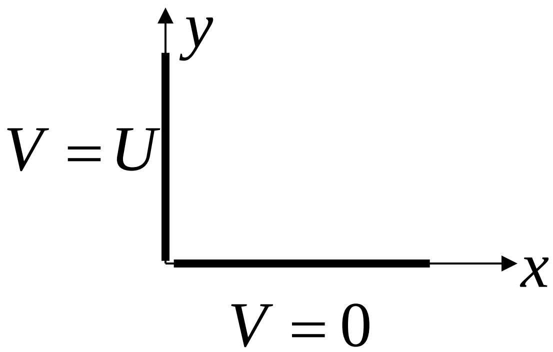
$$w(z) = C_1 \ln z + C_2.$$

$V = u = C_1 \ln r + C_2.$ Aus den Randbedingungen:

$$V = \frac{V_a \ln r/R_i - V_i \ln r/R_a}{\ln R_a/R_i}.$$

Die gleiche Lösung erhält man mit Hilfe der Methode der fiktiven Ladungen oder mit der Separationsmethode.

Beispiel: Zwei aufeinander normal stehende Ebenen



$$w(z) = \ln z = \ln r e^{j\phi} = \ln r + j\phi,$$

$$u = \ln r = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \phi = \arctan\frac{y}{x}.$$

$v = \text{konstant} \Rightarrow \phi = \text{konstant}$: radiale Linien.

Die Randbedingungen können erfüllt werden, wenn

$$w(z) = C_1 \ln z + C_2.$$

$$V = v = C_1\phi + C_2.$$

Aus den Randbedingungen: $V = \dfrac{2U}{\pi}\phi = \dfrac{2U}{\pi}\arctan\dfrac{y}{x}.$

2.3 Numerische Lösungsmethoden der Randwertprobleme für das Skalarpotential

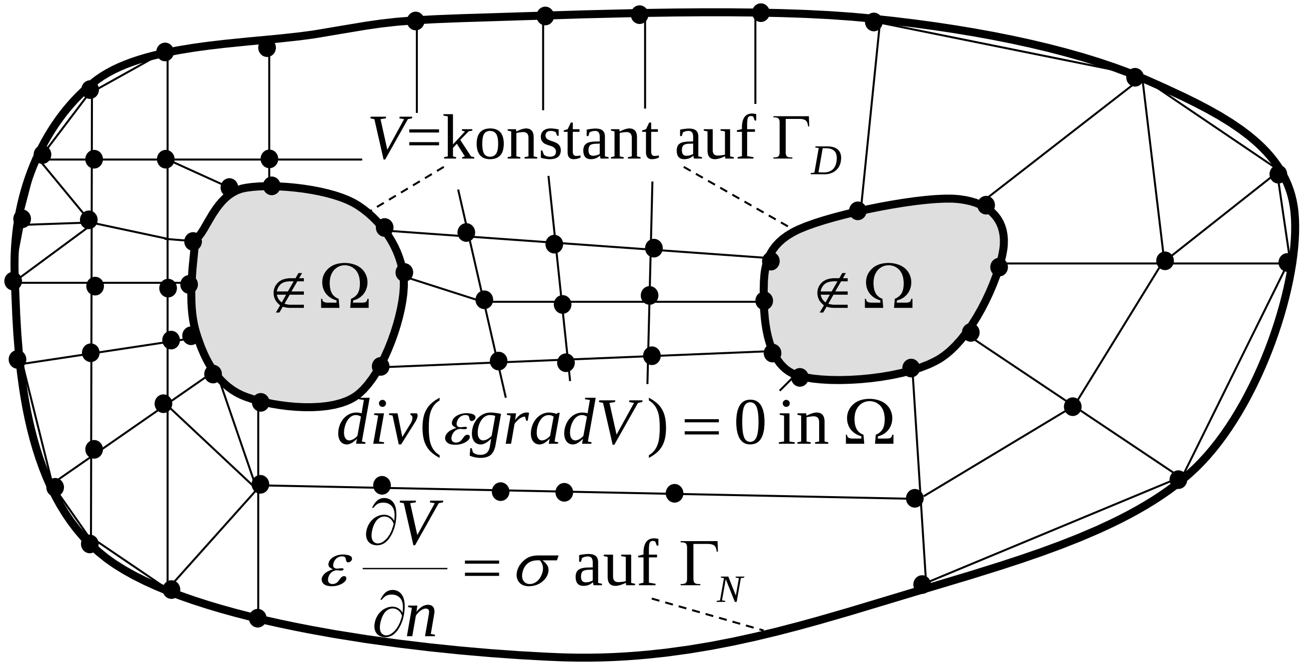
Nachteile der analytischen Methoden:

- Spezielle Geometrie
- Homogene Materialien

Numerische Methoden:

- Diskretisierung der Geometrie
- Berücksichtigung von inhomogenen Materialien

Diskretisierung der Geometrie :



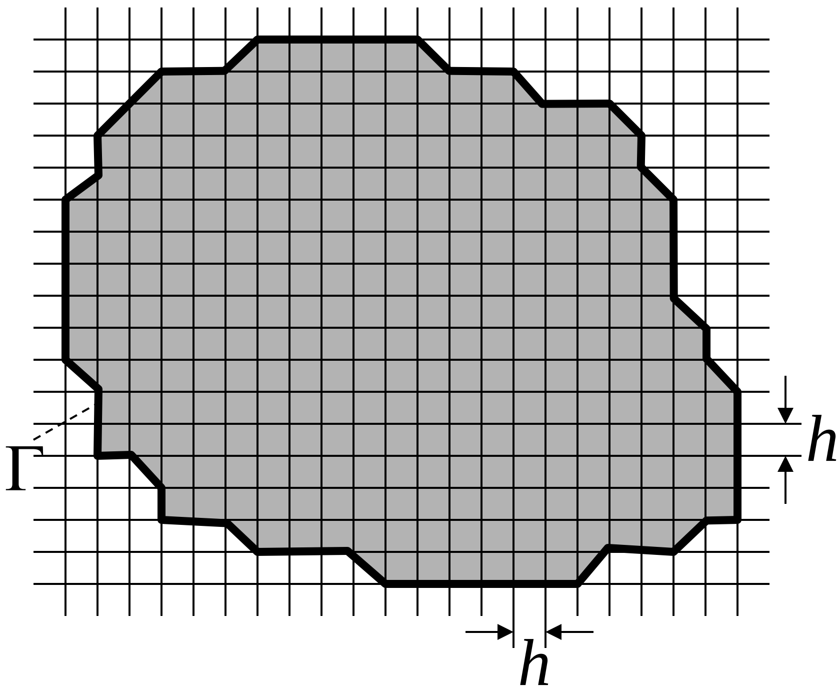
Numerische Methoden:

Potential wird in diskreten Knoten näherungsweise bestimmt. Das Feld wird durch numerische Differentiation berechnet. Dirichletsche Randbedingungen werden exakt in Knoten erfüllt, Neumannsche Randbedingungen können nur näherungsweise erfüllt werden.

2.3.1 Methode der finiten Differenzen

Nur zweidimensionale, ebene Probleme werden behandelt, Verallgemeinerung auf 3D Probleme leicht möglich.

Homogene Materialien werden angenommen: Laplacesche Gleichung. Verallgemeinerung auf stückweise homogene Materialien möglich.



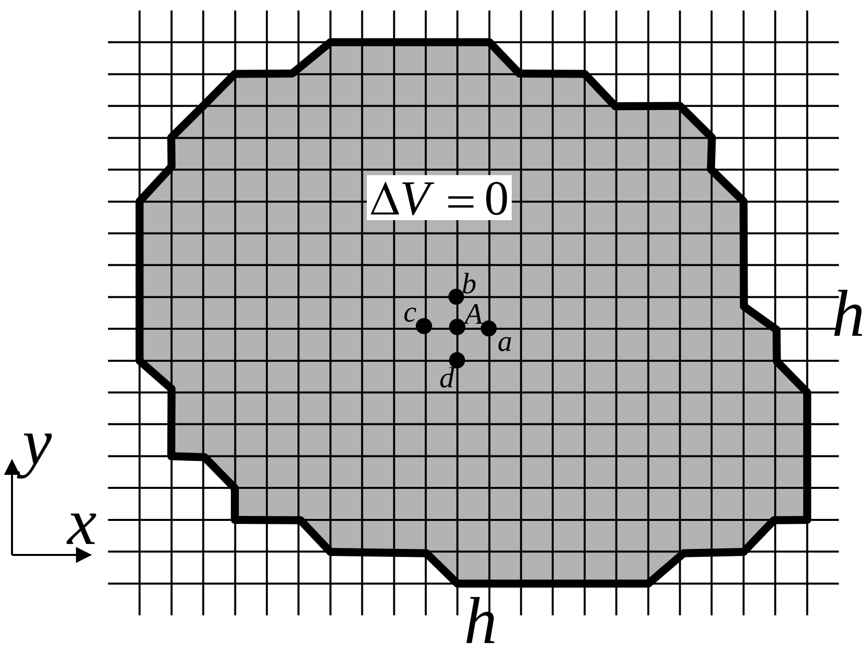
Äquidistantes Gitter, Verallgemeinerung auf nichtäquidistantes Gitter möglich.

$$V_a = V_A + \frac{1}{1!}\frac{\partial V}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}h^4 + \ldots$$

$$V_b = V_A + \frac{1}{1!}\frac{\partial V}{\partial y}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}h^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}h^4 + \ldots$$

$$V_c = V_A - \frac{1}{1!}\frac{\partial V}{\partial x}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}h^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}h^4 \pm \ldots$$

$$+ \quad V_d = V_A - \frac{1}{1!}\frac{\partial V}{\partial y}h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}h^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}h^3 + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 V}{\partial y^4}h^4 \pm \ldots$$



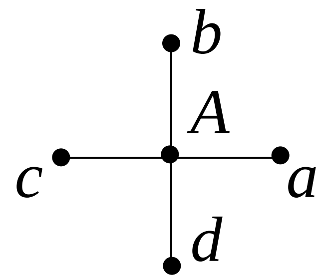
$$\boxed{V_a + V_b + V_c + V_d = 4V_A} +$$

$$+ h^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)}_{=0} + \underbrace{O(h^4)}_{\approx 0}$$

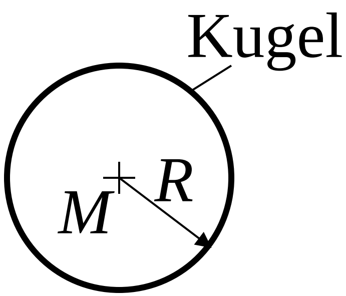
$$\boxed{4V_A - V_a - V_b - V_c - V_d = 0}$$

Die Gleichung $4V_A - V_a - V_b - V_c - V_d = 0$, d.h.

$$V_A = \frac{1}{4}\left(V_a + V_b + V_c + V_d\right)$$



entspricht der Näherung des Mittelwertsatzes der Potentialtheorie (siehe 2.4.1):

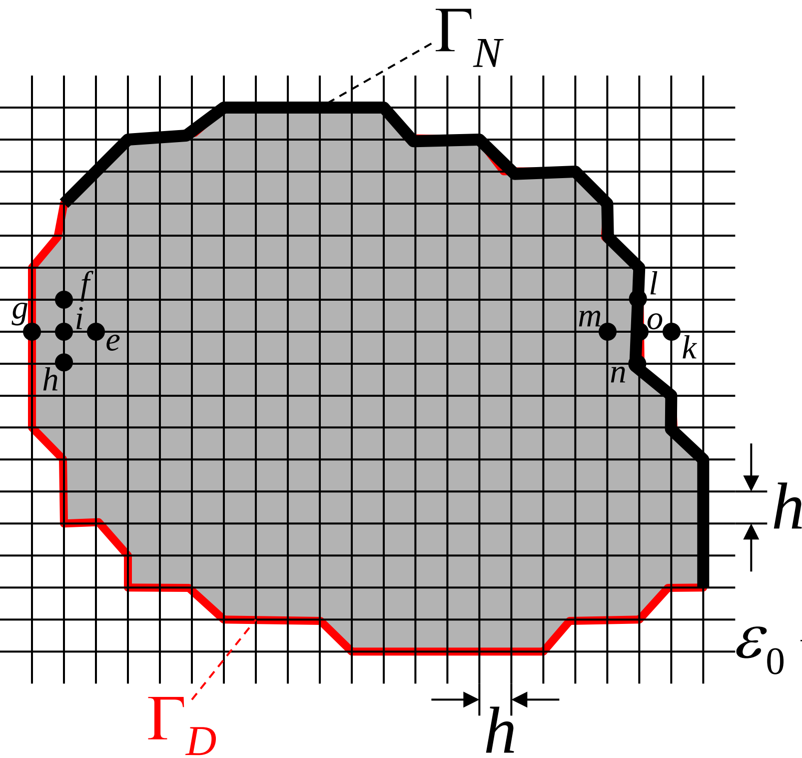


$$V(M) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint\limits_{Kugel} V d\Gamma$$

Berücksichtigung der Randbedingungen:

Dirichletsche Randbedingung auf Γ_D: $V_g = V_0$ (bekannt).

$$4V_i - V_e - V_f - V_g - V_h = 0 \Rightarrow \boxed{4V_i - V_e - V_f - V_h = V_0}$$



Neumannsche Randbedingung auf Γ_N:

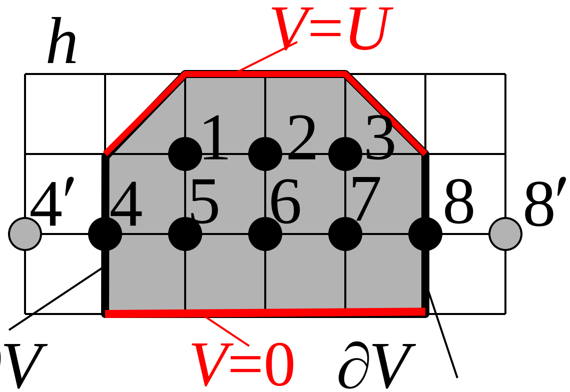
$$\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = \sigma \text{ im Punkt } o.$$

k: fiktiver Gitterpunkt außerhalb von Ω

$$\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}(o) \approx \varepsilon_0 \frac{V_k - V_m}{2h} = \sigma \;\Rightarrow V_k = V_m + \frac{2h\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$4V_o - V_k - V_l - V_m - V_n = 0 \Rightarrow \boxed{4V_o - V_l - 2V_m - V_n = \frac{2h\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Beispiel:



$$\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = \sigma_1 \qquad \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = \sigma_2$$

$$\varepsilon_0 \frac{V_{4'} - V_5}{2h} = \sigma_1$$

$$\Downarrow$$

$$V_{4'} = V_5 + \frac{2h\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 \frac{V_{8'} - V_7}{2h} = \sigma_2$$

$$\Downarrow$$

$$V_{8'} = V_7 + \frac{2h\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

Knoten 1: $4V_1 - V_2 - V_5 = 2U$

Knoten 2: $-V_1 + 4V_2 - V_3 - V_6 = U$

Knoten 3: $-V_2 + 4V_3 - V_7 = 2U$

Knoten 4: $-V_{4'} + 4V_4 - V_5 = U$

$$4V_4 - 2V_5 = U + \frac{2h\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

Knoten 5: $-V_1 - V_4 + 4V_5 - V_6 = 0$

Knoten 6: $-V_2 - V_5 + 4V_6 - V_7 = 0$

Knoten 7: $-V_3 - V_6 + 4V_7 - V_8 = 0$

Knoten 8: $-V_7 + 4V_8 - V_{8'} = U$

$$-2V_7 + 4V_8 = U + \frac{2h\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2U \\ U \\ 2U \\ U + 2h\sigma_1 / \varepsilon_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U + 2h\sigma_2 / \varepsilon_0 \end{Bmatrix}$$

Spärlich besetzte Matrix.

2.3.2 Variationsproblem der Elektrostatik

Das Randwertproblem des elektrostatischen Feldes

$$-div(\varepsilon grad V) = \rho \text{ in } \Omega,$$

$$V = V_0 \text{ auf } \Gamma_D, \ \varepsilon\frac{\partial V}{\partial n} = \sigma \text{ auf } \Gamma_N$$

ist folgendem Variationsproblem äquivalent:

Finde V (V=V_0 auf Γ_D), so dass das Funktional

$$W(V) = \int_{\Omega}\frac{1}{2}\varepsilon grad^2 V d\Omega - \int_{\Omega}\rho V d\Omega - \int_{\Gamma_N}\sigma V d\Gamma$$

zum Minimum wird.

Physikalische Bedeutung des Funktionals

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon grad^2 V d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\Omega :$$ Elektrische Feldenergie W_e

$$\int_{\Omega} \rho V d\Omega + \int_{\Gamma_N} \sigma V d\Gamma :$$ Potentielle Energie der Ladungen W_p

$W = W_e - W_p$ ist die Wirkung!

Das Variationsproblem entspricht dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

2.3.3 Das Ritzsche Verfahren

Da das Variationsproblem und das Randwertproblem äquivalent sind, ist eine Näherungslösung des Variationsproblems ebenfalls eine Näherungslösung des Randwertproblems.

Das Variationsproblem kann mit Hilfe der *Ritzschen Methode* näherungsweise gelöst werden.

Eine Näherungslösung soll in folgender Form gesucht werden:

$$V \approx V^{(n)} = V_D + \sum_{j=1}^{n} V_j w_j ,$$

V_D : beliebige Funktion mit $V_D = V_0$ auf Γ_D,

$V_j,\ j = 1, 2, ..., n$: numerische Parameter,

$w_j,\ j = 1, 2, ..., n$: Basisfunktionen mit

$w_j = 0$ auf Γ_D.

$V^{(n)}$ erfüllt die Dirichletsche Randbedingung für V_j beliebig!

Die unbekannten Parameter V_j, j = 1, 2, ..., n werden aus der Bedingung bestimmt, dass die Näherungslösung das Funktional minimiert. Die notwendigen Bedingungen dafür sind:

$$\frac{\partial W(V^{(n)})}{\partial V_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dies sind n Gleichungen (das Ritzsche Gleichungssystem), aus welchen die n Unbekannten V_j, j = 1, 2, ..., n berechnet werden können.

$$\frac{\partial W(V^{(n)})}{\partial V_i} = \frac{\partial}{\partial V_i}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\varepsilon grad^2 V^{(n)} d\Omega - \frac{\partial}{\partial V_i}\int_{\Omega}\rho V^{(n)} d\Omega - \frac{\partial}{\partial V_i}\int_{\Gamma_N}\sigma V^{(n)} d\Gamma =$$

$$= \int_{\Omega} grad\,\frac{\partial V^{(n)}}{\partial V_i}\cdot \varepsilon grad V^{(n)} d\Omega - \int_{\Omega}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial V_i}\rho d\Omega - \int_{\Gamma_N}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial V_i}\sigma d\Gamma.$$

$$\frac{\partial V^{(n)}}{\partial V_i} = \frac{\partial}{\partial V_i}(V_D + \sum_{j=1}^{n} V_j w_j) = w_i.$$

Das Ritzsche Gleichungssystem:

$$\sum_{j=1}^{n} V_j \int_{\Omega} grad w_i \cdot \varepsilon grad w_j d\Omega = -\int_{\Omega} grad w_i \cdot \varepsilon grad V_D d\Omega + \int_{\Omega} w_i \rho d\Omega + \int_{\Gamma_N} w_i \sigma d\Gamma,$$

Symmetrische Matrix!

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

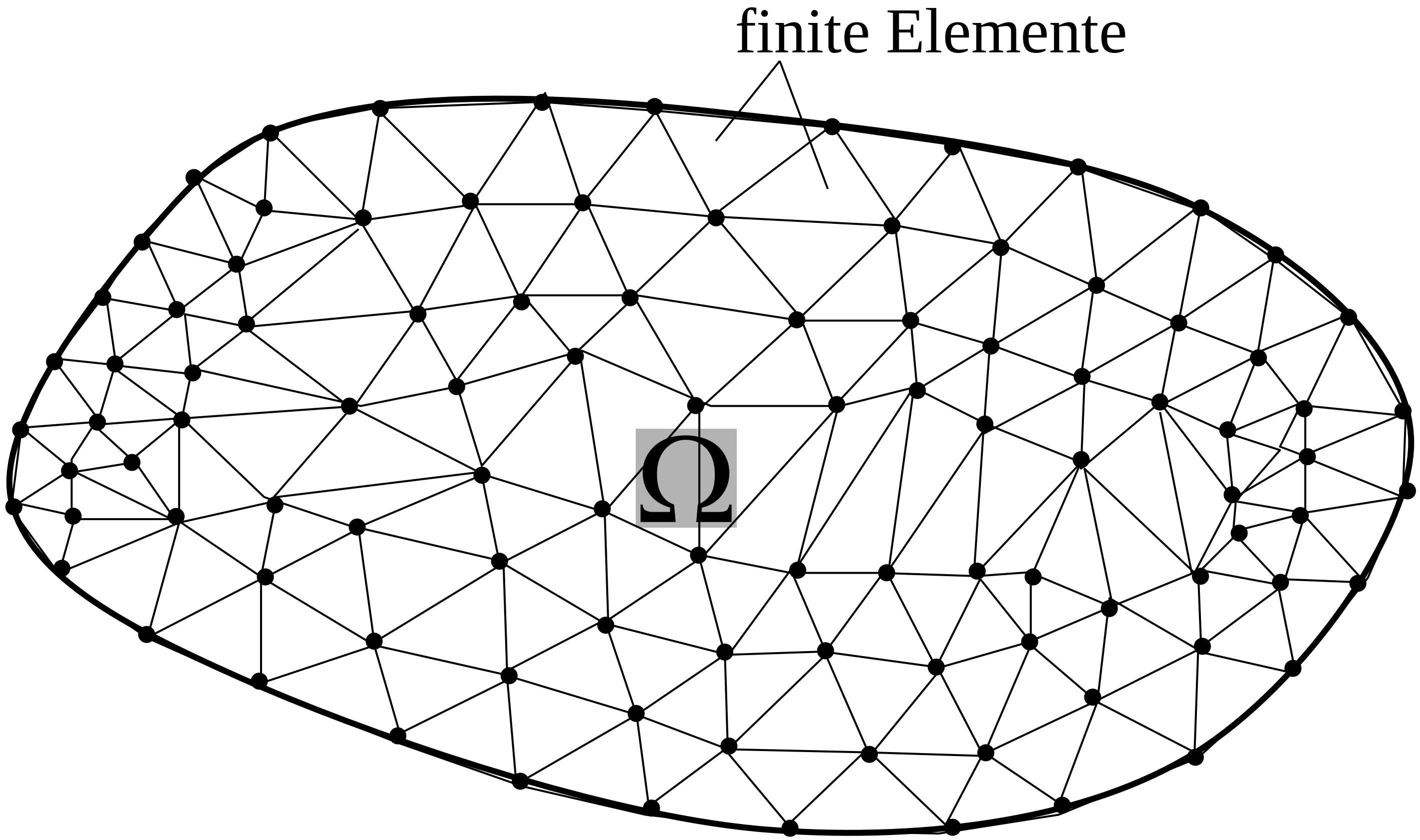
2.3.4 Die Methode der finiten Elemente (Finite Element Method=FEM)

Diskretisierung der Geometrie

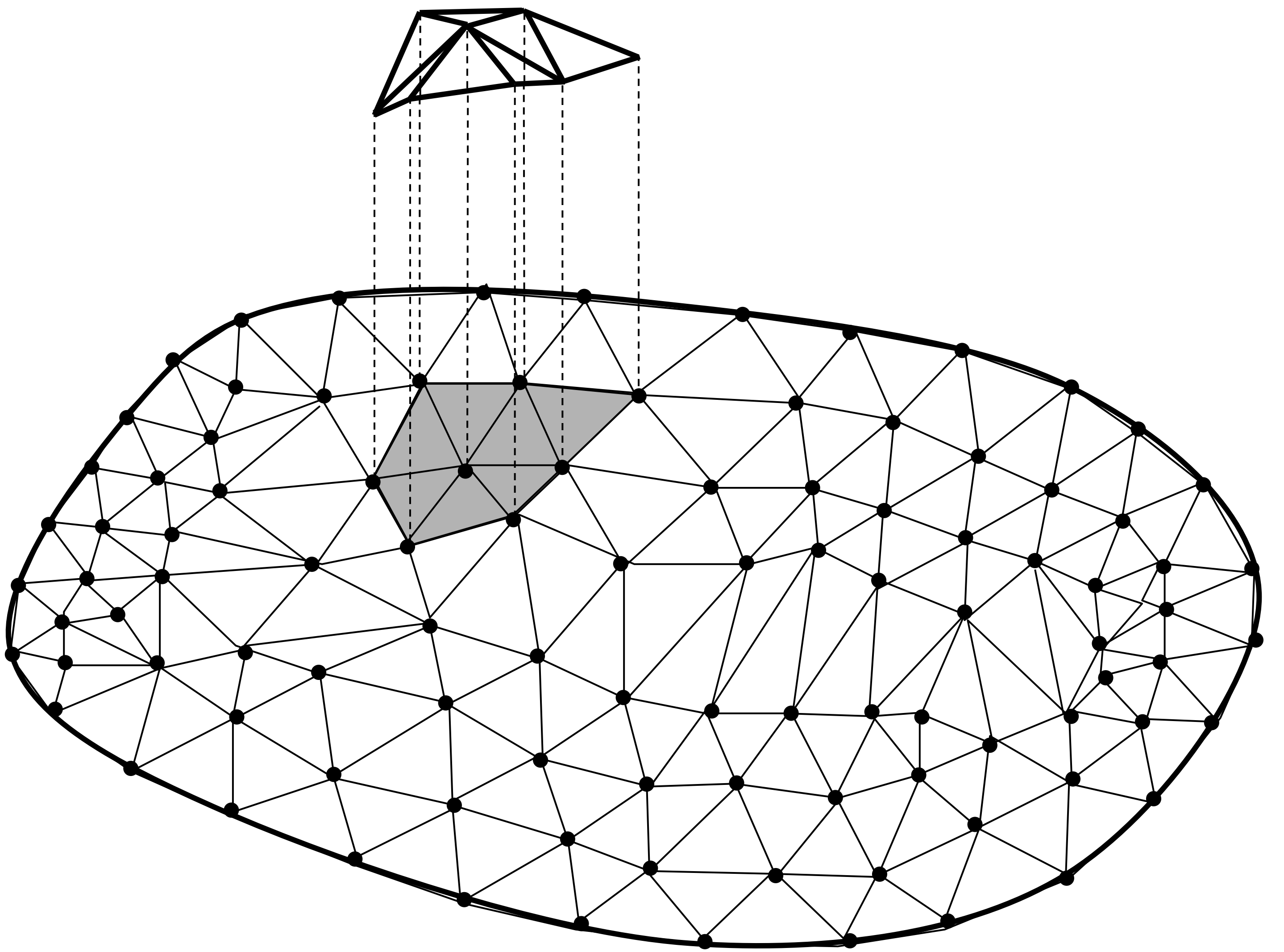
Dreieckselemente: einfachste Möglichkeit

Unbekannte: Potentialwerte in den Knoten

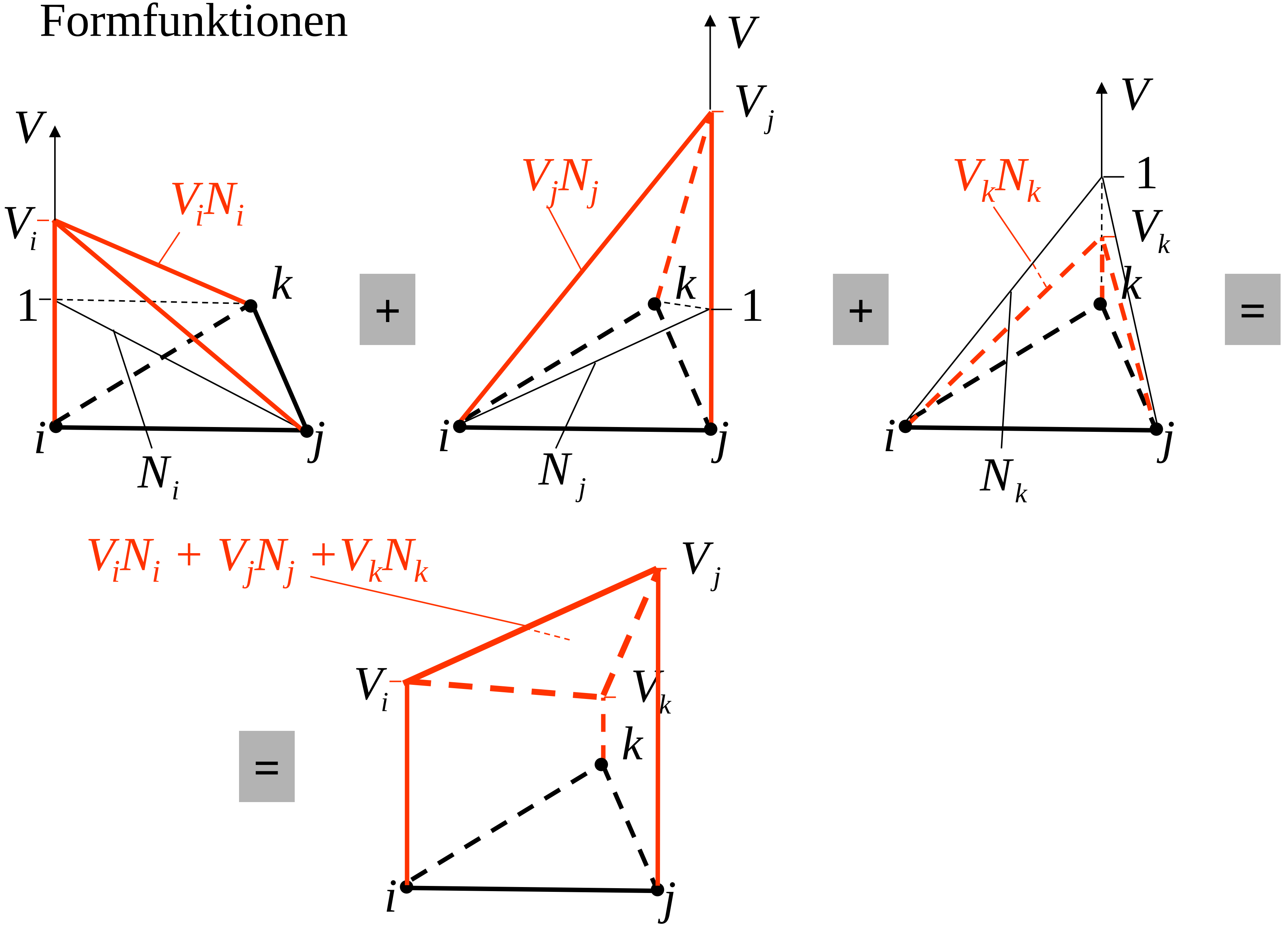
Potential in den Elementen: Polynom niedriger Ordnung

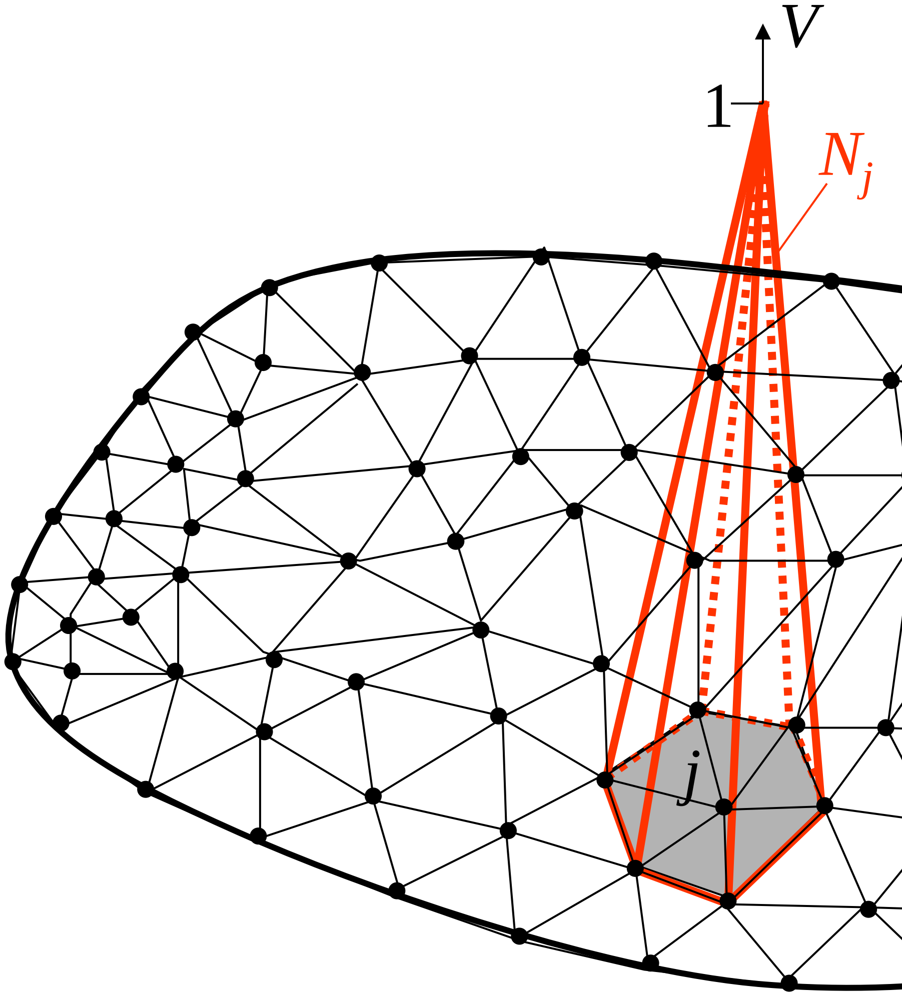


Lineare Interpolation der Potentialfunktion in den Elementen



Formfunktionen





$$N_j = \begin{cases} 1 \text{ im Knoten } j \\ 0 \text{ in allen anderen Knoten} \end{cases}$$

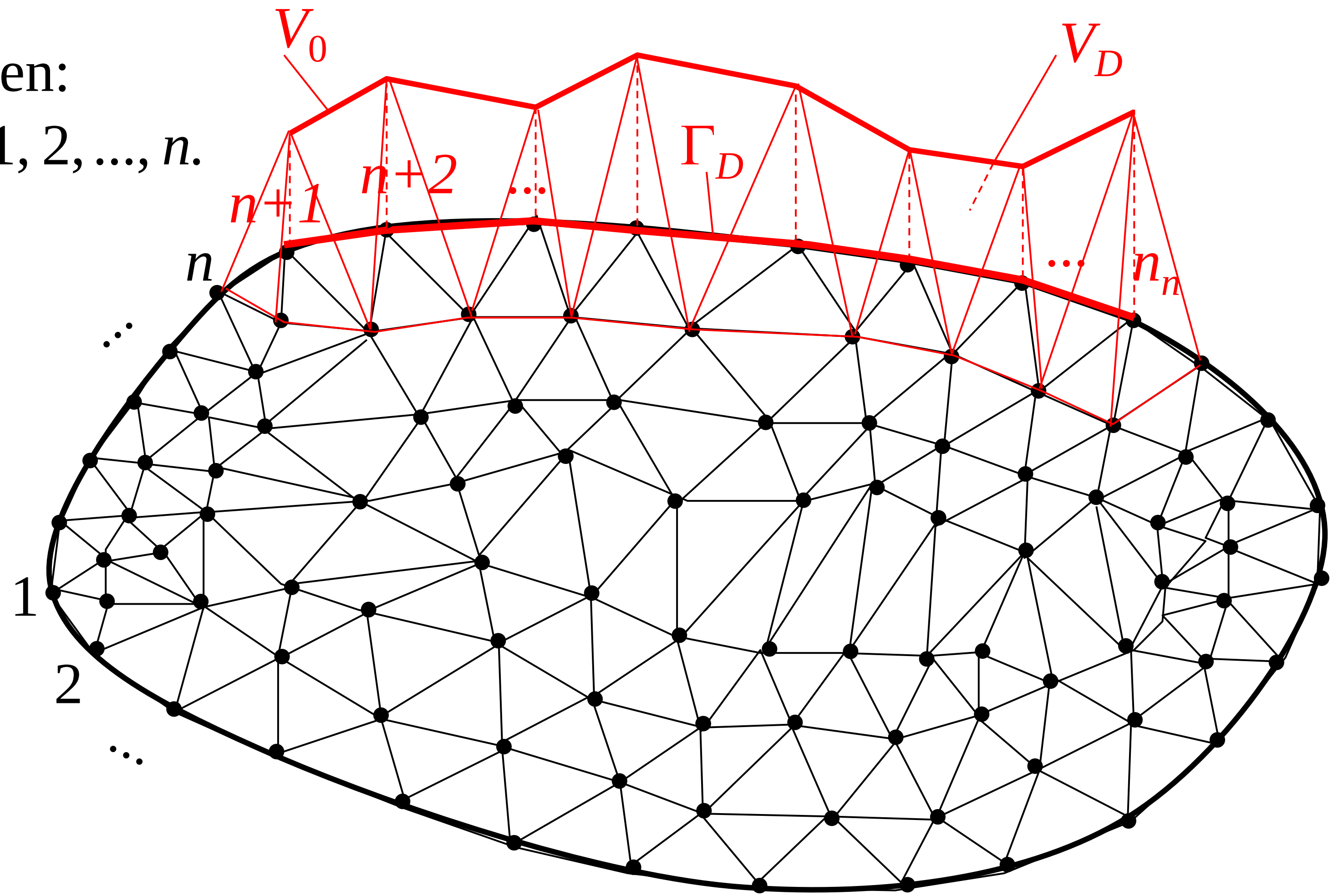
$$V^{(n)} = \sum_{j=1}^{n_n} V_j N_j$$

n_n: Anzahl der Knoten

V_j: Knotenwerte des Potentials

Basisfunktionen:

$$w_j = N_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$



$$V^{(n)} = \sum_{j=1}^{n_n} V_j N_j = \sum_{j=n+1}^{n_n} V_j N_j + \sum_{j=1}^{n} V_j N_j = \boxed{V_D + \sum_{j=1}^{n} V_j N_j}.$$

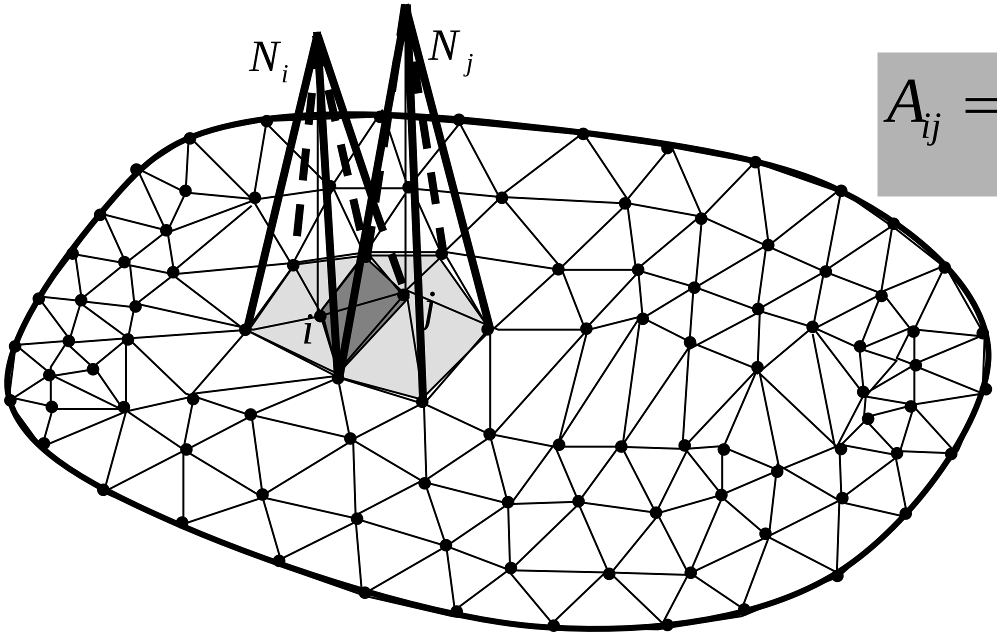
Ritzsche Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^{n} V_j \int_{\Omega} gradN_i \cdot \varepsilon gradN_j d\Omega =$$
$$= -\int_{\Omega} gradN_i \cdot \varepsilon gradV_D d\Omega + \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_i \sigma d\Gamma, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

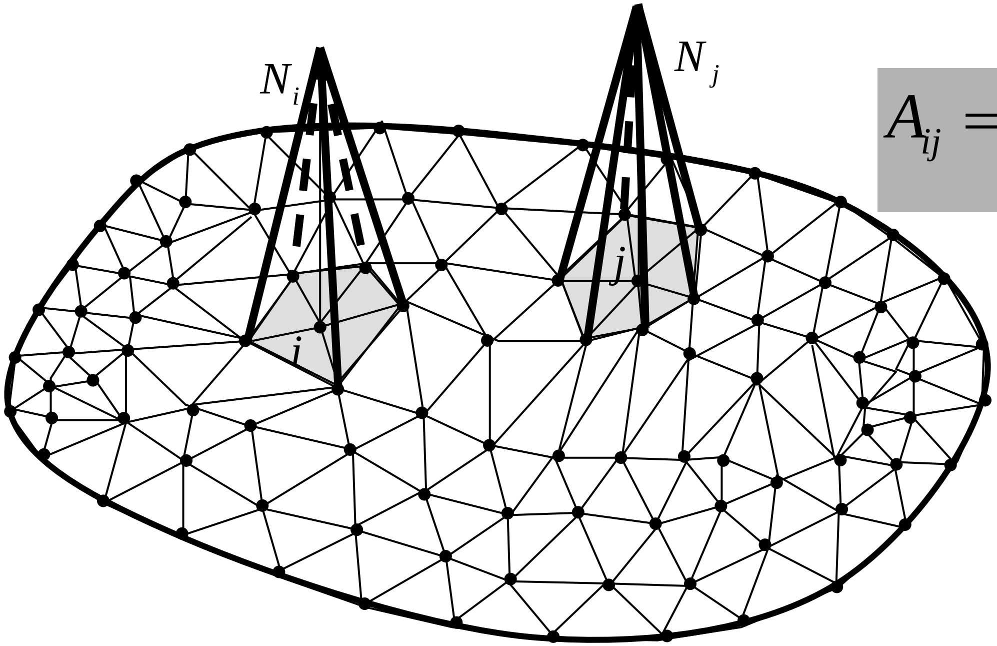
In Matrixform: $\lfloor A_{ij} \rfloor \{V_j\} = \{b_i\}.$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} gradN_i \cdot \varepsilon gradN_j d\Omega,$$

$$b_i = -\int_{\Omega} gradN_i \cdot \varepsilon gradV_D d\Omega + \int_{\Omega} N_i \rho d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_i \sigma d\Gamma.$$



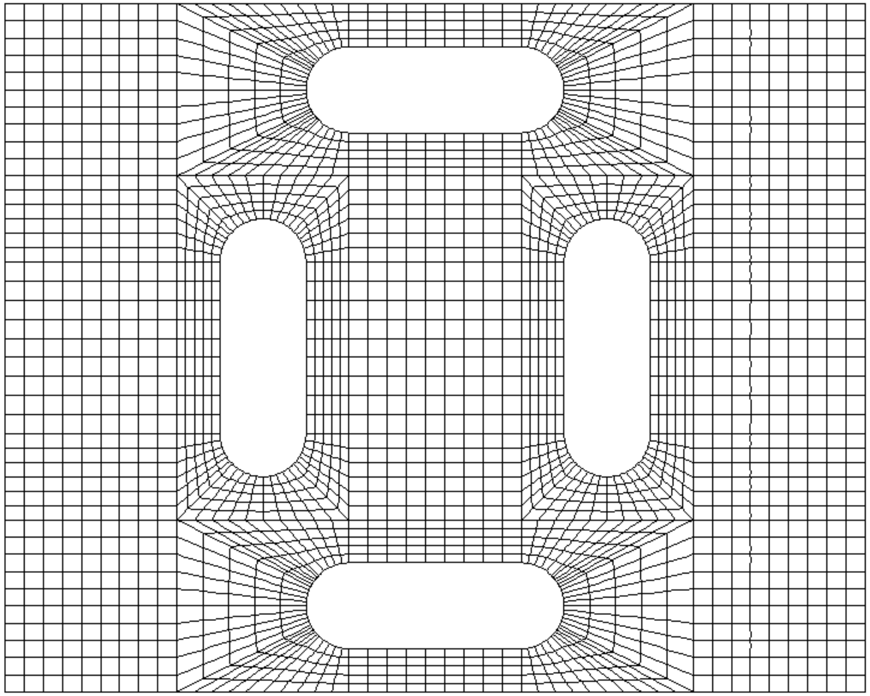
$$A_{ij} = \int\limits_{\Omega} gradN_i \cdot \varepsilon gradN_j d\Omega \neq 0,$$

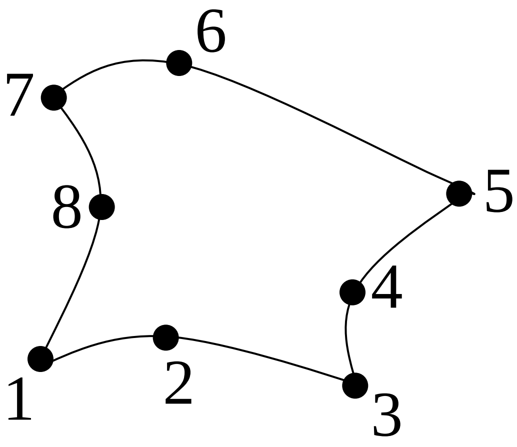


$$A_{ij} = \int\limits_{\Omega} gradN_i \cdot \varepsilon gradN_j d\Omega = 0.$$

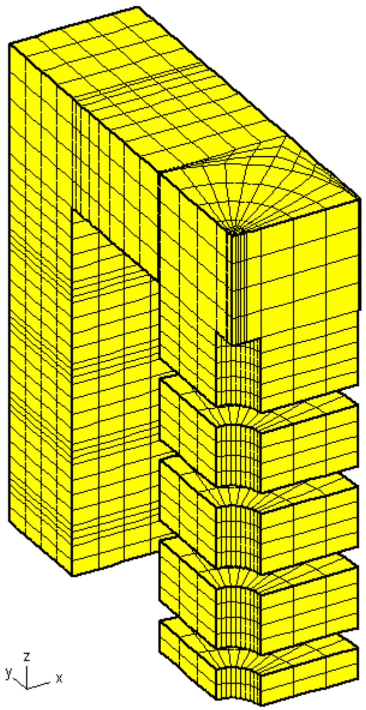
Spärlich besetzte Matrix.

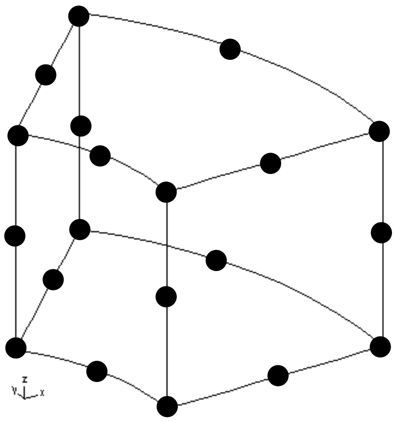
8-knotige Viereckselemente



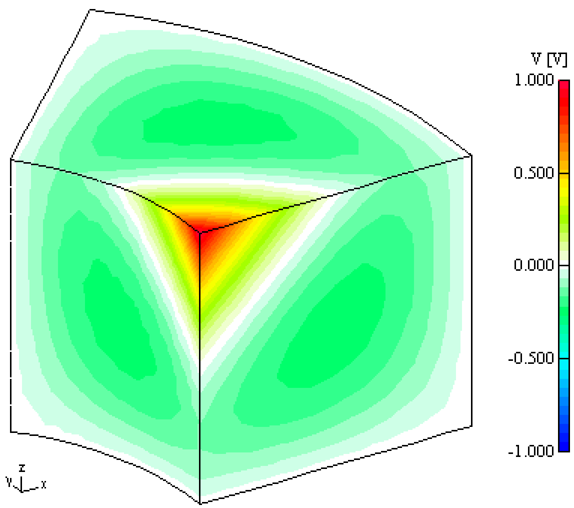


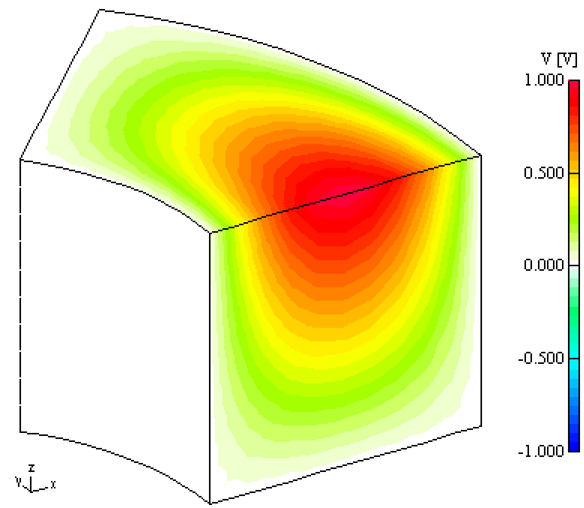
20-knotige Hexaederelemente

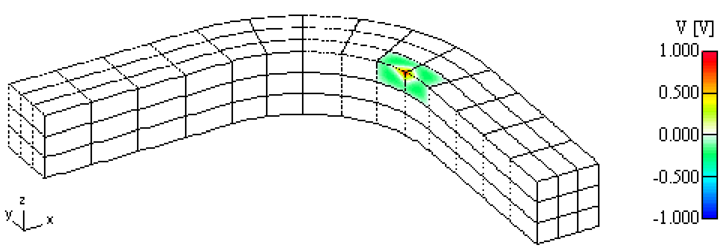


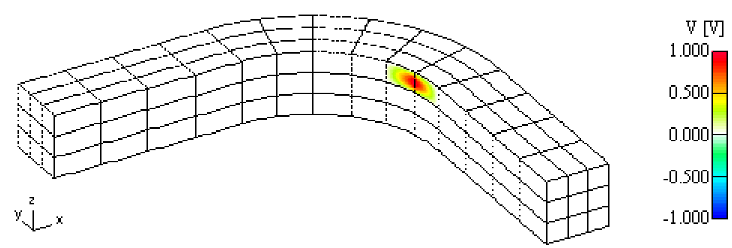


Form- und Basisfunktionen für 20-knotige Hexaederelemente









2.4 Integralgleichungen für das Skalarpotential

Das Randwertproblem für das Skalarpotential kann auch in der Form von verschiedenen Integralgleichungen dargestellt werden.

Integralgleichungen für Funktionen einer Variable:

$y(x)$: gesuchte Funktion, $f(x)$: bekannte Funktion,

$K(x,x')$: Kern der Integralgleichung (bekannt),

λ: bekannte Konstante.

$$\int_a^b K(x,x')y(x')dx' = f(x)$$

Fredholmsche Integralgleichung 1. Art

$$y(x) - \lambda\int_a^b K(x,x')y(x')dx' = f(x)$$

Fredholmsche Integralgleichung 2. Art

Randwertproblem für das elektrische Skalarpotential für den Fall von homogenen Materialien ($\varepsilon = \varepsilon_0$):

$$divgradV = \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ in } \Omega, \qquad \text{Laplace-Poissonsche Dgl.,}$$

$$V = V_0 \text{ auf } \Gamma_D \qquad \text{Dirichletsche Randbedingung,}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ auf } \Gamma_N \quad \text{Neumannsche Randbedingung.}$$

Wenn V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf dem *gesamten Rand* bekannt wären,

könnte man das Potential in einem beliebigen Punkt in Ω mit Hilfe der *Integraldarstellung* direkt berechnen.

2.4.1 Elemente der Potentialtheorie

Greensche Funktion: Lösung der Laplace-Poissonschen Dgl.

$$-\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

im gesamten dreidimensionalen Raum.

$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$: Diracsche Impulsfunktion im Punkt $\mathbf{r}'$, definiert durch

$$\int_{\Re^3} w(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\Omega = w(\mathbf{r}') \text{ oder } \int_{\Re^3} w(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\Omega' = w(\mathbf{r})$$

Die Lösung der Laplace-Poissonschen Gleichung $-\Delta V(\mathbf{r}) = \dfrac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$

im unendlichen, leeren Raum (ε=ε_0) ist:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}'')d\Omega''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}.$$

Somit ist die Greensche Funktion $\left(\rho(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right)$:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{\delta(\mathbf{r}''-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} d\Omega'' = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Dies ist das Potential einer Punktladung der Größe ε_0 im Punkt **r**´.

Eine Punktladung der Größe Q im Punkt **r**´ entspricht der Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$.

Greenscher Satz:

$$
\begin{array}{rl}
 & div(\phi grad\,\psi) = grad\,\phi \cdot grad\,\psi + \phi\Delta\psi \\
- & div(\psi grad\,\phi) = grad\,\psi \cdot grad\,\phi + \psi\Delta\phi \\
\hline
\end{array}
$$

$$\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi = div(\phi grad\,\psi) - div(\psi grad\,\phi)$$

$$\int_{\Omega} (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) d\Gamma$$

$$\phi \Leftarrow V(\mathbf{r}'), \psi \Leftarrow G(\mathbf{r},\mathbf{r}'), d\Omega \Leftarrow d\Omega', d\Gamma \Leftarrow d\Gamma'$$

$$\int_{\Omega}\left(V(\mathbf{r}')\underbrace{\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}_{-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}-G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Delta V(\mathbf{r}')\right)d\Omega'=$$

$$=\oint_{\Gamma}\left(V(\mathbf{r}')\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}-G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial n'}\right)d\Gamma'$$

<u>Integraldarstellung:</u>

$$\boxed{\begin{aligned}V(\mathbf{r})=&-\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Delta V(\mathbf{r}')d\Omega'-\\&-\frac{1}{4\pi}\oint_{\Gamma}V(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Gamma'+\frac{1}{4\pi}\oint_{\Gamma}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial n'}d\Gamma'\end{aligned}}$$

Nebenergebnis

Mittelwertsatz der Potentialtheorie:

Ist $V(\mathbf{r})$ eine Lösung von $\Delta V=0$, dann ist der Mittelwert von V, ermittelt über die Oberfläche einer Kugel mit beliebigem Radius R, ist gleich dem Wert von V im Mittelpunkt der Kugel.

Beweis

Der Mittelpunkt sei $\mathbf{r}$, die Fläche Γ sei die Kugel mit Radius R: $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=R$

$$V(\mathbf{r})=-\frac{1}{4\pi R}\int_\Omega \underbrace{\Delta V(\mathbf{r}')}_{=0}\,d\Omega'-\frac{1}{4\pi}\oint_\Gamma V(\mathbf{r}')\underbrace{\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{R}}_{-\frac{1}{R^2}}\,d\Gamma'+$$

$$+\frac{1}{4\pi R}\underbrace{\oint_\Gamma \frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial n'}\,d\Gamma'}_{=\oint_\Gamma grad V\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma'=\int_\Omega div\, grad V\, d\Omega'=0}=\frac{1}{4\pi R^2}\oint_\Gamma V(\mathbf{r}')\,d\Gamma'$$

Vgl.: Methode der finiten Differenzen

Einsetzen der aus dem Randwertproblem bekannten Größen:

bekannt

$$V(\mathbf{r}) = \boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\Omega' - \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_D} V_0(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\Gamma' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Gamma_N}\frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\Gamma' -\end{aligned}}$$

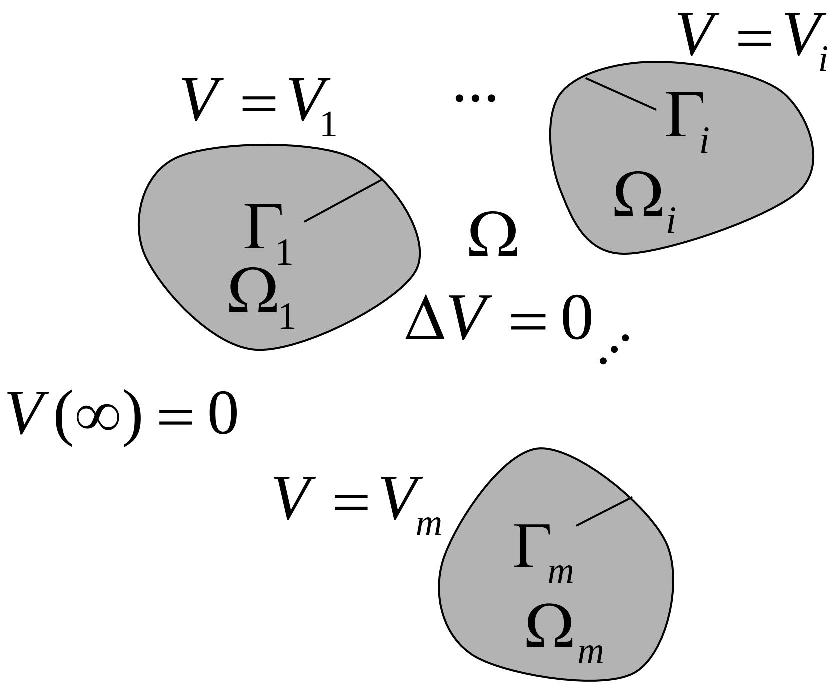
$$\boxed{- \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_N} V(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\Gamma' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Gamma_D}\frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d\Gamma'}$$

unbekannt

Verschiede Integralgleichungen für die unbekannten Größen V auf Γ_N und $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf Γ_D herleitbar.

2.4.2 Integralgleichung für die Oberflächenladungsdichte

Einfachster Fall: Elektrodenproblem (V_i = konstant, i =1, 2, ..., m).



$$\Gamma_N = 0, \Gamma_D = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i, \rho = 0.$$

Integraldarstellung:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{m} V_i \oint_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} \oint_{\Gamma_i} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma'.$$

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma' = \oint_{\Gamma_i} grad' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{n}' d\Gamma' = \int_{\Omega_i} \Delta' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Omega' =$$

$$= 0 \text{ falls } \mathbf{r} \notin \Omega_i.$$

Integralgleichung für die Oberflächenladungsdichte auf den Elektroden:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{m}\oint_{\Gamma_i}\frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Gamma' = V_i, \text{ für } \mathbf{r}\in\Gamma_i, i = 1, 2, ..., m.$$

Im 2D Fall ist die Greensche Funktion $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

Die Elektrodenkonturen seien die Kurven C_i.

Integralgleichung für die Linienladungsdichte auf den Elektroden:

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}\tau(\mathbf{r}')\ln\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Gamma' = V_i, \text{ für } \mathbf{r}\in C_i, i = 1, 2, ..., m.$$

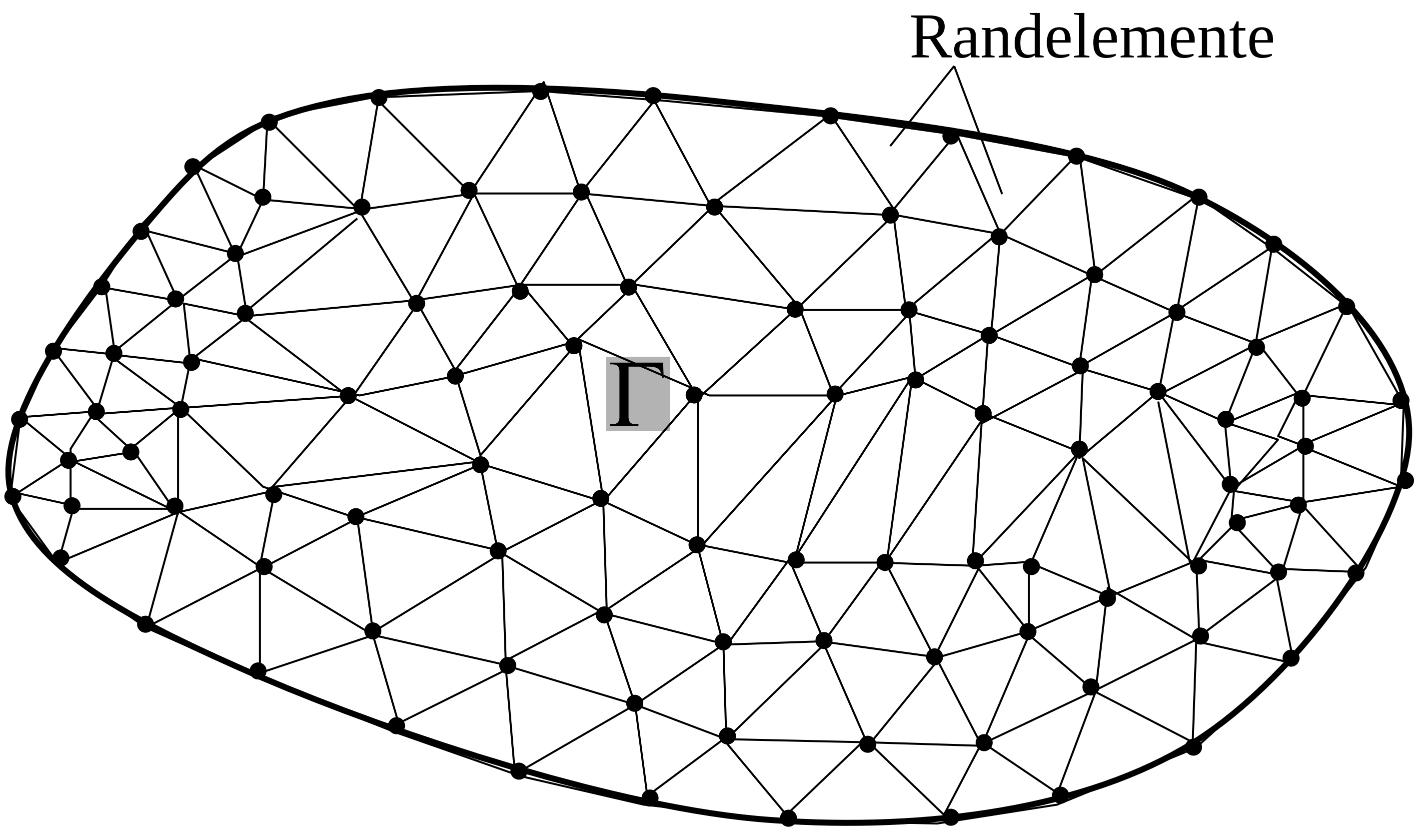
Fredholmsche Integralgleichungen 1. Art.

2.4.3 Methode der Randelemente (Boundary Element Method = BEM)

Numerisches Verfahren zur Lösung von Integralgleichungen

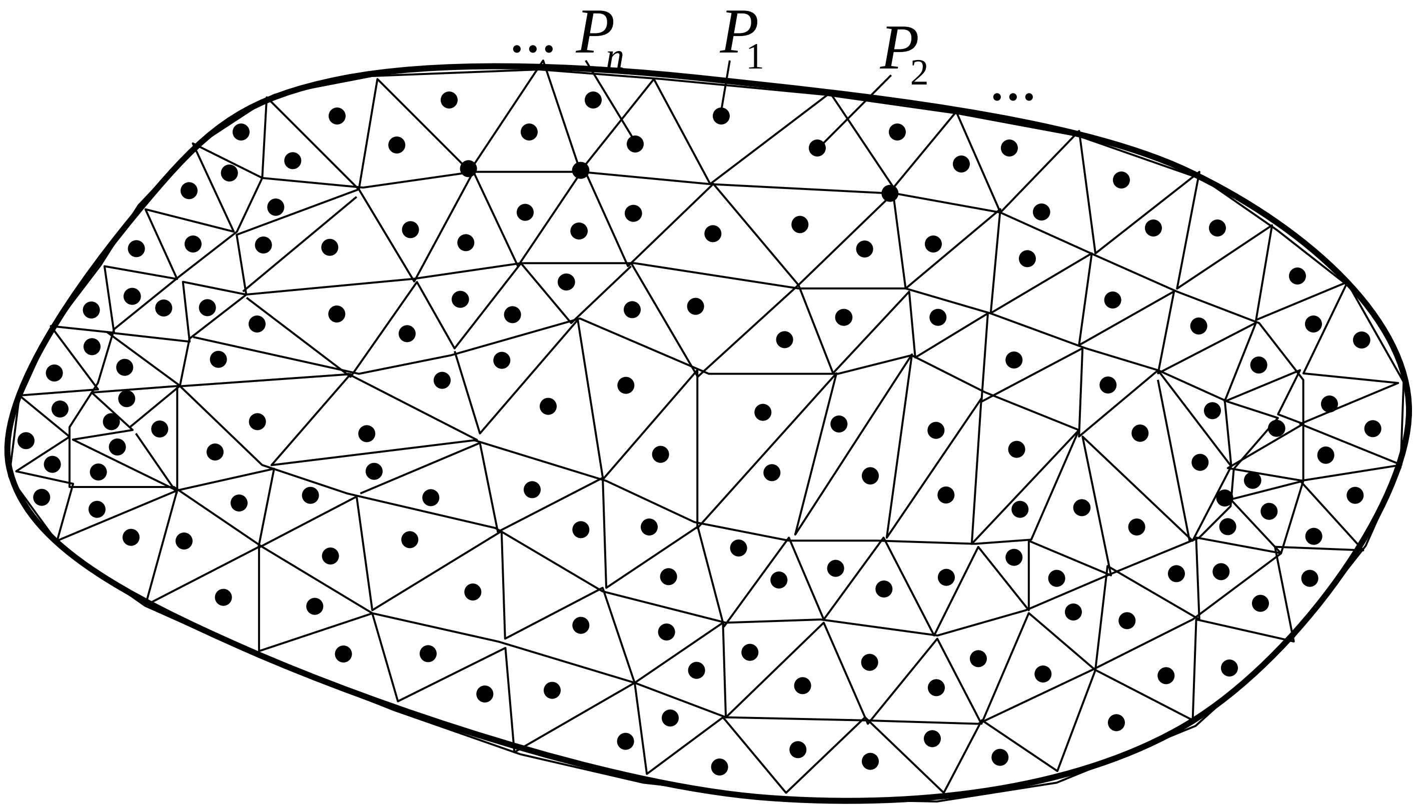
Diskretisierung der Elektrode: 3D Probleme - Oberflächen
2D Probleme - Kurven

Unbekannte: Oberflächenladungsdichte in den Elementen



Einfachste Annahme: σ ist konstant in jedem Element.
Die Anzahl der Elemente sei n, die Unbekannten sind
σ_j (j = 1, 2, ..., n).

In jedem Element wird ein Aufpunkt P_i (i = 1, 2, ..., n) gewählt,
in welchem die Erfüllung der Integralgleichung gefordert wird.



Lineares Gleichungssystem für die unbekannten Oberflächenladungsdichten (Γ_j: j-tes Element, V_i: Potential in P_i):

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\int_{\Gamma_j}\frac{1}{\left|\mathbf{r}_{P_i}-\mathbf{r}'\right|}d\Gamma' = V_i, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Im 2D Fall sind die unbekannten Linienladungswerte (C_j: j-tes Liniensegment, V_i: Potential in P_i):

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\tau_j\int_{C_j}\ln\frac{1}{\left|\mathbf{r}_{P_i}-\mathbf{r}'\right|}ds' = V_i, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Nichtsymmetrische, voll besetzte Matrix.

Nach Lösung des Gleichungssystems kann das Potential im beliebigen Aufpunkt im Problemgebiet mittels Integraldarstellung berechnet werden.

2.5 Randwertprobleme für das Vektorpotential

Stationäres Magnetfeld:

$$div\mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B} = rot\mathbf{A},$$

A: magnetisches Vektorpotential

Stationäres Strömungsfeld:

$$div\mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{J} = rot\mathbf{T},$$

T: Strömungsvektorpotential

Differentialgleichungen:

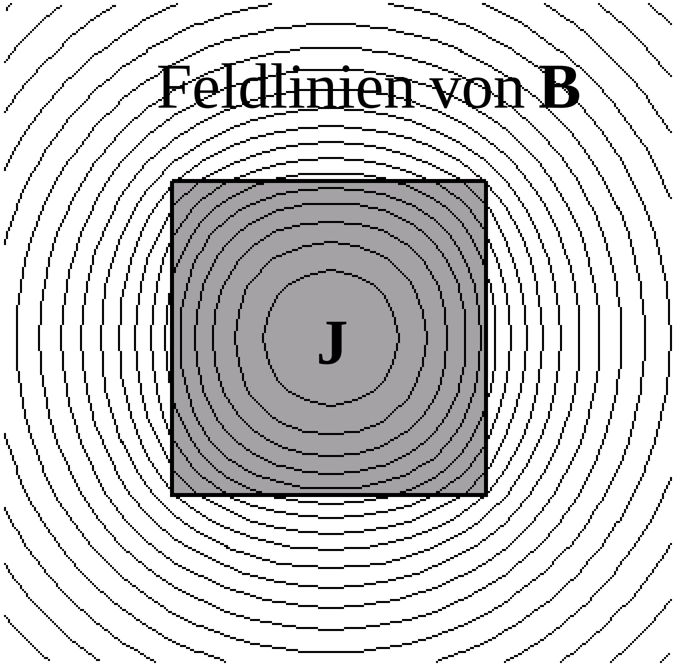
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow rot(\frac{1}{\mu} rot\mathbf{A}) = \mathbf{J},$$

$$rot\mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow rot(\frac{1}{\gamma} rot\mathbf{T}) = \mathbf{0}.$$

2.5.1 Ebene 2D Probleme

Stationäres Magnetfeld:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 : \mathbf{J} = J(x,y)\mathbf{e}_z\,,\ \mathbf{B} = B_x(x,y)\mathbf{e}_x + B_y(x,y)\mathbf{e}_y\,.$$



$$\mathbf{A} = A(x,y)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{e}_y\,.$$

Differentialgleichung für das einkomponentige Vektorpotential im ebenen 2D Fall:

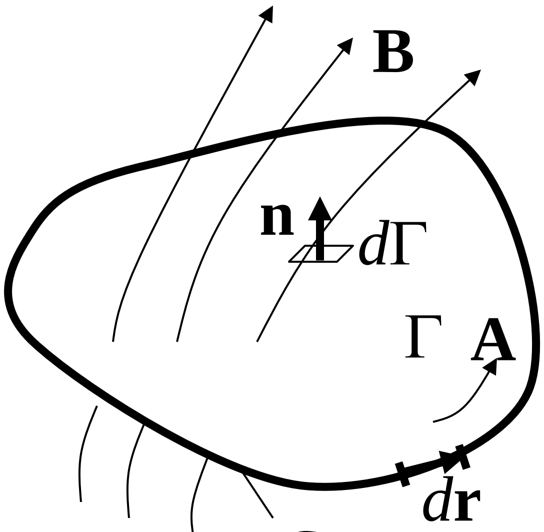
$$rot[\frac{1}{\mu} rot(A\mathbf{e}_z)] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A}{\partial y} & -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial A}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right]\mathbf{e}_z =$$

$$= -\mathbf{e}_z div(\frac{1}{\mu} gradA).$$

$$\boxed{-div(\frac{1}{\mu} gradA) = J,}$$

verallgemeinerte Laplace-Poissonsche Gleichung.

Magnetischer Fluß mit Hilfe von **A**:

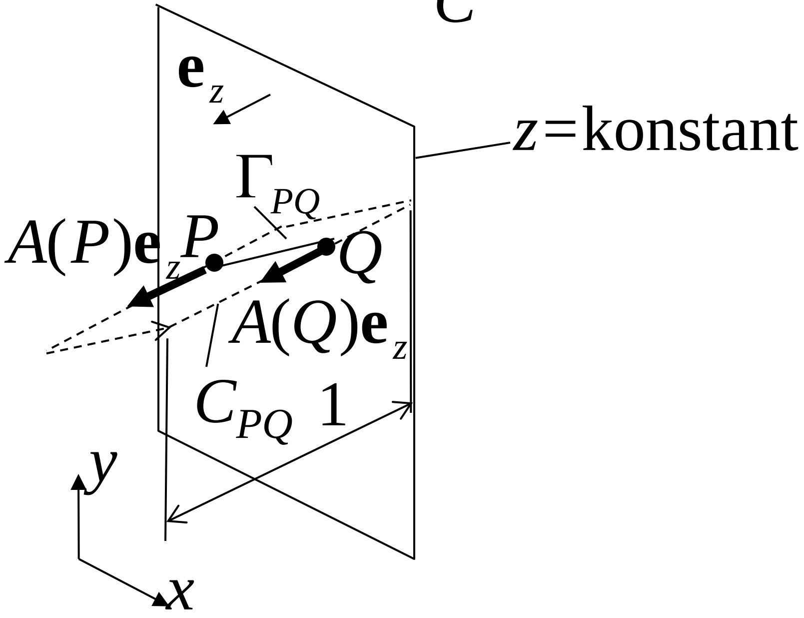


$$\Phi = \int_\Gamma \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = \int_\Gamma rot\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}.$$

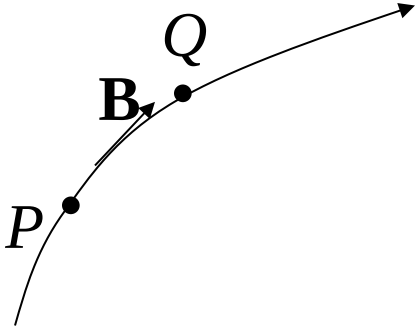
Im ebenen 2D Fall:

Γ_{PQ}: Oberfläche der Länge 1 durch die Punkte P und Q

$$\Phi_{PQ} = \oint_{C_{PQ}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = A(P) - A(Q)$$



Flußlinien (magnetische Feldlinien) verlaufen parallel zu **B**.



Für zwei beliebige Punkte auf einer Flußlinie gilt $\Phi_{PQ} = A(P) - A(Q) = 0$.

$$A(P) = A(Q) \Rightarrow A = \text{konstant auf Flußlinien!}$$

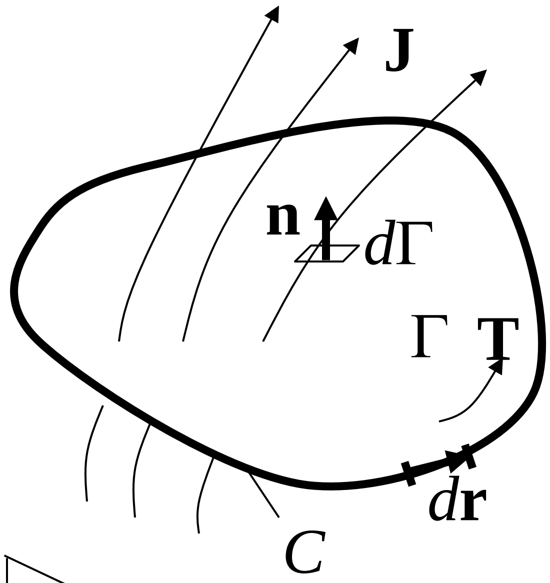
$$dA(P) = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = -B_y dx + B_x dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dy} = \frac{B_y}{B_x}.$$

Flußlinien: Äquipotentiallinien von $A(x, y)$.

Ist die Differenz des Vektorpotentialwertes zwischen zwei benachbarten Flußlinien konstant, ist die Dichte der Flußlinien dem Betrag von **B** proportional.

Strom mit Hilfe von **T**:

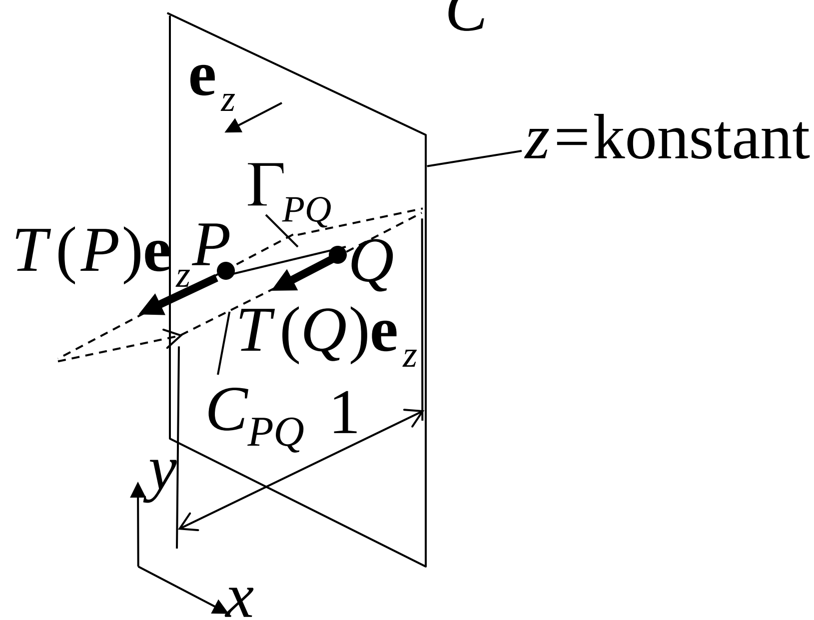
$$I = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} rot\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{C} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r}.$$



Im ebenen 2D Fall:

Γ_{PQ}: Oberfläche der Länge 1 durch die Punkte P und Q

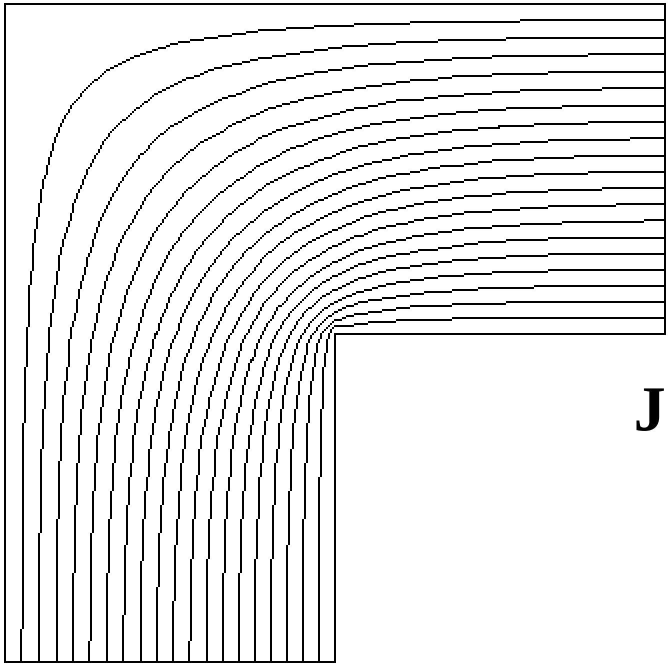
$$I_{PQ} = \oint_{C_{PQ}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = T(P) - T(Q)$$



Stromlinien:
Äquipotentiallinien von T(x,y).

Stationäres Strömungsfeld:

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 : \mathbf{J} = J_x(x, y)\mathbf{e}_x + J_y(x, y)\mathbf{e}_y .$$



$$\mathbf{T} = T(x, y)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{J} = rot\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & T \end{vmatrix} = \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{e}_y .$$

$$-div(\frac{1}{\gamma} gradT) = 0,$$ verallgemeinerte Laplacesche Gleichung.

Randbedingungen:

Dirichletsche Randbedingung: $A = A_0$ (bekannt) auf Γ_D,

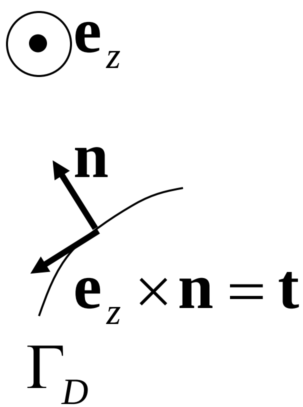
$T = T_0$ (bekannt) auf Γ_D.

Bedeutet die Vorgabe von B_n oder J_n:

z.B. für das Magnetfeld:

$$B_n = \mathbf{n} \cdot rot\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot rot(A\mathbf{e}_z) = \mathbf{n} \cdot (gradA \times \mathbf{e}_z) = gradA \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}) =$$

$$= \mathbf{t} \cdot gradA = \frac{\partial A}{\partial t} : \text{Tangentialableitung von } A!$$



Meistens ist A_0=konstant oder T_0=konstant:
Der Schnitt von Γ_D mit einer z=konstant Ebene ist eine Flußlinie oder Stromlinie. Die Differenzen der Werte von A_0 oder T_0 geben den Fluß oder den Strom pro Längeneinheit zwischen den Linien an.

Neumannsche Randbedingung: $\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n} = \alpha$ (bekannt) auf Γ_N,

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial n} = e \text{ (bekannt) auf } \Gamma_N.$$

Bedeutet die Vorgabe von H_t oder E_t:

z.B. für das Magnetfeld:

$$H_t = (\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}) \cdot \frac{1}{\mu} rot(A\mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}) \cdot \frac{1}{\mu}(gradA \times \mathbf{e}_z) =$$

$$= \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}) \cdot \frac{1}{\mu} gradA = -\mathbf{n} \cdot \frac{1}{\mu} gradA = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}.$$

Auf Grenzflächen zu hochpermeablen Gebieten, bzw. auf Elektroden ist die Neumannsche Randbedingung

homogen: $\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ oder $\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial n} = 0.$

Randwertprobleme für die einkomponentigen Vektorpotentialfunktionen im ebenen 2D Fall:

stationäres Magnetfeld:

$$-div(\frac{1}{\mu} gradA) = J \text{ in } \Omega,$$

$$A = A_0 \text{ auf } \Gamma_D, \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n} = \alpha \text{ auf } \Gamma_N.$$

stationäres Strömungsfeld:

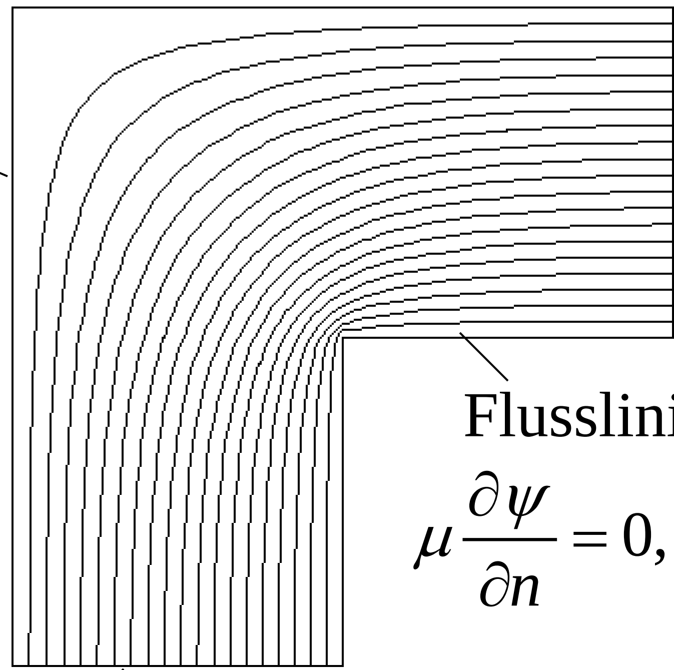
$$-div(\frac{1}{\gamma} gradT) = 0 \text{ in } \Omega,$$

$$T = T_0 \text{ auf } \Gamma_D, \frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma_N.$$

Ähnliche Randwertprobleme, wie für die Skalarpotentialfunktionen.

Dualität zwischen den Randbedingungen für das Skalarpotential und das einkomponentige Vektorpotential im ebenen 2D Fall

Flusslinie



Magnetische Wand:

$\psi =$ konstant,

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n} = 0.$$

Flusslinie:

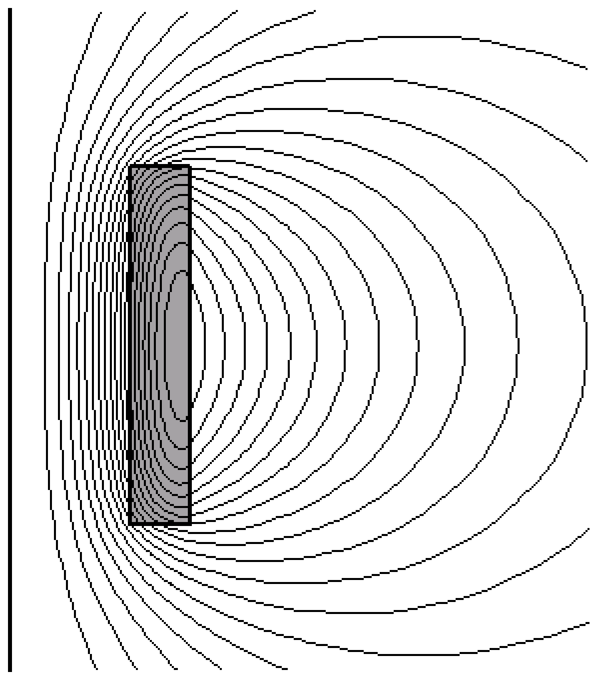
$$\mu\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \;\; A = \text{ konstant.}$$

Magnetische Wand

2.5.2 Rotationssymmetrische 2D Probleme

Stationäres Magnetfeld:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 : \mathbf{J} = J(r,z)\mathbf{e}_\phi, \mathbf{B} = B_r(r,z)\mathbf{e}_r + B_z(r,z)\mathbf{e}_z .$$



$$\mathbf{A} = A(r,z)\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\phi & \frac{1}{r}\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial A}{\partial z}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial (rA)}{\partial r}\mathbf{e}_z .$$

Differentialgleichung für das einkomponentige Vektorpotential im rotationssymmetrischen Fall:

$$rot[\frac{1}{\mu} rot(A\mathbf{e}_\phi)] = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\phi & \frac{1}{r}\mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\mu r}\frac{\partial (rA)}{\partial r} \end{vmatrix} =$$

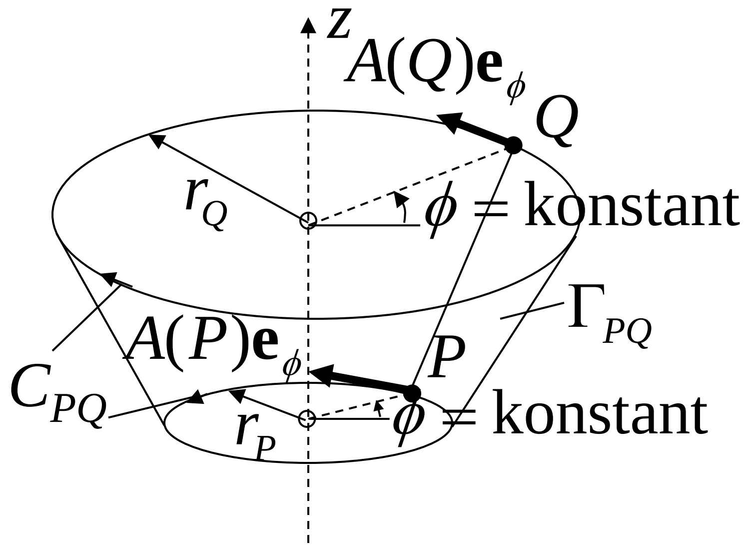
$$= -\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial (rA)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z} \right) \right]\mathbf{e}_\varphi \neq -\mathbf{e}_\varphi div(\frac{1}{\mu} gradA).$$

$$\left(div(\frac{1}{\mu} gradA) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z} \right) \right)$$

$$\boxed{-\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial (rA)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z} \right) \right] = J}$$

Fluss im rotationssymmetrischen 2D Fall:

Γ_{PQ}:
Kegelstumpfmanteloberfläche
durch die Punkte P und Q



$$\Phi_{PQ} = \oint_{C_{PQ}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi[r_P A(P) - r_Q A(Q)].$$

Flusslinien: Äquipotentiallinien von $rA(r, z)$.

Strömungsfeld: Äquipotentiallinien von $rT(r, z)$
sind die Stromlinien.

2.5.3 3D Probleme

Die Vektorpotentialfunktionen sind nicht eindeutig:

$\mathbf{B} = rot\mathbf{A} = rot(\mathbf{A} + grad u)$ u ist eine beliebige Skalarfunktion,

$\mathbf{J} = rot\mathbf{T} = rot(\mathbf{T} + grad u)$ u ist eine beliebige Skalarfunktion.

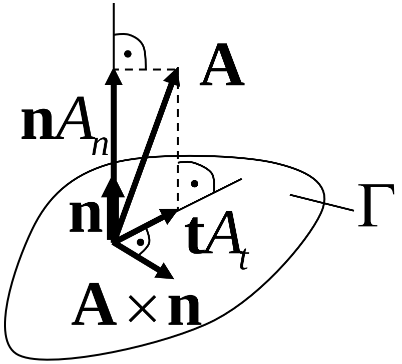
Differentialgleichungen: Randbedingungen:

$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow rot(\frac{1}{\mu} rot\mathbf{A}) = \mathbf{J},$ Vorgabe von B_n oder von H_t.

$rot\mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow rot(\frac{1}{\gamma} rot\mathbf{T}) = \mathbf{0},$ Vorgabe von J_n oder von E_t.

In 3D Problemen beziehen sich die Randbedingungen auf die Normal- und Tangentialkomponenten der Feldgrößen oder des Vektorpotentials.

$$\mathbf{A} = \mathbf{n}A_n + \mathbf{t}A_t .$$



$$\mathbf{n}A_n = \mathbf{n}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})$$

$$\mathbf{t}A_t = \mathbf{n}\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{n}\right) = \mathbf{A}\underbrace{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})}_{1} - \mathbf{n}\underbrace{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})}_{A_n} = \mathbf{A} - \mathbf{n}A_n$$

Statt $\mathbf{t}A_t$ wird $\mathbf{A}\times\mathbf{n}$ verwendet.

Vorgabe von B_n oder von J_n mit Hilfe des Vektorpotentials:

$$div(\mathbf{A}\times\mathbf{n}) = \mathbf{n}\cdot rot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot \underbrace{rot\mathbf{n}}_{0} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B} = B_n,\ \ div(\mathbf{T}\times\mathbf{n}) = J_n.$$

$$\left(div\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_1h_2h_3\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(v_2h_1h_3\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(v_3h_1h_2\right)\right]\right)$$

$\mathbf{A}\times\mathbf{n}$ und $\mathbf{T}\times\mathbf{n}$ haben keine Normalkomponente

$$\Downarrow$$

bei der Bildung ihrer Divergenz wird nicht in der Normalrichtung differenziert.

Durch die Vorgabe von $\mathbf{A}\times\mathbf{n}$, bzw. $\mathbf{T}\times\mathbf{n}$ werden B_n bzw. J_n bestimmt: Dirichletsche Randbedingung.

Vorgabe von H_t oder von E_t mit Hilfe des Vektorpotentials:

Es sollen $\mathbf{H}\times\mathbf{n}$, bzw. $\mathbf{E}\times\mathbf{n}$ vorgegeben werden :

$$\boxed{\mathbf{H}\times\mathbf{n}=\frac{1}{\mu}rot\mathbf{A}\times\mathbf{n},\quad \mathbf{E}\times\mathbf{n}=\frac{1}{\gamma}rot\mathbf{T}\times\mathbf{n}: \text{ Neumannsche Randbedingung.}}$$

Randwertprobleme für die Vektorpotentialfunktionen im 3D Fall:

stationäres Magnetfeld:

$$rot(\frac{1}{\mu} rot\mathbf{A}) = \mathbf{J} \text{ in } \Omega,$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{a} \text{ auf } \Gamma_D, \frac{1}{\mu} rot\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\alpha} \text{ auf } \Gamma_N.$$

stationäres Strömungsfeld:

$$rot(\frac{1}{\gamma} rot\mathbf{T}) = \mathbf{0} \text{ in } \Omega,$$

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} \text{ auf } \Gamma_D, \frac{1}{\gamma} rot\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{e} \text{ auf } \Gamma_N.$$

Die Randwertprobleme haben keine eindeutige Lösung.

Spezialfall: Vektorpotential von vorgegebener Stromdichte im unendlichen leeren Raum $(\mu = \mu_0 \text{ und } \Gamma \to \infty)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} rot\,rot\,\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \\ \mathbf{A}(\infty) = 0 \end{array}} \quad (\Rightarrow \mathbf{n} \cdot rot\mathbf{A}(\infty) = \mathbf{0} \text{ oder } rot\mathbf{A}(\infty) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}).$$

Lediglich **B**=*rot***A** ist eindeutig bestimmt, nicht aber **A**.

A wird eindeutig, wenn auch *div***A** bestimmt wird: <u>Eichung</u>.

Die Wahl *div***A** = 0 ist die <u>Coulomb-Eichung</u>.

Die Eichung macht **A** eindeutig:

$$\left.\begin{aligned} &div\mathbf{A} = div(\mathbf{A} + gradu) \quad \Rightarrow \Delta u = 0, \\ &\mathbf{A}(\infty) = \mathbf{A}(\infty) + gradu(\infty) \Rightarrow gradu(\infty) = \mathbf{0}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow gradu = \mathbf{0}.$$

Randwertproblem für **A**:

$$\left.\begin{aligned} &rotrot\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \\ &div\mathbf{A} = 0, \\ &\mathbf{A}(\infty) = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &rotrot\mathbf{A} - graddiv\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \\ &\mathbf{A}(\infty) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

Vektorielle Laplace-Poissonsche Differentialgleichung.

Die Coulomb-Eichung folgt aus der vektoriellen Laplace-Poissonschen Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned} &rot\,rot\,\mathbf{A} - grad\,div\,\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}, \\ &\mathbf{A}(\infty) = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{div(rot\,rot\,\mathbf{A} - grad\,div\,\mathbf{A})}_{\Delta(div\mathbf{A})} = \underbrace{\mu_0 div\mathbf{J}}_{0} \\ &div\mathbf{A}(\infty) = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow div\mathbf{A} = 0.$$

Lösung von

$$\boxed{\begin{gathered} -\Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}, \quad \mathbf{A}(\infty) = \mathbf{0}: \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \end{gathered}}$$

Biot-Savartsches Gesetz:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = rot\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega rot\,\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega (grad\,\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\Omega' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,d\Omega',$$

$$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\mathbf{e}_{\mathbf{r}'\to\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\,d\Omega'.}$$

3. Quasistationäre Felder

Maxwellsche Gleichungen $\left(|\mathbf{J}| >> \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \right)$:

In leitenden Medien (Ω_l):

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J},$$

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$div\mathbf{B} = 0,$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} \quad (\mathbf{E}_e = \mathbf{0}).$$

J ist unbekannt:
zeitabhängiges
quasistationäres Feld

In nichtleitenden Medien (Ω_i):

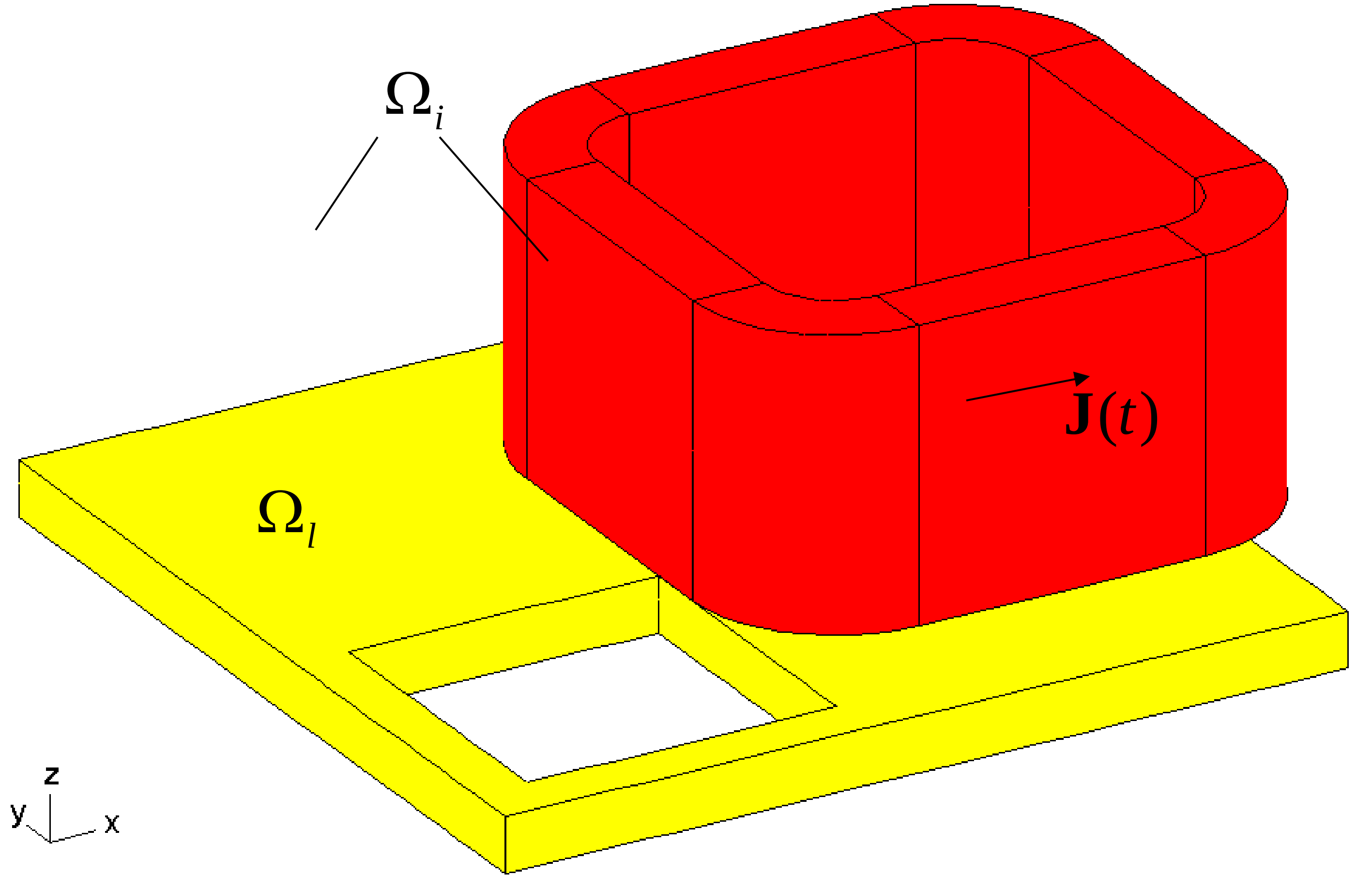
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J},$$

$$div\mathbf{B} = 0,$$

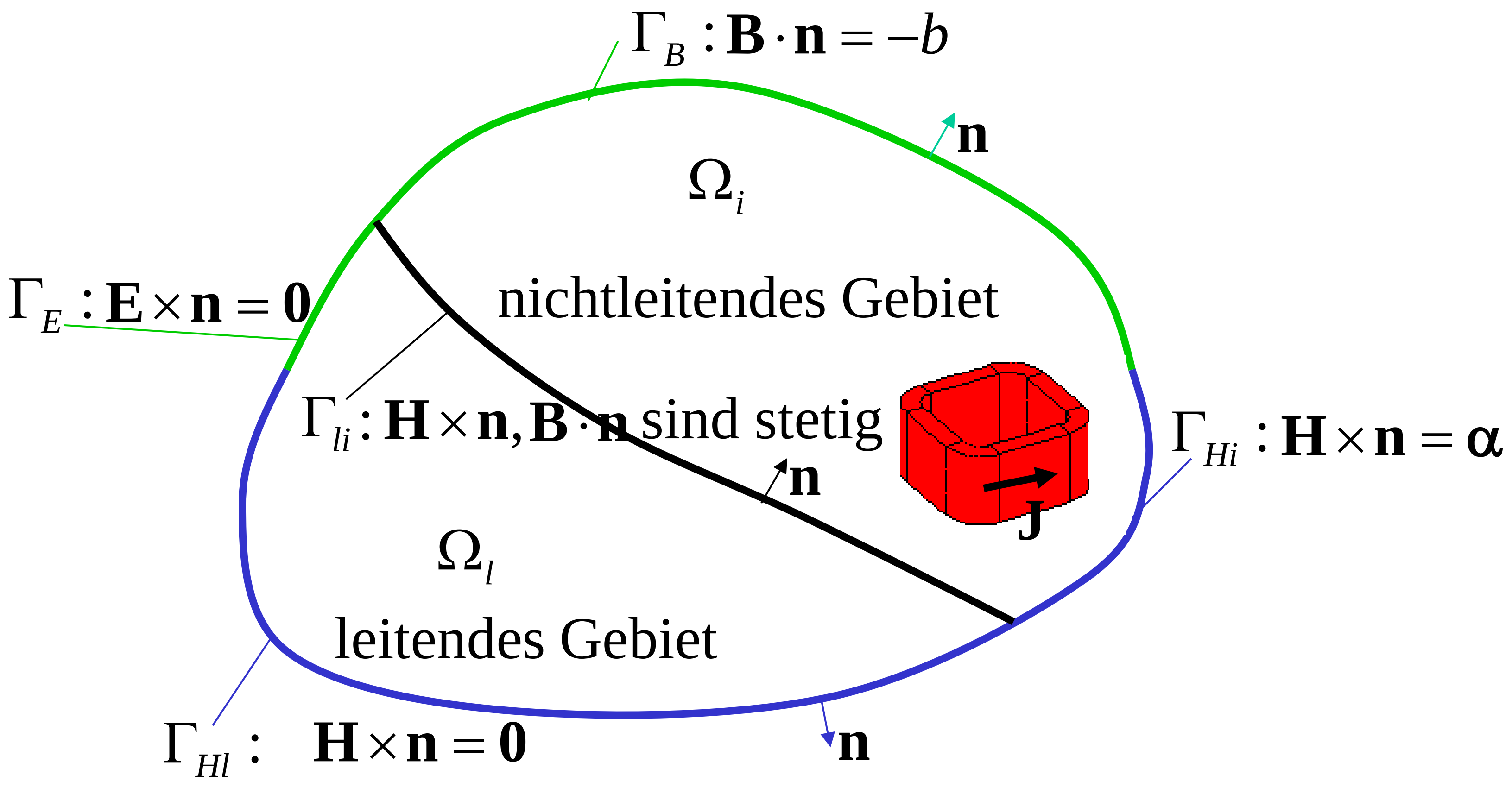
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$$

J ist bekannt:
zeitabhängiges
stationäres Magnetfeld

Beispiel:



Rand- und Grenzflächenbedingungen:



Zusammenfassung

Differentialgleichungen in Ω_l (Wirbelstromgebiet):

$$rot\mathbf{H}_l = \mathbf{J}_l$$

$$rot\mathbf{E}_l = -\frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial t}$$

$$div\mathbf{B}_l = 0$$

$$\mathbf{B}_l = \mu\mathbf{H}_l, \mathbf{H}_l = \nu\mathbf{B}_l, \mathbf{J}_l = \gamma\mathbf{E}_l$$

Differentialgleichungen in Ω_i (wirbelstromfreies Gebiet):

$$rot\mathbf{H}_i = \mathbf{J}_i$$

$$div\mathbf{B}_i = 0$$

$$\mathbf{B}_i = \mu\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_i = \nu\mathbf{B}_i$$

Randbedingungen:

$\mathbf{H}_l \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ auf Γ_{Hl},

$\mathbf{E}_l \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ auf Γ_E,

$\mathbf{H}_i \times \mathbf{n} = \mathbf{K}$ auf Γ_{Hi},

$\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{n} = -b$ auf Γ_B.

Grenzflächenbedingungen auf Γ_{li}:

$$\mathbf{H}_l \times \mathbf{n}_l + \mathbf{H}_i \times \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B}_l \cdot \mathbf{n}_l + \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0$$

Anfangsbedingungen in *t=0*: $\mathbf{B}_l = \mathbf{B}_{l0}$ in Ω_l, $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{i0}$ in Ω_i

Komplexe Schreibweise für zeitharmonische Größen:

Zeitfunktion:
$$B_x(\mathbf{r},t) = \hat{B}_x(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi_x(\mathbf{r}))$$
$$B_y(\mathbf{r},t) = \hat{B}_y(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi_y(\mathbf{r}))$$
$$B_z(\mathbf{r},t) = \hat{B}_z(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi_z(\mathbf{r}))$$

speziell für lineare Polarisation: $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi(\mathbf{r}))$

Komplexe Amplitude (komplexer Scheitelwert): $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})e^{j\varphi(\mathbf{r})}$

Zeitableitung:

$\frac{\partial}{\partial t}$ im Zeitbereich $\rightarrow$ Multiplikation mit $j\omega$ im Frequenzbereich

Maxwellsche Gleichungen für komplexe Amplituden (quasistationärer Fall):

$$\boxed{rot\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad rot\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}, \quad div\mathbf{B} = 0.}$$

Poyntingscher Satz für komplexe Amplituden im quasistationären Fall:

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot rot\mathbf{H}^* - \frac{1}{2}\mathbf{H}^* \cdot rot\mathbf{E} = -\frac{1}{2} div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^* + \frac{1}{2} j\omega\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}^* d\Omega + j\omega\frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^* d\Omega = -\frac{1}{2}\oint_\Gamma \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\cdot\mathbf{n}d\Gamma = \underline{S}$$

$\underline{S}$: komplexe Leistung, die durch den Rand Γ ins Gebiet Ω hineinfließt.

Beweis:

Zeitfunktion des Poyntingschen Vektors:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t) = \hat{\mathbf{E}} \cos(\omega t + \varphi_E) \times \hat{\mathbf{H}} \cos(\omega t + \varphi_H) =$$

$$= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} \left[\cos(\varphi_E - \varphi_H) + \cos(2\omega t + \varphi_E + \varphi_H) \right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} \cos(\varphi_E - \varphi_H) \left[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_E) \right]}_{\text{Wirkanteil}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} \sin(\varphi_E - \varphi_H) \left[\sin 2(\omega t + \varphi_E) \right]}_{\text{Blindanteil}}$$

Wirkleistung: $$P = -\oint_\Gamma \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} \cos(\varphi_E - \varphi_H) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Blindleistung: $$Q = -\oint_\Gamma \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} \sin(\varphi_E - \varphi_H) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

$$\underline{S} = P + jQ = -\oint_\Gamma \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} [\cos(\varphi_E - \varphi_H) + j\sin(\varphi_E - \varphi_H)] \cdot \mathbf{n} d\Gamma =$$

$$= -\oint_\Gamma \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{j(\varphi_E - \varphi_H)} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -\oint_\Gamma \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}} e^{j\varphi_E} \times \hat{\mathbf{H}} e^{-j\varphi_H} \cdot \mathbf{n} d\Gamma =$$

$$= -\frac{1}{2} \oint_\Gamma \left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$ **q. e. d.**

Komplexer Poyntingscher Vektor: $\boxed{\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}$

Wirkleistung: $P = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* d\Omega = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma} d\Omega, \quad (\mathbf{E}_e = \mathbf{0}),$

Blindleistung: $Q = \omega \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* d\Omega = \frac{1}{2} \omega \int_\Omega \mu |\mathbf{H}|^2 d\Omega.$

3.1 Einige analytische Lösungen des Randwertproblems für das magnetische Vektorpotential

Im leitenden Gebiet (Ω_l):

$$div\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{B} = rot\mathbf{A},}$$

$$rot\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = rot\mathbf{E} + \frac{\partial rot\mathbf{A}}{\partial t} = rot(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -gradV - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.}$$

Differentialgleichungen:

$$rot\mathbf{H} - \mathbf{J} = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{rot(\frac{1}{\mu} rot\mathbf{A}) + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma gradV = \mathbf{0},}$$

$$\left(divJ = 0 \Rightarrow -div(\gamma gradV) - div(\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0. \right)$$

Randbedingungen: $\mathbf{A}(\infty) = 0, V(\infty) = 0.$

Spezialfall: μ = konstant, γ = konstant, zeitharmonischer Fall.

Coulomb-Eichung: $div\mathbf{A}=0$

$$\underbrace{-div(\gamma\, grad V) - j\omega div(\gamma \mathbf{A}) = 0 \;\Rightarrow -\Delta V = j\omega div\mathbf{A} = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{cases} \Delta V = 0 \\ V(\infty) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow V = 0$$

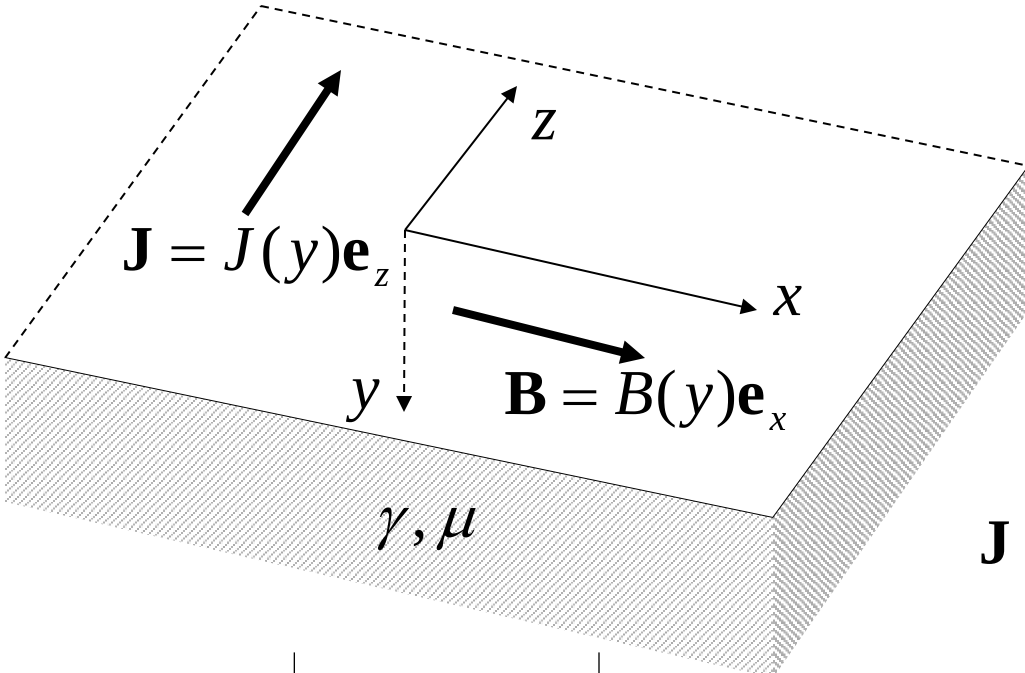
Differentialgleichung in Ω_l:

$$\boxed{-\Delta\mathbf{A} + j\omega\mu\gamma\mathbf{A} = \mathbf{0}}$$ vektorielle Diffusionsgleichung.

Ebene 2D Probleme:

$$\boxed{-\Delta A(x,y) + j\omega\mu\gamma A(x,y) = 0}$$ skalare Diffusionsgleichung.

3.1.1 Strom in unendlichem leitendem Halbraum



$$\frac{\partial}{\partial z} = 0, \frac{\partial}{\partial x} = 0 :$$

$$\mathbf{A} = A(y)\mathbf{e}_z ,$$

$$\mathbf{E} = -j\omega A(y)\mathbf{e}_z = E(y)\mathbf{e}_z ,$$

$$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} = -j\omega\gamma A(y)\mathbf{e}_z = J(y)\mathbf{e}_z ,$$

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \frac{dA(y)}{dy}\mathbf{e}_x = B(y)\mathbf{e}_x ,$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\frac{dA(y)}{dy}\mathbf{e}_x = H(y)\mathbf{e}_x .$$

Diffusionsgleichung: $\boxed{-\frac{d^2A(y)}{dy^2}+j\omega\mu\gamma A(y)=0.}$

$$j\omega\mu\gamma = p^2,\ \ p=\sqrt{j\omega\mu\gamma}=\frac{1+j}{\sqrt{2/\omega\mu\gamma}}=\frac{1+j}{\delta},$$ $\boxed{\delta\text{: Eindringtiefe.}}$

$$\frac{d^2A(y)}{dy^2}=p^2A(y)$$

$$A(y)=A_1e^{-py}+A_2e^{py}$$

$$\lim_{y\to\infty}\left|A(y)\right|<\infty\Rightarrow A_2=0: \quad \boxed{A(y)=A_1e^{-py}=A_1e^{-\frac{y}{\delta}}e^{-j\frac{y}{\delta}}}$$

Feldgrößen:

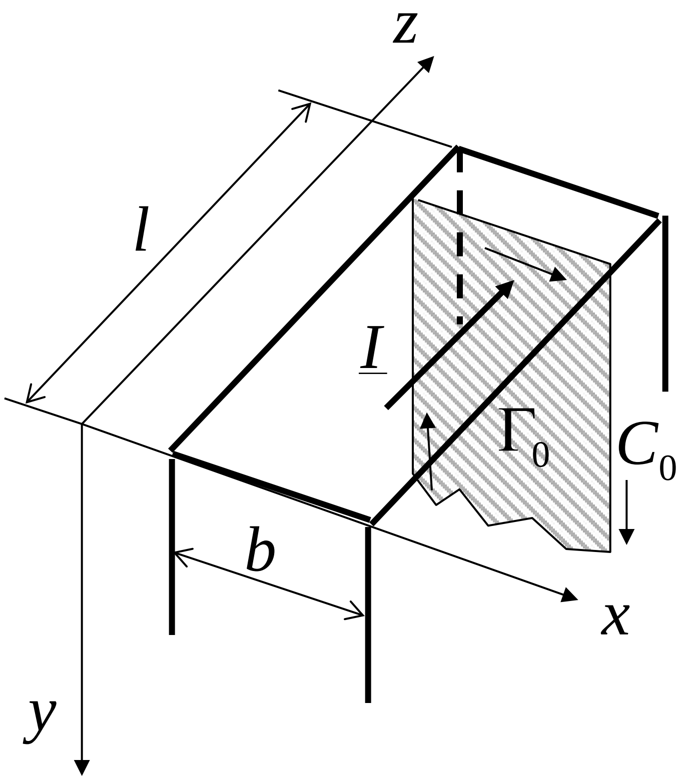
$$E(y) = -j\omega A(y) = -j\omega A_1 e^{-py},$$

$$J(y) = -j\omega\gamma A(y) = -j\omega\gamma A_1 e^{-py},$$

$$B(y) = \frac{dA(y)}{dy} = -pA_1 e^{-py},$$

$$H(y) = \frac{1}{\mu}\frac{dA(y)}{dy} = -\frac{p}{\mu} A_1 e^{-py}.$$

Bestimmung der Konstante A_1: Strom durch ein Leiterstück der Breite b wird als gegeben angenommen.



$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = \oint_{C_0}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = H(y=0)b = \underline{I}$$

$$-\frac{pb}{\mu}A_1 = \underline{I} \Rightarrow A_1 = -\frac{\mu\underline{I}}{pb}$$

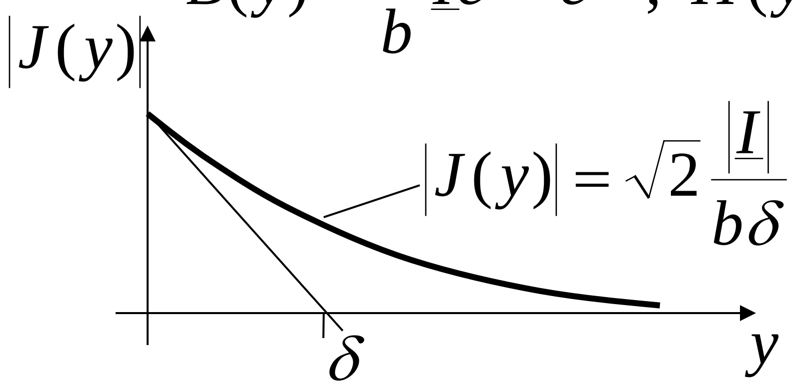
$$E(y) = \frac{j\omega\mu}{pb}\underline{I}e^{-jpy} = \frac{p}{\gamma b}\underline{I}e^{-j\frac{y}{\delta}}e^{-\frac{y}{\delta}},$$

$$J(y) = \gamma E(y) = \frac{p}{b}\underline{I}e^{-j\frac{y}{\delta}}e^{-\frac{y}{\delta}},$$

$$B(y) = \frac{\mu}{b}\underline{I}e^{-j\frac{y}{\delta}}e^{-\frac{y}{\delta}},\ H(y) = \frac{\underline{I}}{b}e^{-j\frac{y}{\delta}}e^{-\frac{y}{\delta}}.$$

Stromverdrängung (Skin effect):

Betrag der Stromdichte nimmt exponentiell ab



$$\left|J(y)\right| = \sqrt{2}\,\frac{\left|\underline{I}\right|}{b\delta}e^{-\frac{y}{\delta}}$$

Impedanz des Leiterstückes der Breite *b* und Länge *l*:

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\left|\underline{I}\right|^2 \underline{Z} = -\frac{1}{2}\oint_\Gamma \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\cdot \mathbf{n}\, d\Gamma$$

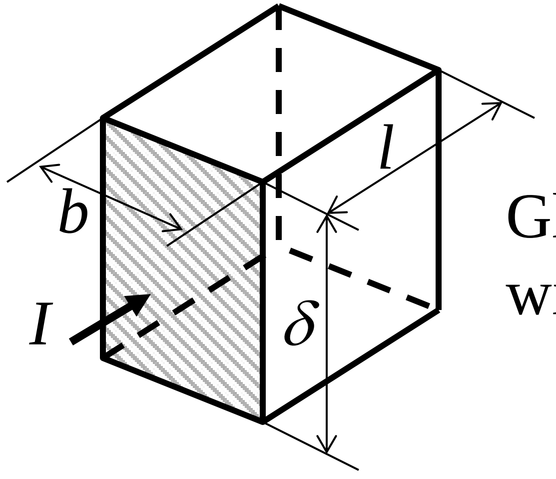
$$\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* = E(y)\mathbf{e}_z \times H^*(y)\mathbf{e}_x = E(y)H^*(y)\mathbf{e}_y$$

$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$ für $y = 0$, sonst ist $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_y$.

$$\frac{1}{2}\left|\underline{I}\right|^2 \underline{Z} = \frac{1}{2} E(y=0)H^*(y=0)bl = \frac{1}{2}\frac{p}{\gamma b}\underline{I}\,\frac{\underline{I}^*}{b}bl = \frac{1}{2}\left|\underline{I}\right|^2 \frac{pl}{\gamma b}.$$

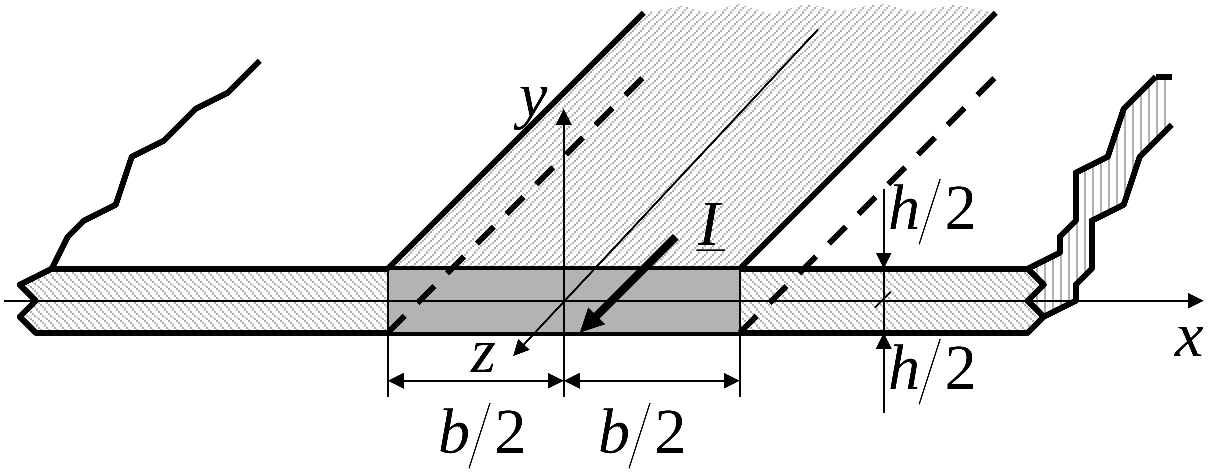
$$\underline{Z} = R + jX = (1+j)\frac{l}{\gamma\delta b},$$

$$R = \frac{l}{\gamma\delta b},\quad X = \frac{l}{\gamma\delta b}.$$



Gleichstrom-
widerstand

3.1.2 Strom in unendlich ausgedehnter leitender Platte



$$\mathbf{E} = -j\omega A(y)\mathbf{e}_z = E(y)\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} = -j\omega\gamma A(y)\mathbf{e}_z = J(y)\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{B} = \frac{dA(y)}{dy}\mathbf{e}_x = B(y)\mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\frac{dA(y)}{dy}\mathbf{e}_x = H(y)\mathbf{e}_x.$$

Diffusionsgleichung:

$$\boxed{\frac{d^2A(y)}{dy^2} = p^2A(y),} \qquad p = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = \frac{1+j}{\sqrt{2/\omega\mu\gamma}} = \frac{1+j}{\delta}.$$

Lösung der Diffusionsgleichung:

$$A(y) = A_1 e^{-py} + A_2 e^{py} = C_1 \cosh(py) + C_2 \sinh(py).$$

Die Stromdichte $J(y) = -j\omega\gamma A(y)$ muss eine gerade Funktion sein ($J(y) = J(-y)$): $C_2 = 0$.

$$\boxed{A(y) = C_1 \cosh(py).}$$

Feldgrößen:

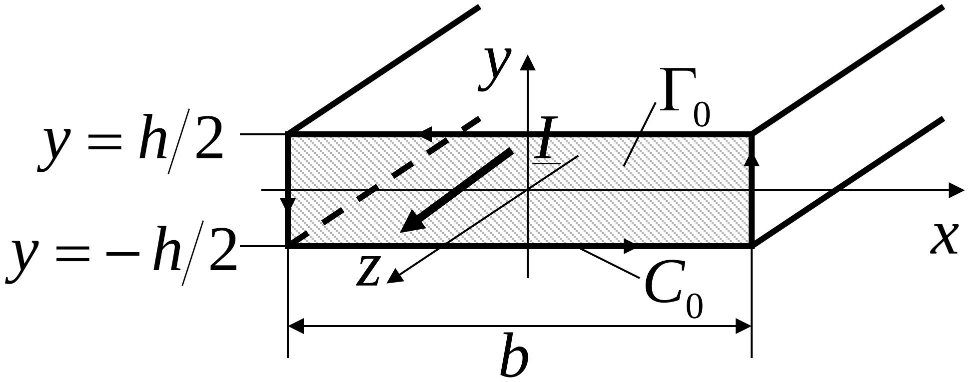
$$E(y) = -j\omega A(y) = -j\omega C_1 \cosh(py)$$

$$J(y) = -j\omega\gamma A(y) = -j\omega\gamma C_1 \cosh(py)$$

$$B(y) = \frac{dA(y)}{dy} = pC_1 \sinh(py)$$

$$H(y) = \frac{1}{\mu}\frac{dA(y)}{dy} = \frac{p}{\mu} C_1 \sinh(py)$$

Bestimmung der Konstante C_1: Strom durch ein Leiterstück der Breite b wird als gegeben angenommen.



$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma = \oint_{C_0} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = -H(y=h/2)b + H(y=-h/2)b =$$

$$= -2H(y=h/2)b = -\frac{2pb}{\mu}C_1\sinh\left(\frac{ph}{2}\right) = \underline{I},$$

$$C_1 = -\frac{\mu\underline{I}}{2pb\sinh\left(\frac{ph}{2}\right)}.$$

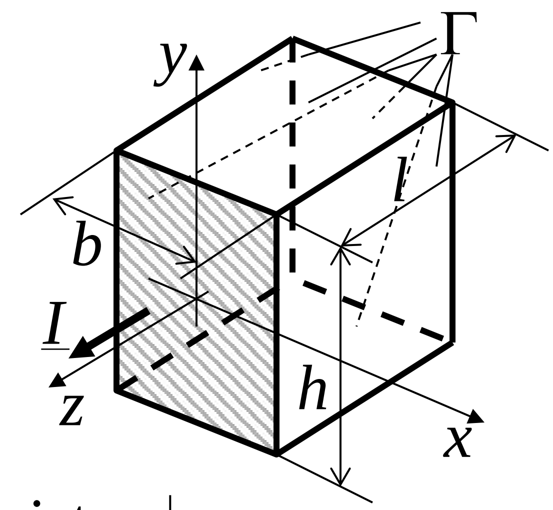
$$E(y) = \frac{j\omega\mu\underline{I}}{2pb\sinh(\frac{ph}{2})}\cosh(py) = \frac{p\underline{I}}{2\gamma b\sinh(\frac{ph}{2})}\cosh(py),$$

$$J(y) = \gamma E(y) = \frac{p\underline{I}}{2b\sinh(\frac{ph}{2})}\cosh(py),$$

$$B(y) = -\frac{\mu\underline{I}}{2b\sinh(\frac{ph}{2})}\sinh(py),$$

$$H(y) = -\frac{\underline{I}}{2b\sinh(\frac{ph}{2})}\sinh(py).$$

Impedanz des Leiterstückes der Breite *b* und Länge *l*:



$$\underline{S} = \frac{1}{2}\left|\underline{I}\right|^2 \underline{Z} = -\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma$$

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* = E(y)\mathbf{e}_z \times H^*(y)\mathbf{e}_x = E(y)H^*(y)\mathbf{e}_y$$

$\mathbf{n}=\mathbf{e}_y$ für $y = h/2$, $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$ für $y = -h/2$, sonst ist $\mathbf{n}\perp\mathbf{e}_y$.

$$\frac{1}{2}\left|\underline{I}\right|^2 \underline{Z} = -\frac{1}{2}E(y=\frac{h}{2})H^*(y=\frac{h}{2})bl + \frac{1}{2}E(y=-\frac{h}{2})H^*(y=-\frac{h}{2})bl =$$

$$= -E(y=\frac{h}{2})H^*(y=\frac{h}{2})bl = \frac{p\underline{I}\cosh(\frac{ph}{2})}{2\gamma b\sinh(\frac{ph}{2})}\frac{\underline{I}^*}{2b}bl.$$

$$\underline{Z} = \frac{pl\cosh(\frac{ph}{2})}{2\gamma b\sinh(\frac{ph}{2})}, \qquad \frac{ph}{2} = \frac{1+j}{2}\frac{h}{\delta} = \frac{1+j}{2}h\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}.$$

Niedrige Frequenzen: $\left|\frac{ph}{2}\right| << 1 \Rightarrow \cosh(\frac{ph}{2}) \approx 1, \sinh(\frac{ph}{2}) \approx \frac{ph}{2}.$

$\underline{Z} \approx \frac{l}{\gamma bh}$: wie Gleichstrom in der gesamten Höhe h.

Hohe Frequenzen: $\left|\frac{ph}{2}\right| >> 1 \Rightarrow \cosh(\frac{ph}{2}) \approx \sinh(\frac{ph}{2}).$

$\underline{Z} \approx \frac{pl}{2\gamma b} = (1+j)\frac{l}{2\gamma\delta b}$: Widerstand wie Gleichstrom oben und unten in Schichten der Dicke δ, Reaktanz gleich groß wie Widerstand.

4. Elektromagnetische Wellen

Das vollständige System der Maxwellschen Gleichungen:

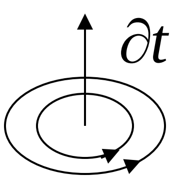
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\ rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$div\mathbf{B} = 0,\ div\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},\ \mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_e)$$

beschreibt elektromagnetische Wellen.

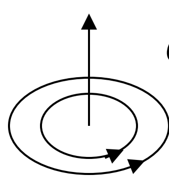
im Vakuum:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$



$\mathbf{H}(t)$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$



$\mathbf{E}(t)$

Das zeitveränderliche elektrische und magnetische Feld erzeugen einander gegenseitig: **elektromagnetisches Feld**

4.1 Ebene Wellen

Maxwellsche Gleichungen im Vakuum ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$), in Abwesenheit von Ladungen und Strömen ($\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$):

$$rot\mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad rot\mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$div\mathbf{H} = 0, \qquad div\mathbf{E} = 0.$$

$$rotrot\mathbf{H} = \underbrace{graddiv\mathbf{H}}_{=\mathbf{0}} - \Delta\mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} rot\mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{H} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \\ \text{Ähnlich:} \quad \Delta\mathbf{E} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \textit{Vektorielle 3D Wellengleichung}$$

Annahme: $\frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} = 0.$ In jeder z = konstant Ebene ist das elektromagnetische Feld konstant:

Ebene Wellen:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}:$$

Vektorielle 1D Wellengleichung.

Alle Komponenten des elektromagnetischen Feldes E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z erfüllen die skalare 1D Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \qquad \text{Lösung:} \quad f\left(t \mp \frac{z}{v}\right),\ v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c.$$

Wellen mit Ausbreitungsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit:

$$E_x(z,t) = E_x(t \mp \frac{z}{c}), \qquad E_y(z,t) = E_y(t \mp \frac{z}{c}), \quad E_z(z,t) = E_z(t \mp \frac{z}{c}),$$

$$H_x(z,t) = H_x(t \mp \frac{z}{c}), \quad H_y(z,t) = H_y(t \mp \frac{z}{c}), \quad H_z(z,t) = H_z(t \mp \frac{z}{c}).$$

Zusammenhang zwischen **E** und **H**:

$$rot\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

Ebene Wellen: $\frac{\partial}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial}{\partial z} = \mp \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}.$

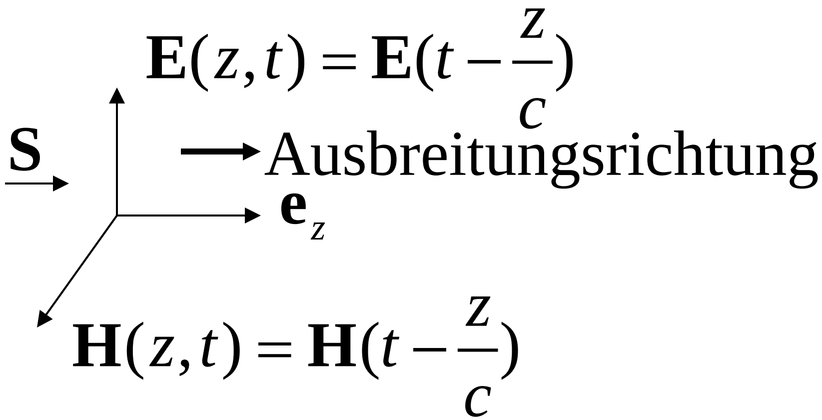
$$
rot\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \mp\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mp\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mp\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}).
$$

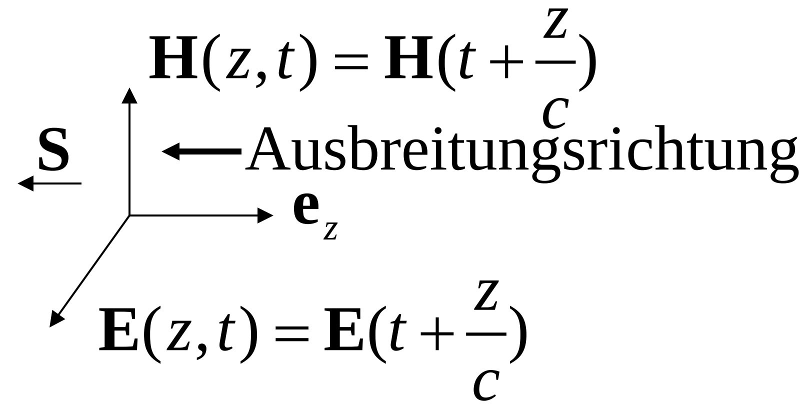
$$
\mp\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \mp\frac{1}{c}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}; \quad \boxed{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) = \mp\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\mathbf{E}.}
$$

Ähnlich aus der II. Maxwellschen Gleichung: $\boxed{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) = \pm\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{H}.}$

Obere Vorzeichen: Ausbreitung in der positiven z-Richtung,

Untere Vorzeichen: Ausbreitung in der negativen z-Richtung.





Die Richtung des Poyntingschen Vektor stimmt mit der Ausbreitungsrichtung überein.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mp \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = \pm \mathbf{e}_z \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left|\mathbf{H}\right|^2 = \pm \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \mu_0 \left|\mathbf{H}\right|^2,$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times [\pm \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E})] = \pm \mathbf{e}_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left|\mathbf{E}\right|^2 = \pm \mathbf{e}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \varepsilon_0 \left|\mathbf{E}\right|^2,$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \pm \mathbf{e}_z c \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \left|\mathbf{E}\right|^2 + \mu_0 \left|\mathbf{H}\right|^2).}$$

Allgemeinere Materialeigenschaften: $\mu, \varepsilon, \gamma =$ konstant.

Maxwellsche Gleichungen in Abwesenheit von Ladungen ($\rho = 0$):

$$rot\mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad rot\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},$$

$$div\mathbf{H} = 0, \qquad div\mathbf{E} = 0.$$

$$rotrot\mathbf{H} = \underbrace{graddiv\mathbf{H}}_{=\mathbf{0}} - \Delta\mathbf{H} = \gamma\, rot\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t} rot\mathbf{E} = -\gamma\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2},$$

$$\Delta\mathbf{H} - \gamma\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

Ähnlich: $$\Delta\mathbf{E} - \gamma\mu\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Für ebene Wellen: $\frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Völlige Analogie mit den Leitungsgleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial u}{\partial t} + RGu,$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + RGi.$$

$$\boxed{u \Leftrightarrow \mathbf{E},\ i \Leftrightarrow \mathbf{H},\ R \Leftrightarrow 0,\ L \Leftrightarrow \mu,\ G \Leftrightarrow \gamma,\ C \Leftrightarrow \varepsilon.}$$

Zeitharmonischer Fall, komplexe Schreibweise

$\mathbf{E}(z)$, $\mathbf{H}(z)$: komplexe Amplituden.

Lösung (wegen der Analogie):

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}^{+} e^{-pz} + \mathbf{E}^{-} e^{pz}, \quad \mathbf{H}(z) = \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{E}^{+}}{Z_0} e^{-pz} - \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{E}^{-}}{Z_0} e^{pz}.$$

Ausbreitungskoeffizient: $p = \sqrt{j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon)} = \alpha + j\beta,$

Wellenimpedanz: $Z_0 = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}}.$

Gedämpfte Wellen, die sich in der positiven und negativen z-Richtung ausbreiten.

Verlustloses Medium: $\gamma = 0.$

$$p = \sqrt{(j\omega\mu)(j\omega\varepsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}.$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \le c.$$

Optik: $v = \dfrac{c}{n},$ n: Brechungsindex

Maxwellsche Relation: $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r};\ \ n^2 = \varepsilon_r,}$

da für optisch durchsichtige Medien $\mu_\mathrm{r} = 1.$

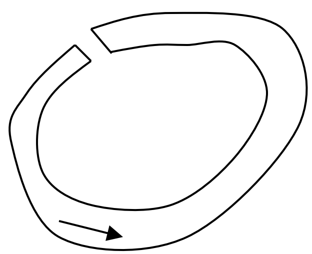
4.2 Elektromagnetische Wellen im unendlichen, homogenen Raum

Annahmen:

- die Stromdichte **J** und die Ladungsdichte ρ sind im gesamten Raum in jedem Zeitpunkt bekannt: $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ und $\rho(\mathbf{r},\mathrm{t})$ sind gegeben,
- Die Materialeigenschaften μ und ε sind im gesamten Raum konstant, z.B. $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$,
- Verlustloses Medium: $\gamma = 0$.

z. B. Antenne:

homogenes Medium
(z.B. Vakuum oder Luft: μ_0, ε_0)



$\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$

elektromagnetisches Feld: $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$

4.2.1. Lösung der Maxwellschen Gleichungen mit retardierten Potentialen

Maxwellsche Gleichungen:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$div\mathbf{B} = 0, \qquad div\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H},\ \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}.$$

Potentiale: $\mathbf{B} = rot\mathbf{A},\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} rot\mathbf{A},$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - gradV,\ \mathbf{D} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \varepsilon_0 gradV.$$

$$rot\,rot\,\mathbf{A} = grad\,div\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0\varepsilon_0\,grad\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Die Divergenz von **A** kann frei gewählt werden:

$$div\,\mathbf{A} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}:$$ Lorenz-Eichung.

$$\boxed{-\Delta\mathbf{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{J}.}$$

$$div\left(-grad\,V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\Delta V - \frac{\partial\,div\,\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Inhomogene 3D Wellengleichungen

Mit der Lorenz-Eichung:

$$\boxed{-\Delta V + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.}$$

Im statischen Fall $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ übergehen diese Gleichungen in die Laplace-Poissonschen Gleichungen $-\Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \; -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

mit den bekannten Lösungen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\Omega \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') d\Omega'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}') d\Omega'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

In Bereichen, wo die Stromdichte und die Ladungsdichte verschwinden, erhält man die Wellengleichungen

$$-\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \qquad -\Delta V + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.$$

Die Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen im unendlichen freien Raum sind

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \\ V(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \end{aligned}} \qquad (c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}).$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ und $V(\mathbf{r},t)$ sind die *retardierten* Potentiale.

Im zeitharmonischen Fall:

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $V(\mathbf{r})$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ und $\rho(\mathbf{r}')$ sind komplexe Amplituden.

Im Zeitbereich: $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')\cos[\omega(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) + \varphi(\mathbf{r}')].$

Im Frequenzbereich: $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')e^{j\varphi(\mathbf{r}')}e^{-j\omega\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}} = \mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}: \text{ Wellenzahl (Phasenfaktor).}$$

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\Omega \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}')e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.}$$

Mit Hilfe der Lorenz-Eichung, kann V eliminiert werden:

$$div\mathbf{A} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$ lautet im Frequenzbereich $div\mathbf{A} = -j\omega\mu_0\varepsilon_0 V$.

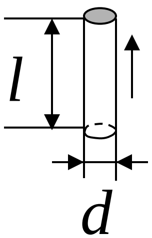
$$\boxed{V = -\frac{1}{j\omega\mu_0\varepsilon_0} div\mathbf{A}.}$$

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - gradV = -j\omega\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu_0\varepsilon_0} graddiv\mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu_0\varepsilon_0}(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\mathbf{A} + graddiv\mathbf{A}).$$

$$\boxed{\mathbf{B} = rot\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu_0\varepsilon_0}(k_0^2\mathbf{A} + graddiv\mathbf{A}).}$$

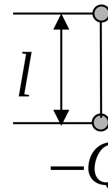
4.2.2. Der Hertzsche Dipol



$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t) \qquad l \ll \lambda = \frac{2\pi}{k_0}, \quad d \ll l.$$

$$Q(t) = \hat{Q}\sin(\omega t)$$

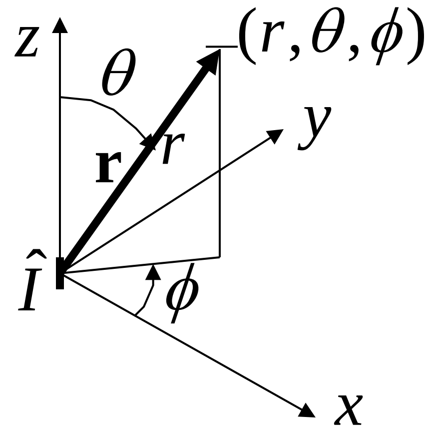
Einem Dipol äquivalent:



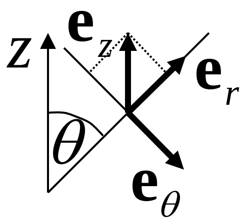
$\hat{I}$ kann als komplexer Scheitelwert des Stromes betrachtet werden.

$$\hat{I} = j\omega\hat{Q}$$

Kugelkoordinatensystem:



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{0},\ \mathbf{J}(\mathbf{0})d\Omega' = \hat{I}l\mathbf{e}_z,\ |\mathbf{r}| = r.$$



$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\sin\theta.$$

Die Integration entfällt, da der Integrand konstant ist:

$$\mathbf{A}(r,\theta,\phi) = \frac{\mu_0\hat{I}l}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}(\mathbf{e}_r\cos\theta - \mathbf{e}_\theta\sin\theta).$$

Magnetfeld:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} rot\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin\theta}\mathbf{e}_r & \frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\theta & \frac{1}{r}\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ A_r & rA_\theta & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\mu_0 r}[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}].$$

$$\mathbf{H} = \frac{\hat{I}l}{4\pi} e^{-jk_0 r} (\frac{1}{r^2} + j\frac{k_0}{r}) \sin\theta \mathbf{e}_\phi .$$

$$\boxed{H_r = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\phi = \frac{\hat{I}l}{4\pi} jk_0 (1 + \frac{1}{jk_0 r}) \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta.}$$

Elektrisches Feld: $\mathbf{E} = \dfrac{1}{j\omega\mu_0\varepsilon_0}(k_0^2\mathbf{A} + grad div\mathbf{A}).$

$$div\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} = \frac{\mu_0 \hat{I}l}{4\pi}e^{-jk_0 r}(-\frac{1}{r^2} - \frac{jk_0}{r})\cos\theta,$$

$$\left(grad div\mathbf{A}\right)_r = \frac{\partial div\mathbf{A}}{\partial r} = \frac{\mu_0 \hat{I}l}{4\pi}e^{-jk_0 r}(\frac{2}{r^3} + 2\frac{jk_0}{r^2} - \frac{k_0^2}{r})\cos\theta,$$

$$\left(grad div\mathbf{A}\right)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial div\mathbf{A}}{\partial\theta} = \frac{\mu_0 \hat{I}l}{4\pi}e^{-jk_0 r}(\frac{1}{r^3} + \frac{jk_0}{r^2})\sin\theta,$$

$$E_r = \frac{\hat{I}l}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}(1 + \frac{1}{jk_0 r})\frac{e^{-jk_0 r}}{r^2}\cos\theta,$$

$$E_\theta = \frac{\hat{I}l}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}jk_0[1 + \frac{1}{jk_0 r} + \frac{1}{(jk_0 r)^2}]\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\sin\theta, \quad E_\phi = 0.$$

$$\boxed{\text{Nahfeld: } k_0 r = 2\pi \frac{r}{\lambda} \ll 1.}$$

$$H_\phi = \frac{\hat{I}l}{4\pi} jk_0 (1 + \frac{1}{jk_0 r}) \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta \approx \frac{\hat{I}l}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r^2} \sin\theta.$$

Biot-Savart: $$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{\mathbf{r}' \to \mathbf{r}}}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|^2} d\Omega' \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{I}l}{4\pi} \frac{\overbrace{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r}^{\mathbf{e}_\phi}}{r^2}.$$

$$E_r = \frac{\hat{I}l}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (1 + \frac{1}{jk_0 r}) \frac{e^{-jk_0 r}}{r^2} \cos\theta \approx \frac{\hat{Q}l}{2\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-jk_0 r}}{r^3} \cos\theta,$$

$$E_\theta = \frac{\hat{I}l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} jk_0 [1 + \frac{1}{jk_0 r} + \frac{1}{(jk_0 r)^2}] \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta \approx \frac{\hat{Q}l}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-jk_0 r}}{r^3} \sin\theta.$$

Statisches Dipolfeld: $$E_r = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

$$\boxed{\text{Fernfeld: } k_0 r = 2\pi \frac{r}{\lambda} \gg 1.}$$

$$H_\phi = \frac{\hat{I}l}{4\pi} jk_0 (1 + \frac{1}{jk_0 r}) \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta \approx \frac{\hat{I}l}{4\pi} j\beta \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta = \boxed{\frac{j\hat{I}}{2} \frac{l}{\lambda} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta.}$$

$$E_r = \frac{\hat{I}l}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (1 + \frac{1}{jk_0 r}) \frac{e^{-jk_0 r}}{r^2} \cos\theta \approx 0,$$

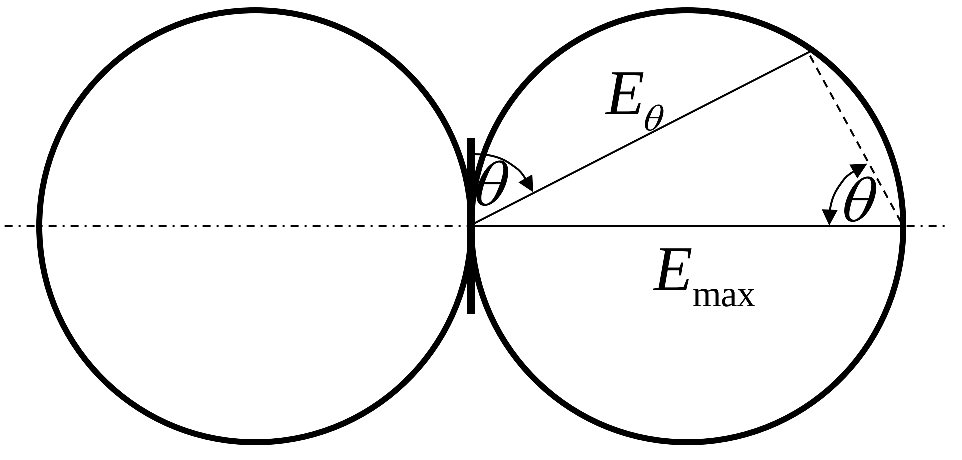
$$E_\theta = \frac{\hat{I}l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} jk_0 [1 + \frac{1}{jk_0 r} + \frac{1}{(jk_0 r)^2}] \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta \approx \frac{\hat{I}l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta =$$

$$= \boxed{\frac{j\hat{I}}{2} \frac{l}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta.}$$

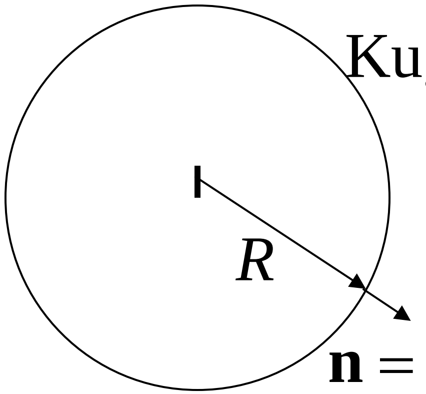
$$\frac{E_\theta^{(Fern)}}{H_\phi^{(Fern)}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 \approx 120\pi\,\Omega \approx 377\,\Omega.$$

$$E_\theta^{(Fern)}(\theta) = E_0(r)\sin\theta,$$

$$\frac{E_\theta^{(Fern)}(\theta)}{E_\theta^{(Fern)}(\theta_{\max})} = \sin\theta : \text{ Strahlungscharakteristik.}$$



Ausgestrahlte Leistung:



Kugel $R \gg \lambda$: Fernfeld.

$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* = \frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* \mathbf{e}_r .$$

$$\frac{1}{2}E_\theta H_\phi^* = \frac{\left|\hat{I}\right|^2}{8}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{R^2}\sin^2\theta.$$

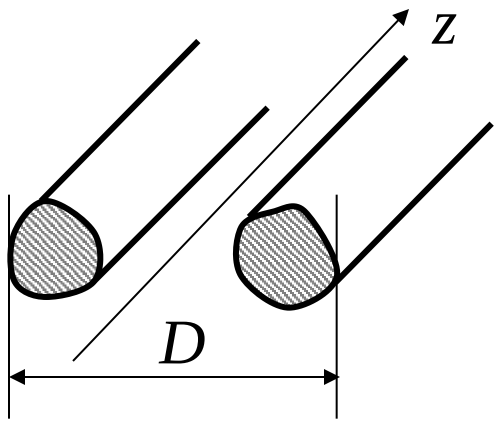
$$P = \oint_{Kugel} \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma. \quad d\Gamma = Rd\theta R\sin\theta d\phi = R^2\sin\theta d\theta d\phi.$$

$$P = \frac{\left|\hat{I}\right|^2}{8}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta d\phi = \frac{\left|\hat{I}\right|^2\pi}{4}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta}_{4/3} =$$

$$= \frac{\left|\hat{I}\right|^2\pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{2}R_s\left|\hat{I}\right|^2. \quad R_s \approx 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2: \text{ Strahlungswiderstand.}$$

4.3 Geführte Wellen

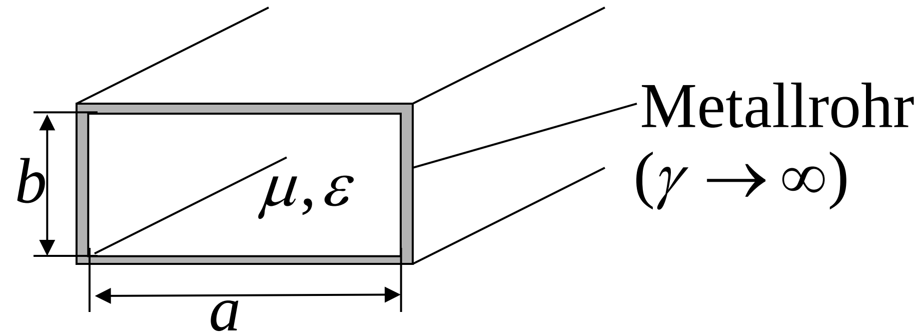
Leitungen: transversale (x, y) Abmessungen wesentlich kleiner als die Wellenlänge.



$$D \ll \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{v}{f}.$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist: *Wellenleiter*.

z.B.: Hohlleiter



Annahmen:

- Sinusförmige Zeitabhängigkeit: *alle Größen sind komplexe Amplituden*,
- Materialeigenschaften sind konstant:
  μ, ε = konstant,
- Verlustloses Medium: $\gamma = 0$,
- Keine freie Ladungen vorhanden: $\rho = 0$.

4.3.1 TM- und TE-Wellen

Wellengleichungen für die Potentiale **A** und *V*:

Im Zeitbereich:

$$-\Delta\mathbf{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \qquad -\Delta V + \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.$$

Im Frequenzbereich:

$$-\Delta\mathbf{A} - \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{A} = \mathbf{0}, \qquad -\Delta V - \omega^2\mu\varepsilon V = \mathbf{0},$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}: \qquad \boxed{-\Delta\mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = \mathbf{0}.}$$

Elektromagnetisches Feld, falls $\mathbf{A}(x,y,z) = A(x,y,z)\mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} rot(A\mathbf{e}_z) = \frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}[k^2 A\mathbf{e}_z + graddiv(A\mathbf{e}_z)] =$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}[\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}\mathbf{e}_y + (\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A)\mathbf{e}_z].$$

$H_z = 0$: die longitudinale Komponente des Magnetfeldes ist Null.

Das Magnetfeld ist transversal: *TM-Wellen*.

Alternative zu den Potentialen **A** und *V*:

$$\boxed{\mathbf{D} = rot\mathbf{F},\ \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} rot\mathbf{F},}$$

$$rot\mathbf{H} - j\omega\mathbf{D} = rot(\mathbf{H} - j\omega\mathbf{F}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\mathbf{H} &= j\omega\mathbf{F} - grad\psi,\\ \mathbf{B} &= j\omega\mu\mathbf{F} - \mu grad\psi.\end{aligned}}$$

$\mathbf{F}$: elektrisches Vektorpotential, ψ: magnetisches Skalarpotential.

$$rot\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} : rotrot\mathbf{F} = graddiv\mathbf{F} - \Delta\mathbf{F} = -j\omega\mu\varepsilon(j\omega\mathbf{F} - grad\psi).$$

Lorenz-Eichung: $\quad div\mathbf{F} = j\omega\mu\varepsilon\psi.$

$$-\Delta\mathbf{F} - \omega^2\mu\varepsilon\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad div\mathbf{B} = 0 \Rightarrow -\Delta\psi - \omega^2\mu\varepsilon\psi = 0.$$

$$\boxed{-\Delta\mathbf{F} - k^2\mathbf{F} = \mathbf{0} :} \quad \text{Wellengleichung.}$$

Mit Hilfe der Lorenz-Eichung, kann ψ eliminiert werden:

$$div\mathbf{F} = j\omega\mu\varepsilon\psi \Rightarrow \boxed{\psi = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} div\mathbf{F}.}$$

$$\mathbf{H} = j\omega\mathbf{F} - grad\psi = j\omega\mathbf{F} - \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon} graddiv\mathbf{F} =$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}(\omega^2\mu\varepsilon\mathbf{F} + graddiv\mathbf{F}).$$

$$\boxed{\mathbf{D} = rot\mathbf{F}, \qquad \mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}(k^2\mathbf{F} + graddiv\mathbf{F}).}$$

Elektromagnetisches Feld, falls $\mathbf{F}(x,y,z)=F(x,y,z)\mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon}rot(F\mathbf{e}_z)=\frac{1}{\varepsilon}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & F\end{vmatrix}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{e}_x-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{H}=-\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}[k^2F\mathbf{e}_z+graddiv(F\mathbf{e}_z)]=$$

$$=-\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\mathbf{e}_x+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\mathbf{e}_y+(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+k^2F)\mathbf{e}_z].$$

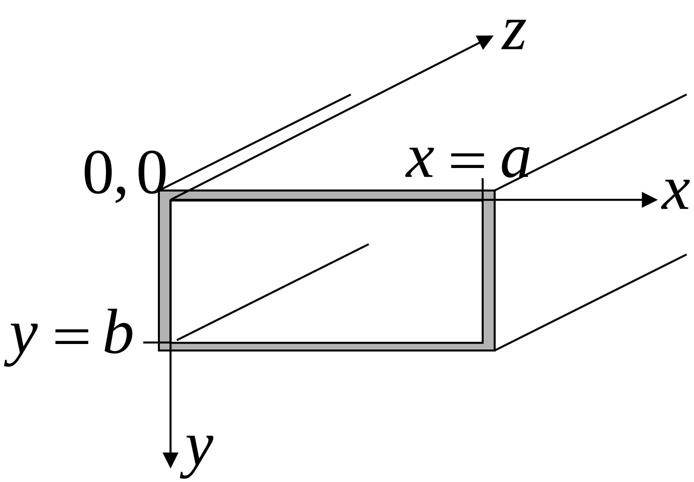
$E_z=0$: die longitudinale Komponente des elektrischen Feldes ist Null.

Das elektrische Feld ist transversal: *TE-Wellen*.

Die allgemeine Lösung der Maxwellschen Gleichungen in homogenen Medien kann als die Superposition von TM- und TE-Wellen dargestellt werden.

Die einkomponentigen Vektorpotentialfunktionen erlauben damit die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes mit Hilfe von zwei Skalarfunktionen.

4.3.2 Wellen in rechteckigen Hohlleitern



Annahme:
Wellenausbreitung in der positiven z-Richtung.

TM-Wellen: $\mathbf{A}(x,y,z) = A(x,y,z)\mathbf{e}_z = A(x,y)e^{-j\beta z}\mathbf{e}_z,$

TE-Wellen: $\mathbf{F}(x,y,z) = F(x,y,z)\mathbf{e}_z = F(x,y)e^{-j\beta z}\mathbf{e}_z.$

Randbedingungen: $\mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{0}$ an den Wänden des Hohlleiters.

$$E_y = 0, E_z = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = a,$$

$$E_x = 0, E_z = 0 \text{ für } y = 0 \text{ und } y = b.$$

Randbedingungen für die Potentiale: $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta, \ \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2.$

TM-Wellen: $$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 A\right)\mathbf{e}_z\right] =$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[j\beta\frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{e}_x + j\beta\frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{e}_y + (\beta^2 - k^2)A\mathbf{e}_z\right].$$

$\boxed{A = 0 \ \text{ für } x = 0, x = a, \ y = 0 \text{ und } y = b,}$ Dirichletsche R.B.

TE-Wellen: $$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{e}_y.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \ \text{ für } x = 0 \text{ und } x = a, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \ \text{ für } y = 0 \text{ und } y = b,\end{gathered}}$$

Neumannsche R.B.

TM-Wellen: $-\Delta\mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = \mathbf{0}, \qquad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}.$

$$\mathbf{A}(x,y,z) = A(x,y)e^{-j\beta z}\mathbf{e}_z :$$

$$\boxed{-\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \beta^2 A - k^2 A = 0.}$$

Lösung mit Separationsmethode: $A(x,y) = X(x)Y(y).$

$$-Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2} - X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + (\beta^2 - k^2)X(x)Y(y) = 0,$$

$$-\underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}}_{f(x)} - \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}}_{g(y)} + \beta^2 - k^2 = 0.$$

Dies ist nur dann möglich, wenn $f(x) = \text{konstant}, \; g(y) = \text{konstant}.$

Man erhält die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = fX(x), \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = gY(y).$$

Lösung:

$$f = -k_x^2, \; g = -k_y^2 : \quad X(x) = C_{1x} \cos k_x x + C_{2x} \sin k_x x,$$

$$Y(y) = C_{1y} \cos k_y y + C_{2y} \sin k_y y.$$

Randbedingungen: $X(0) = X(a) = 0 \Rightarrow C_{1x} = 0, \; k_x = m\dfrac{\pi}{a}, \; m = 1, 2, \ldots ,$

$$Y(0) = Y(b) = 0 \Rightarrow C_{1y} = 0, \; k_y = n\frac{\pi}{b}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

TM_{mn}-Wellen:

$$C = C_{2x}C_{2y}: \qquad A(x,y,z) = C\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z}.$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{e}_y: \quad H_x = \frac{C}{\mu}\frac{n\pi}{b}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z},$$

$$H_y = -\frac{C}{\mu}\frac{m\pi}{a}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z},$$

$$H_z = 0.$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}[j\beta\frac{\partial A}{\partial x}\mathbf{e}_x + j\beta\frac{\partial A}{\partial y}\mathbf{e}_y + (\beta^2 - k^2)A\mathbf{e}_z]:$$

$$E_x = -\frac{C\beta}{\omega\mu\varepsilon}\frac{m\pi}{a}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z},$$

$$E_y = -\frac{C\beta}{\omega\mu\varepsilon}\frac{n\pi}{b}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z},$$

$$E_z = \frac{C(k^2 - \beta^2)}{j\omega\mu\varepsilon}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z}.$$

TE-Wellen: $-\Delta \mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} = \mathbf{0}, \qquad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}.$

$\mathbf{F}(x, y, z) = F(x, y) e^{-j\beta z} \mathbf{e}_z :$

$$\boxed{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \beta^2 F - k^2 F = 0.}$$

Lösung mit Separationsmethode: $F(x, y) = X(x) Y(y).$

$$-Y(y)\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - X(x)\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + (\beta^2 - k^2) X(x) Y(y) = 0,$$

$$\underbrace{-\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}_{f(x)} \underbrace{-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{dy^2}}_{g(y)} + \beta^2 - k^2 = 0.$$

Dies ist nur dann möglich, wenn $f(x) = \text{konstant}, \; g(y) = \text{konstant}.$

Man erhält die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = fX(x),\ \frac{d^2Y(y)}{dy^2} = gY(y).$$

Lösung:

$$f = -k_x^2,\ g = -k_y^2:\quad X(x) = C_{1x}\cos k_x x + C_{2x}\sin k_x x,$$

$$Y(y) = C_{1y}\cos k_y y + C_{2y}\sin k_y y.$$

Randbedingungen:

$$\frac{dX(0)}{dx} = \frac{dX(a)}{dx} = 0 \Rightarrow C_{2x} = 0,\ k_x = m\frac{\pi}{a},\ m = 0,1,2,\dots,$$

$$\frac{dY(0)}{dy} = \frac{dY(b)}{dy} = 0 \Rightarrow C_{2y} = 0,\ k_y = n\frac{\pi}{b},\ n = 0,1,2,\dots.$$

TE$_{mn}$-Wellen:

$$C = C_{1x} C_{1y}: \quad F(x,y,z) = C\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z}.$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{e}_y : E_x = -\frac{C}{\varepsilon}\frac{n\pi}{b}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z},$$

$$E_y = \frac{C}{\varepsilon}\frac{m\pi}{a}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z},$$

$$E_z = 0.$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}[j\beta\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{e}_x + j\beta\frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{e}_y + (\beta^2 - k^2)F\mathbf{e}_z]:$$

$$H_x = -\frac{C\beta}{\omega\mu\varepsilon}\frac{m\pi}{a}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z},$$

$$H_y = -\frac{C\beta}{\omega\mu\varepsilon}\frac{n\pi}{b}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z},$$

$$H_z = \frac{C(\beta^2 - k^2)}{j\omega\mu\varepsilon}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z}.$$

Erfüllung der Separationsgleichung: $-f-g+\beta^2-k^2=0.$

$$k_x^2+k_y^2+\beta^2-k^2=0, \quad k_x=\frac{m\pi}{a},\ k_y=\frac{n\pi}{b},\ k^2=\omega^2\mu\varepsilon.$$

$$\boxed{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2+\beta^2-\omega^2\mu\varepsilon=0,} \qquad m, n = (0), 1, 2, \ldots .$$

Bei gegebenen Werten von *n* und *m* (Wellenformen), ist die Kreisfrequenz nicht beliebig: β^2 darf nicht negativ werden!

Wäre $\beta^2<0$, hätte man $\beta=\pm j\alpha,\ -j\beta=\mp\alpha \Rightarrow e^{-j\beta z}=e^{\mp\alpha z}$:

nur Dämpfung, keine Wellenausbreitung.

$$\beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \omega \geq \underbrace{\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}_{2\pi f_g}.$$

$$f \geq f_g = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

f_g: *Grenzfrequenz.*

Eine bestimmte Wellenform ist nur für Frequenzen über der Grenzfrequenz ausbreitungsfähig.