

Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung

# Elektrodynamik

*(437.257)*

von

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Oszkár Bíró

# Inhalt

## 1. Das elektrostatische Feld

1.1 Die elektrische Ladung, Ladungsverteilungen

1.2 Das Coulomb'sche Gesetz

1.3 Die elektrische Feldstärke

1.3.1 Elektrische Feldstärke von Ladungen im Vakuum

1.3.2 Potentielle Energie einer Punktladung im elektrostatischen Feld

1.3.3 Die Wirbelfreiheit der elektrostatischen Feldstärke

1.3.4 Das elektrostatische Potential, die Spannung

1.3.5 Energie und Potential einer Ladungsverteilung

1.4 Die elektrische Flussdichte (elektrische Verschiebung)

1.4.1 Das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik

1.4.2 Elektrische Flussdichte einer Punktladung

1.4.3 Elektrische Flussdichte einer beliebigen Ladungsverteilung

1.4.4 Verhalten der elektrischen Flussdichte auf einer Fläche mit einer  
Flächenladungsdichte

1.5 Leiter im elektrostatischen Feld (Influenz)

1.6 Kondensatoren und Kapazität

1.6.1 Teilkapazitäten von mehreren Leitern

1.6.2 Im Kondensator gespeicherte Energie

## 1.7 Methode der fiktiven Ladungen

### 1.7.1 Das Spiegelungsprinzip

## 1.8 Energie und Kräfte im elektrischen Feld

### 1.8.1 Energieinhalt des elektrischen Feldes

### 1.8.2 Kräfte auf Leiter im elektrischen Feld

### 1.8.3 Prinzip der virtuellen Verschiebung

### 1.8.4 Der elektrische Dipol

### 1.8.5 Kräfte auf einen elektrischen Dipol

## 1.9 Elektrische Felder in Materie

### 1.9.1 Atomare und molekulare Dipole

### 1.9.2 Polarisationsdichte und die elektrische Flussdichte

### 1.9.3 Grenzflächenbedingungen

# 2. Das stationäre elektrische Strömungsfeld

## 2.1 Elektrischer Strom, Stromdichte

## 2.2 Kontinuitätsgleichung, Ladungserhaltung

## 2.3 Das Ohm'sche Gesetz

## 2.4 Grenzflächenbedingungen

## 2.5 Analogie zwischen dem stationären Strömungsfeld und dem elektrostatischen Feld

## 2.6 Die Leistung im elektrischen Strömungsfeld

## 2.7 Medien mit Permittivität und Leitfähigkeit

## 3. Das stationäre Magnetfeld

### 3.1 Magnetische Kräfte

### 3.2 Kraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leiter (unendlich lange Stromfäden)

### 3.3 Die magnetische Feldstärke, Flussdichte

#### 3.3.1 Flussdichte eines unendlich langen geraden Stromfadens

#### 3.3.2 Der magnetische Fluss, die Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte

### 3.4 Die magnetische Erregung

#### 3.4.1 Der Ampere'sche Durchflutungssatz

#### 3.4.2 Magnetische Erregung eines unendlich langen Stromfadens

#### 3.4.3 Zusammenhang zwischen der Flussdichte und Erregung im Vakuum

#### 3.4.4 Beispiele zum Durchflutungssatz

#### 3.4.5 Das Biot-Savart'sche Gesetz

### 3.5 Induktivität, Gegeninduktivität

### 3.6 Kräfte im magnetischen Feld

#### 3.6.1 Der Hall-Effekt

#### 3.6.2 Der magnetische Dipol

#### 3.6.3 Kräfte auf einen magnetischen Dipol

### 3.7 Magnetische Felder in Materie

#### 3.7.1 Atomare magnetische Dipole

#### 3.7.2 Magnetisierung und magnetische Erregung

#### 3.7.3 Grenzflächenbedingungen

#### 3.7.4 Nichtlinearität, Hysterese, die B/H Kennlinie

## 4. Elektromagnetische Induktion

### 4.1 Bewegungsinduktion

#### 4.1.1 Bewegung eines stabförmigen Leiters in einem homogenen Magnetfeld

#### 4.1.2 Bewegung einer rechteckigen Drahtschleife in einem homogenen Magnetfeld

#### 4.1.3 Bewegung der Leiterschleife in einem inhomogenen Magnetfeld

#### 4.1.4 Fluss durch die bewegte Schleife

### 4.2 Zeitlich veränderliches Magnetfeld: Das Faraday'sche Induktionsgesetz

### 4.3 Die Lenz'sche Regel

### 4.4 Energie im magnetischen Feld

#### 4.4.1 Energieinhalt des magnetischen Feldes

#### 4.4.2 Magnetische Energie bei Anwesenheit ferromagnetischer Werkstoffe

#### 4.4.3 Virtuelle Verschiebung

## 5. Elektromagnetische Wellen

5.1 Zeitlich veränderliches elektrisches Feld: der Verschiebungsstrom

5.2 Die Maxwell'sche Ergänzung des Durchflutungssatzes

5.3 Leitungen

5.3.1 Verteilte Netzwerkparameter

5.3.2 Die Leitungsgleichungen

5.3.3 Lösung der Leitungsgleichungen im Frequenzbereich

5.3.4 Ideale Leitung

5.3.5 Abschluss von Leitungen

## 6. Die Maxwell'schen Gleichungen

6.1 Die integrale Form der Maxwell'schen Gleichungen

6.2 Vektoranalysis

6.2.1 Gradient eines Skalarfeldes

6.2.2 Divergenz eines Vektorfeldes, der Gauß'sche Integralsatz

6.2.3 Die Rotation eines Vektorfeldes, der Stokes'sche Satz

6.2.4 Gradient, Divergenz und Rotation in orthogonalen  
Koordinatensystemen, der Nabla-Operator

6.3 Die differentielle Form der Maxwell'schen Gleichungen

# 1. Das elektrostatische Feld

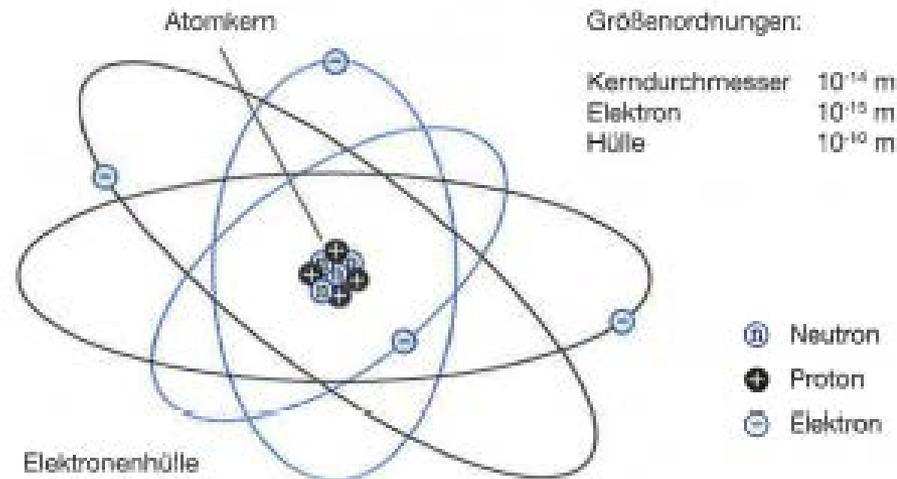
## 1.1 Die elektrische Ladung

- Kraft zwischen Objekten, welche durch Reibung „elektrifiziert“ werden.
- Ursache dafür: Ladungstrennung
- Kraft kann abstoßend oder anziehend sein: zwei Arten von Ladung => positiv oder negativ: Vorzeichen von  $Q$
- Einheit der *Ladung*:  $[Q] = 1 \text{ C (Coulomb)} = 1 \text{ As}$
- Ladungserhaltung: Ladungsmenge in einem abgeschlossenen System bleibt konstant

Ladung ist quantisiert: es existiert eine kleinste, weiter nicht teilbare Ladungsmenge:

$$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Bohr'sches Atommodell:

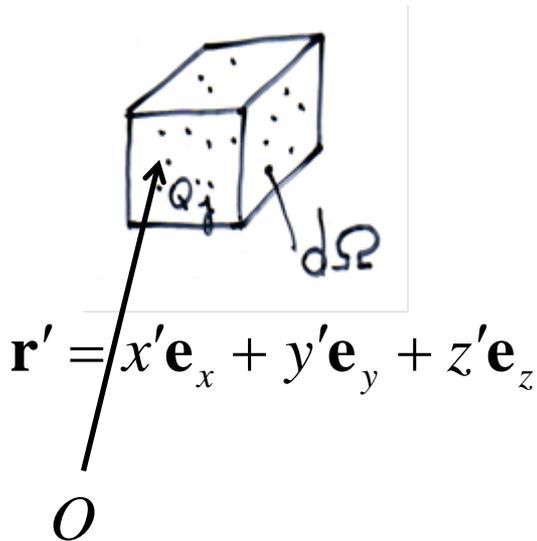


Manfred Albach: Grundlagen der Elektrotechnik 1

Elektron hat eine Ladung von  $-e$   
Proton hat eine Ladung von  $e$

Die diskrete Verteilung der Ladungen kann in der klassischen Elektrodynamik außer Acht gelassen werden.

Es wird angenommen, dass die Ladungsverteilung durch eine stetige Funktion der Ortskoordinaten beschrieben werden kann => Makroskopische „Verschmierung“ einer diskreten Ansammlung vieler Punktladungen zu einer Ladungsdichte.



Volumenelement  $d\Omega = dx' dy' dz'$  in kartesischen Koordinaten.

Das Volumenelement  $d\Omega$  ist nicht infinitesimal klein im Sinne der Infinitesimalrechnung, es befinden sich in  $d\Omega$  noch immer „sehr viele“ Elementarladungen!

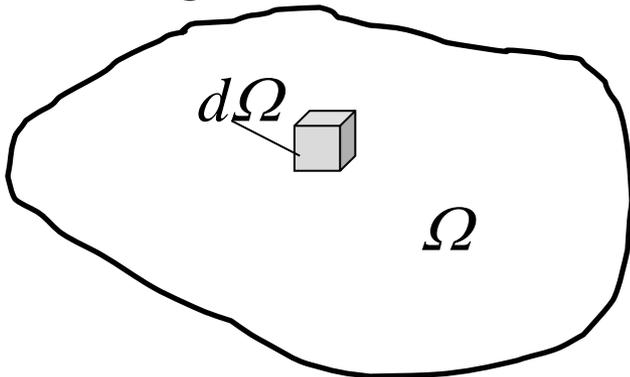
$$dQ = \sum_{j=1}^N Q_j$$

$$\rho(x', y', z') = \frac{\sum_{j=1}^N Q_j}{d\Omega} : \text{Raumladungsdichte} \quad dQ = \rho(x', y', z') d\Omega$$

$$[\rho] = 1 \frac{C}{m^3} \quad \rho \text{ ist eine Feldgröße (eine Funktion der Ortskoordinaten): } \rho = \rho(\mathbf{r})$$

Die Raumladungsdichte  $\rho$  ist, makroskopisch gesehen, eine kontinuierliche Ladungsverteilung.

Die Ladung in einem Volumen  $\Omega$ : 
$$Q_\Omega = \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

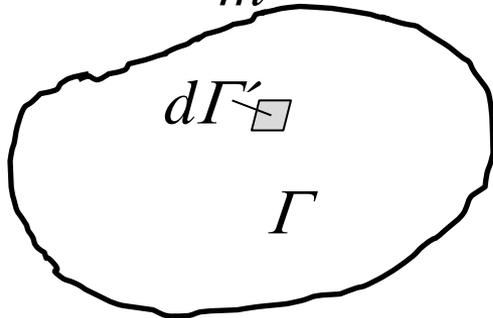


$Q_\Omega$  ist eine integrale Größe (von den Ortskoordinaten unabhängig)

## Flächenladungsdichte $\sigma$

$$[\sigma] = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$dQ = \sigma(x', y', z') d\Gamma'$$

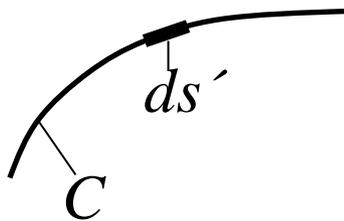


$$Q_\Gamma = \int_\Gamma \sigma d\Gamma'$$

## Linienladungsdichte $\tau$

$$[\tau] = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}}$$

$$dQ = \tau(x', y', z') ds'$$

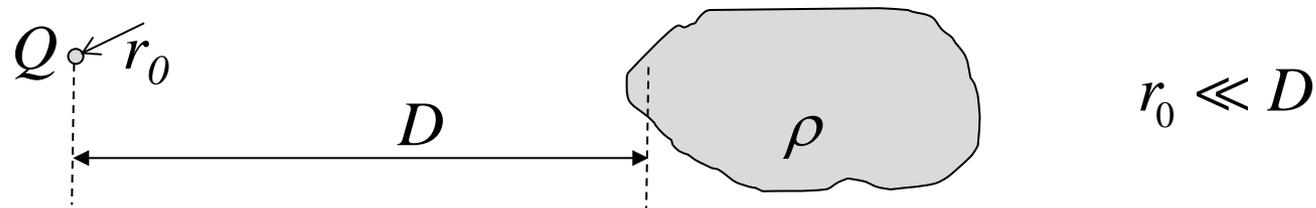


$$Q_C = \int_C \tau ds'$$

Die Ladungsdichten sind Feldgrößen.

## *Punktladung*

Physikalisches Modell: geladener Körper, dessen Abmessungen viel kleiner als die Abstände des gerade untersuchten Problems sind



Mathematisches Modell: Ladung, welche in einem Punkt konzentriert ist

The diagram shows a mathematical model of a point charge. A point charge  $Q$  is shown at position  $\mathbf{r}'$  relative to an origin  $O$ .

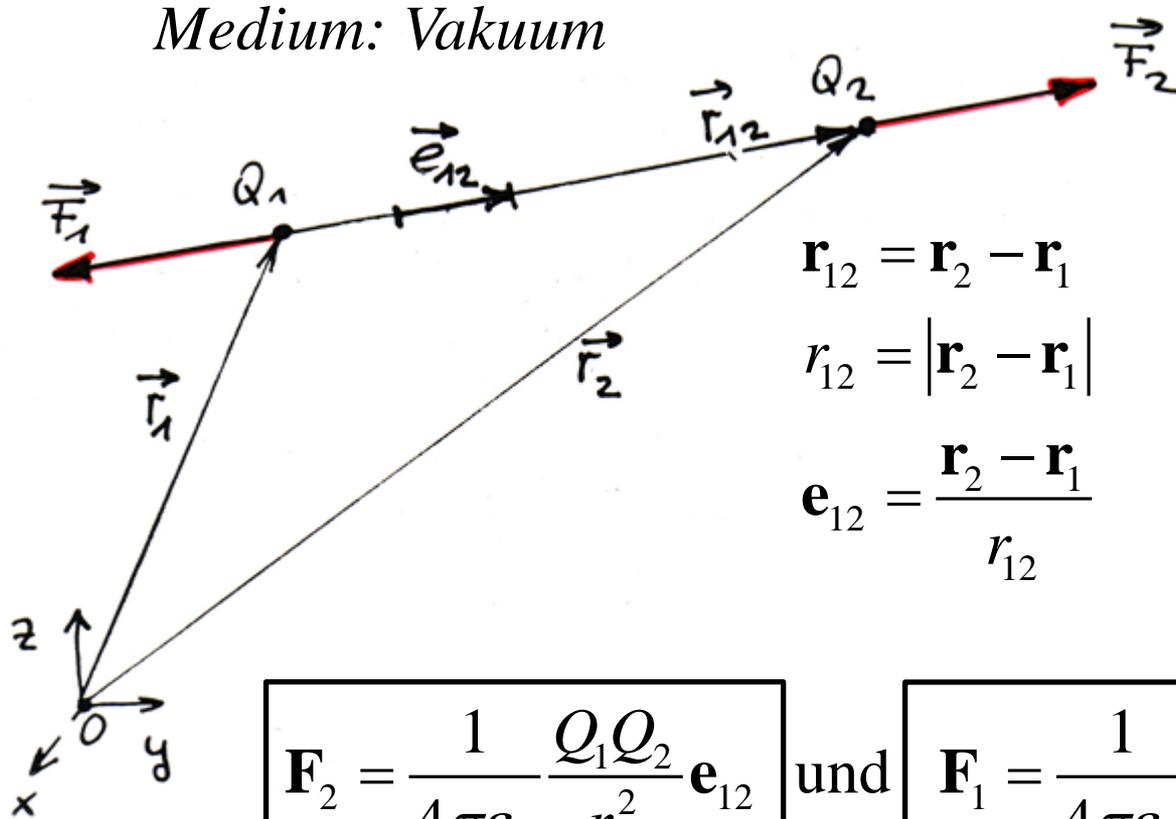
$$\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Dirac-Funktion  $\delta(\mathbf{r})$  in 3D:

$$\int_{\mathbb{R}^3} w(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r})d\Omega = w(0)$$

# 1.2 Das Coulomb'sche Gesetz

Medium: Vakuum



$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r_{12}}$$

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_{12}$$

$$r_{21} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r_{12}$$

$$\mathbf{e}_{21} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{r_{21}} = -\mathbf{e}_{12}$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}$$

und

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^2} \mathbf{e}_{21} = -\mathbf{F}_2$$

Die Konstante  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  gilt im Einheitssystem SI:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 8,9876 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{VAsm^2}{mA^2s^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Vm}{As}$$

$$\epsilon_0 \cong 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \approx \frac{10^{-9} F}{36\pi m} :$$

*Permittivität* des leeren Raumes (Vakuum)

Nach den neuesten Messungen (1971) gilt die Abhängigkeit vom Abstand  $r$  als  $1/r^2$  mit einer Genauigkeit von  $\delta < 10^{-15}$ , wenn die Annahme

$$F \sim \frac{1}{r^{2\pm\delta}} \text{ getroffen wird.}$$

# Additivität der elektrischen Kräfte, Superpositionsprinzip

Drei Messungen:

$$\mathbf{F}_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_1}{r_{13}^2} \mathbf{e}_{13}$$

Erste Messung;  $Q_2$  unendlich weit entfernt

$$\mathbf{F}_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_2}{r_{23}^2} \mathbf{e}_{23}$$

Zweite Messung;  $Q_1$  unendlich weit entfernt

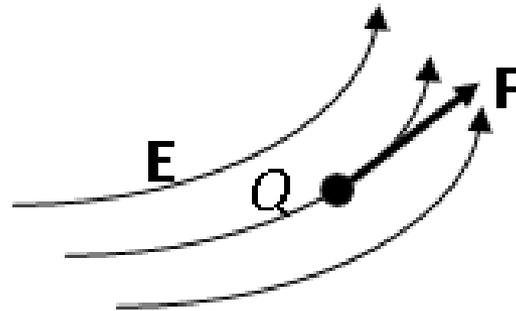
$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_1}{r_{13}^2} \mathbf{e}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_2}{r_{23}^2} \mathbf{e}_{23}$$

Dritte Messung; alle Ladungen platziert

## 1.3 Die elektrische Feldstärke

Mit Hilfe der *elektrischen Feldstärke* kann die Kraft auf eine Punktladung als Nahwirkung beschrieben werden.

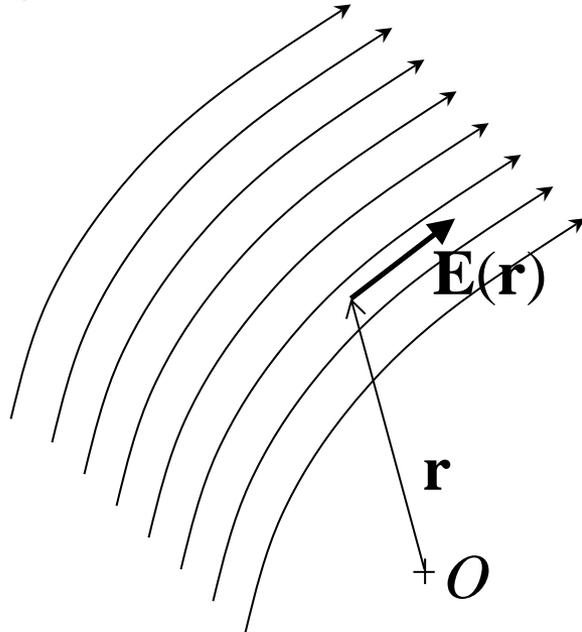
$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$$



Die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  ist im Aufpunkt vorhanden und übt auf eine sich dort befindende Ladung  $Q$  eine Kraft  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$  aus (lokale Beziehung).

$$\text{Einheit der elektrischen Feldstärke: } [\mathbf{E}] = 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{VAs}{m} \frac{1}{As} = 1 \frac{V}{m}$$

**E** ist eine Feldgröße: eine Vektorfunktion der Ortskoordinaten  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ .



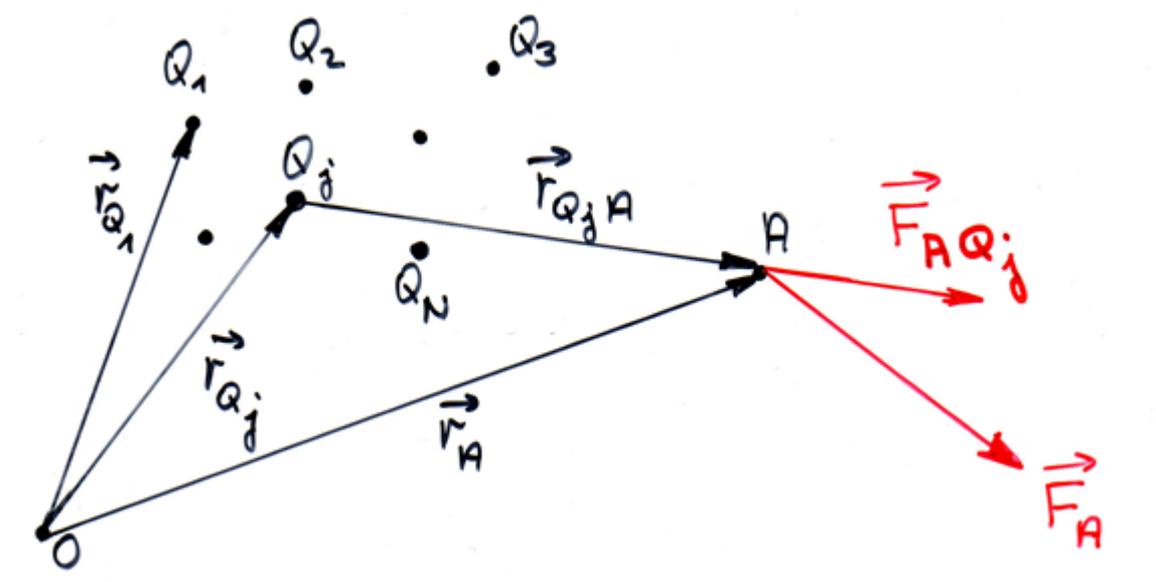
Bei der Messung der elektrischen Feldstärke mit Hilfe der Beziehung

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}$$

aus der Kraft  $\mathbf{F}$  auf eine Probeladung  $Q$  ist darauf zu achten, dass die Probeladung die Verteilung der Ladungen, welche das elektrische Feld hervorrufen, nicht ändert. Falls diese Ladungen mechanisch fixiert sind, spielt die Größe von  $Q$  keine Rolle. Wenn sie frei beweglich sind, soll  $Q$  klein sein.

### 1.3.1 Elektrische Feldstärke von Ladungen im Vakuum

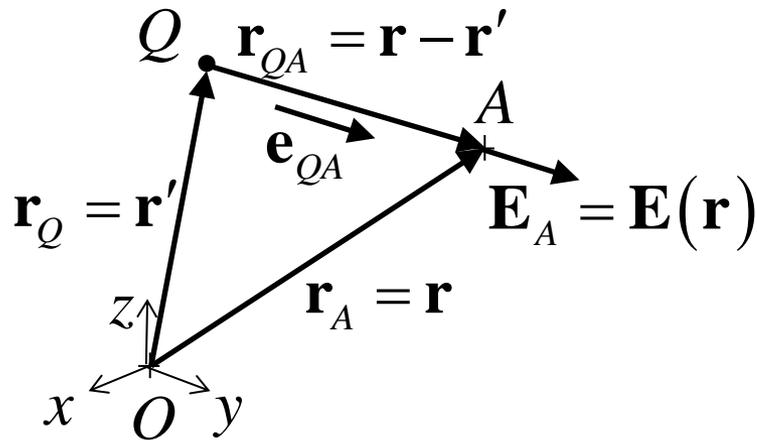
Anordnung von  $N$  Punktladungen. Die Probeladung  $Q_A$  befindet sich im Aufpunkt  $A$



$\mathbf{r}_{Q_j} \dots$  Quellpunktsvektor  
 $\mathbf{r}, \mathbf{r}_A \dots$  Aufpunktsvektor  
 $\mathbf{r}_{Q_jA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_j}$

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F} = \sum_{j=1}^N \frac{Q_A Q_j \mathbf{e}_{Q_jA}}{4\pi\epsilon_0 r_{Q_jA}^2} \quad \mathbf{E}_A = \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_A}{Q_A} = \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{Q_jA}^2} \frac{\mathbf{r}_{Q_jA}}{|\mathbf{r}_{Q_jA}|}$$

## Spezialfall $N = 1$ : elektrische Feldstärke einer Punktladung im Vakuum



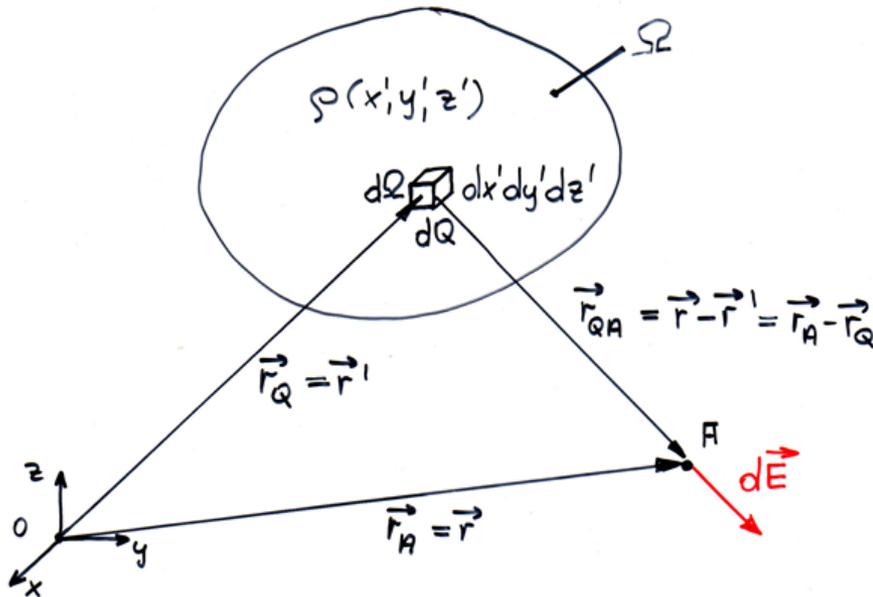
$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_{QA} = \frac{\mathbf{r}_{QA}}{|\mathbf{r}_{QA}|} = \frac{\mathbf{r}_{QA}}{r_{QA}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{QA}^2} \mathbf{e}_{QA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Raumladung mit Dichte  $\rho$  verteilt in einem Volumen  $\Omega$ :



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}') dx' dy' dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'$$

Falls  $\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , d.h. Punktladung:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$

Flächenladung mit Dichte  $\sigma$  verteilt auf einer Fläche  $\Gamma$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Gamma'$$

Linienladung mit Dichte  $\tau$  verteilt entlang einer Linie  $C$ :

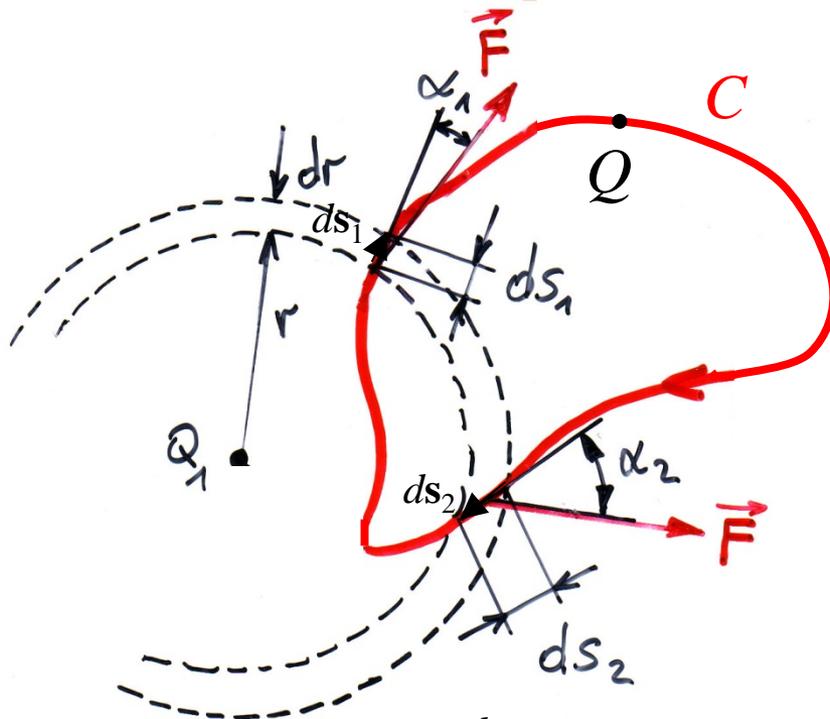
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\tau(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds'$$

### *1.3.2 Potentielle Energie einer Punktladung im elektrostatischen Feld*

Die Kräfte, welche in einem elektrostatischen Feld auf eine Punktladung wirken sind *konservativ*: wird eine Punktladung in einem elektrostatischen Feld (mit infinitesimal kleiner Geschwindigkeit, ohne Beschleunigung) entlang eines geschlossenen Weges bewegt, ist die geleistete mechanische Arbeit Null:

$$\oint_C \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad \mathbf{F}_{mech} = -\mathbf{F}$$

Diese konservative Eigenschaft kann für das elektrostatische Feld einer Punktladung  $Q_1$  bewiesen werden:



Eine Punktladung  $Q$  wird entlang der geschlossenen Kurve  $C$  bewegt.

Die Kugelschale der Dicke  $dr$  ist konzentrisch zur Ladung  $Q_1$  angeordnet. Deshalb hat die Kraft  $\mathbf{F}$  im Bereich der Kugelschale überall den gleichen Betrag und ist radial von  $Q_1$  weg- oder hingerichtet.

Die Längen der beiden Wegelemente

$$\text{sind } ds_1 = \frac{dr}{\cos \alpha_1} \text{ bzw. } ds_2 = \frac{dr}{\cos \alpha_2}$$

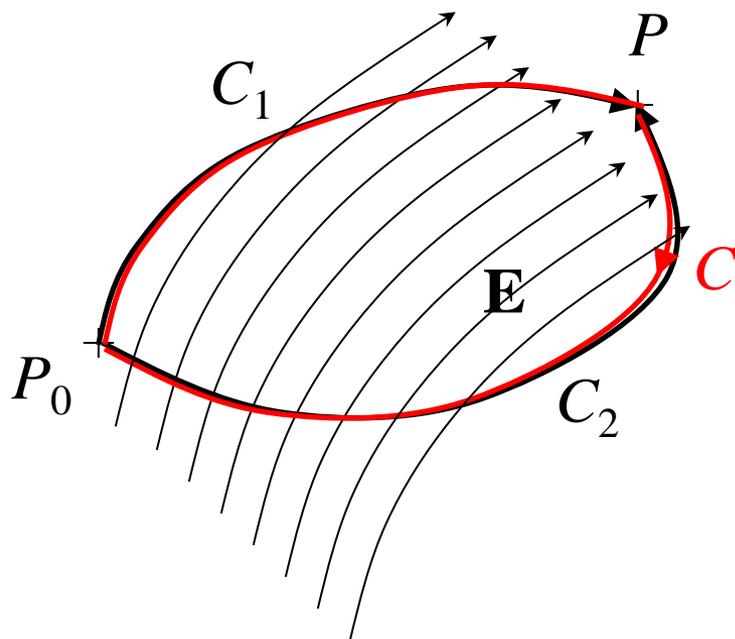
Differentielle Arbeiten im Bereich der Kugelschale:

$$dW_1 = \mathbf{F} \cdot ds_1 = F ds_1 \cos \alpha_1 = F \frac{dr}{\cos \alpha_1} \cos \alpha_1 = F dr \quad dW_2 = \mathbf{F} \cdot ds_2 = -F ds_2 \cos \alpha_2 = -F \frac{dr}{\cos \alpha_2} \cos \alpha_2 = -F dr$$

Die beiden differentiellen Arbeiten heben einander auf. Da der gesamte Weg in solche Kugelschalen zerlegt werden kann, ist die Gesamtarbeit gleich Null.

**Wegen des Superpositionsprinzips gilt dies für das Feld einer beliebigen Ladungsverteilung!**

In einem konservativen Kraftfeld kann die potentielle Energie in einem Punkt  $P$  definiert werden: sie ist die mechanische Arbeit, welche dann geleistet wird, wenn die Punktladung aus einem Bezugspunkt  $P_0$  (hier ist die potentielle Energie konventionsgemäß gleich Null) zum Punkt  $P$  gebracht wird.



$$\oint_C \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s} = 0 =$$

$$= \int_{C_1} \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s}$$

⇓

$$W_{pot}(P) = \int_{C_1} \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s} =$$

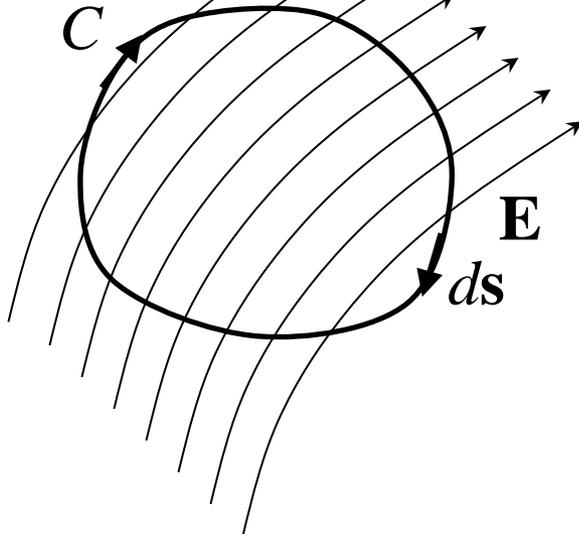
$$= \int_{P_0}^P \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s}$$

### 1.3.3 Die Wirbelfreiheit der elektrostatischen Feldstärke

$$\mathbf{F}_{mech} = -\mathbf{F} = -Q\mathbf{E}$$

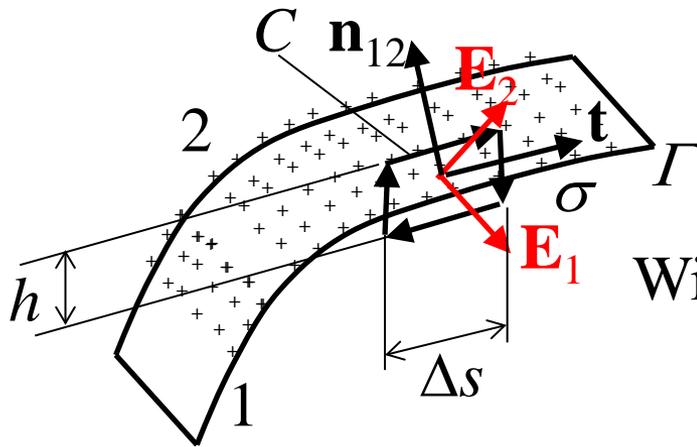
Es gilt daher:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{für eine beliebige geschlossene Kurve } C$$



## Verhalten der elektrischen Feldstärke auf einer Fläche mit einer Flächenladungsdichte

$\mathbf{t}$ : Einheitsvektor in der Tangentialebene und in der Ebene von  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$  ( $C$  ist ein Rechteck in der gleichen Ebene mit Seitenlängen  $h$  und  $\Delta s$ ).



Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Grenzübergänge:  $h \rightarrow 0$ ,  $\Delta s \rightarrow ds$ ,  $d\mathbf{s} = \mathbf{t} ds \Rightarrow \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} \Delta s - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} \Delta s = 0$

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}$$

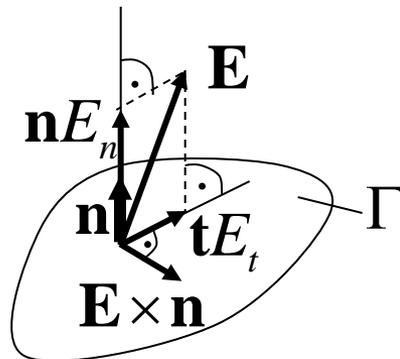
Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist stetig!

Im Ausdruck  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}$  für die Tangentialkomponente hängt  $\mathbf{t}$  von  $\mathbf{E}$  ab. Es ist Vorteilhaft, die Tangentialkomponente mit Hilfe des Normalvektors  $\mathbf{n}$  auszudrücken ( $\mathbf{n}$  hängt nur von der Fläche ab und ist von  $\mathbf{E}$  unabhängig):

$$\mathbf{E} = \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{n}E_n + \mathbf{t}E_t$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{E}} - \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}): \text{ Tangentialkomponente}$$

Statt  $\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$  reicht der Vektor  $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$  für die Beschreibung der Tangentialkomponente:



Stetigkeitsbedingung:

$$\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}$$

### 1.3.4 Das elektrostatische Potential, die Spannung

Die potentielle Energie in einem elektrischen Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  einer Punktladung  $Q$  in einem Punkt  $P$  ist:

$$W_{pot}(P) = \int_{P_0}^P \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s} = -Q \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Definition des *elektrostatischen Potentials*:

$$V(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$W_{pot}(P) = QV(P)$$

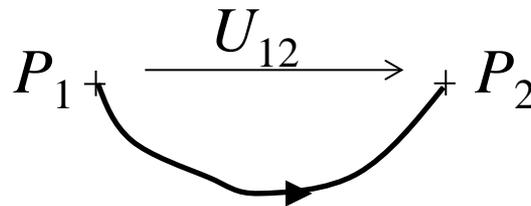
Die Wahl der Kurve zwischen  $P_0$  und  $P$  ist wegen der Wirbelfreiheit der elektrostatischen Feldstärke beliebig.  $V$  ist eine Feldgröße, eine Skalarfunktion der Ortskoordinaten:  $V = V(\mathbf{r})$ .

Die Einheit des elektrostatischen Potentials ist:

$$[V] = [\mathbf{E}] \cdot [\text{Länge}] = 1 \frac{V}{m} m = 1V$$

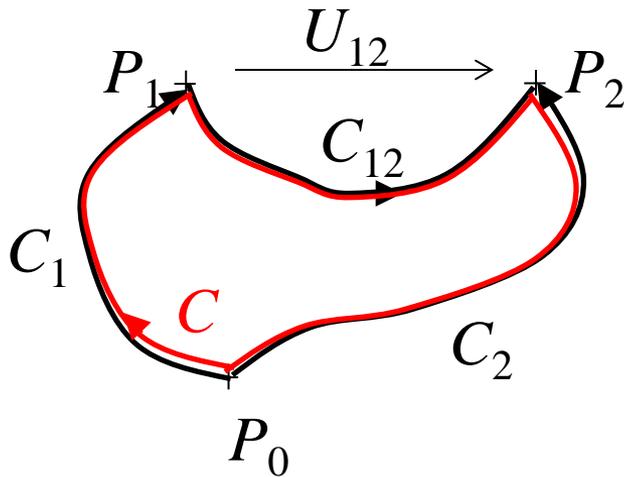
Die Definition der *Spannung* zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  in einem elektrostatischen Feld ist:

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$



Die Wahl der Kurve ist wegen der Wirbelfreiheit der elektrostatischen Feldstärke beliebig. Die Spannung ist eine integrale Größe: sie ist von den Ortskoordinaten unabhängig.

Die Spannung zwischen zwei Punkten ist die Differenz der Potentialwerte: Potential im Anfangspunkt minus das Potential im Endpunkt:



$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= 0 = \\ &= \int_{C_{12}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= U_{12} - V_1 + V_2 \end{aligned}$$



$$U_{12} = V_1 - V_2$$

Natürlich ist die Einheit der Spannung:  $[U] = [V] = 1V$

## 1.3.5 Energie und Potential einer Ladungsverteilung

Bringt man in einem feldfreien Raum eine Punktladung  $Q_1$  vom Unendlichen ( $P_0$ ) zu einer bestimmten Position ( $P_1$ ) im Endlichen, wird keine Arbeit geleistet. Bringt man jetzt eine zweite Punktladung  $Q_2$  vom Unendlichen in eine Position im Abstand  $r_{12}$  zur  $Q_1$ , ist die geleistete Arbeit vom Weg unabhängig. Es wird daher eine Gerade gewählt.

endgültige Position

$$W = \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{F}_{mech} \cdot d\mathbf{s} \quad ds = -\mathbf{e}_r dr \quad \mathbf{F}_{mech} = -\mathbf{F}_{el} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

$r$  wird als Integrationsvariable verwendet;  $dr$  muss positiv sein: Integration von  $r_{12}$  bis  $\infty$

$$W = \int_{r_{12}}^{\infty} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r_{12}}^{\infty} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Diese Arbeit ist gleichzeitig die potentielle Energie der Ladung  $Q_2$  im Feld der Ladung  $Q_1$ . Daher ist das elektrostatische Potential im Feld der Ladung  $Q_1$  in einem Abstand  $r_{12}$  davon ist (Bezugspunkt mit  $V=0$  im Unendlichen):

$$V(r_{12}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}}$$

Allgemein, hat man eine Punktladung  $Q$  an einer Stelle  $\mathbf{r}'$ , ist daher das Potential an der Stelle  $\mathbf{r}$ :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Für  $N$  Punktladungen kann das Superpositionsprinzip angewendet werden. Das Potential im Aufpunkt  $A$  (der Abstand der Punktladung  $Q_j$  zu  $A$  ist  $r_{Q_j A}$ ) :

$$V = \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{Q_j A}}$$

Verallgemeinerung auf Raumladungen, Flächen- und Linienladungen:

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\Omega'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\mathbf{r}') d\Gamma'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_C \frac{\tau(\mathbf{r}') ds'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Diese Beziehungen gelten nur, wenn alle Quellen im Endlichen sitzen und der Bezugspunkt im Unendlichen gewählt werden kann.

Als nächstes wird die Punktladung  $Q_3$  aus dem Unendlichen ( $P_0$ ) auf einem beliebigen Wege herangebracht, dessen Anfangspunkt  $P_0$  und dessen Endpunkt  $P_3$  ist:

$$W_3 = - \int_{P_0}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}$$

Superposition: 
$$W_3 = - \int_{P_0}^{P_3} (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{P_0}^{P_3} \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{s} - \int_{P_0}^{P_3} \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

$$W_{ges} = W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

Verallgemeinerung auf  $N$  Ladungen:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Die Beziehung für  $W$  ist symmetrisch, es können  $i$  und  $j$  vertauscht werden. Daher treten die einzelnen Terme doppelt auf (deshalb der Faktor).

Die Ladung  $Q_i$  kann nach vor gezogen werden. Der Ausdruck in der Klammer entspricht dann dem Potential  $V_i$  der restlichen  $N-1$  Punktladungen an der Stelle der Ladung  $Q_i$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \underbrace{\left[ \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right]}_{V_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

Übergang auf eine kontinuierliche Ladungsverteilung:

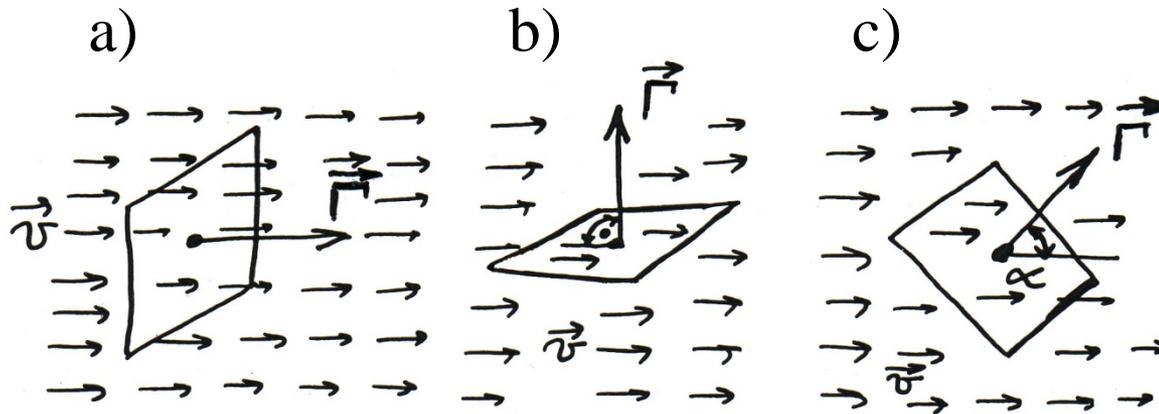
$$\sum \rightarrow \int; \quad Q_i \rightarrow \rho d\Omega$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho V d\Omega$$

## 1.4 Die elektrische Flussdichte (elektrische Verschiebung)

Flussbegriff aus der Hydromechanik:

Das Vektorfeld  $\mathbf{v}$  sei ein homogenes Geschwindigkeitsfeld.



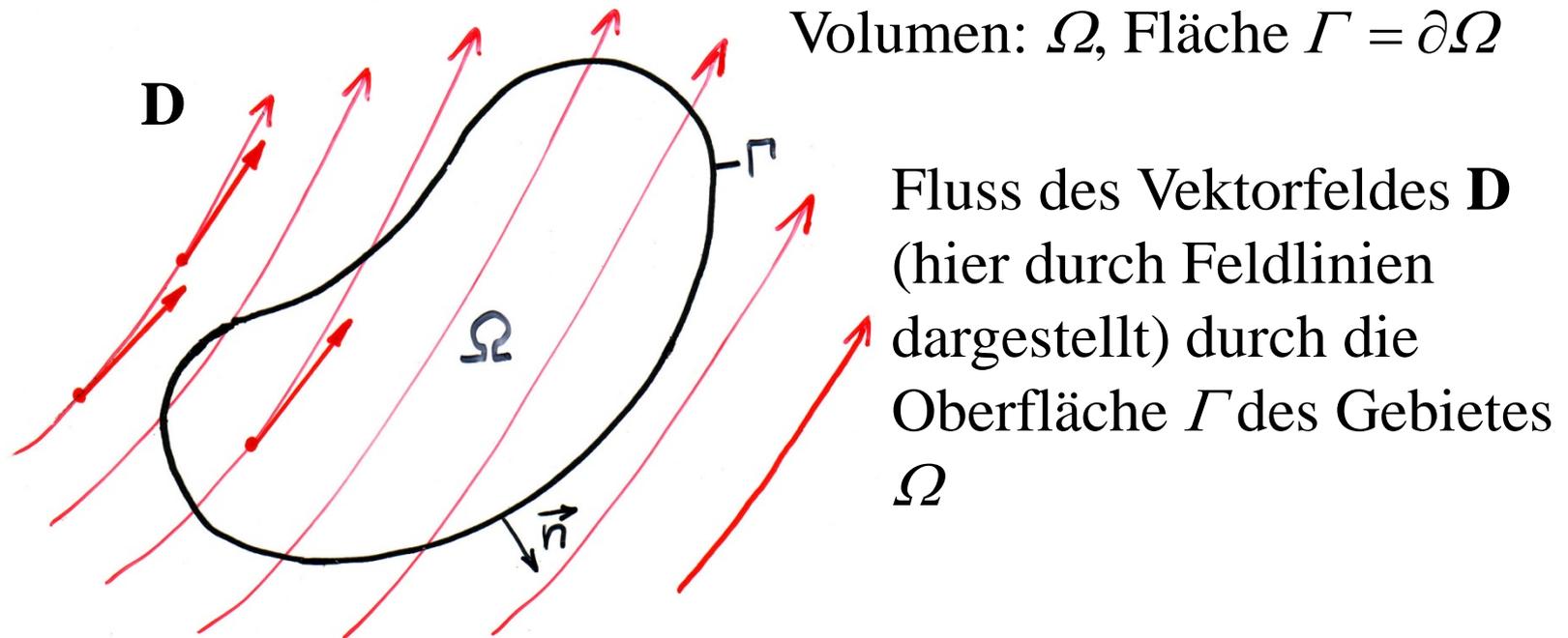
Der Fluss in  $\text{m}^3$  pro Sekunde durch ein Rechteck wird gemessen

a)  $\psi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Gamma} = v\Gamma$

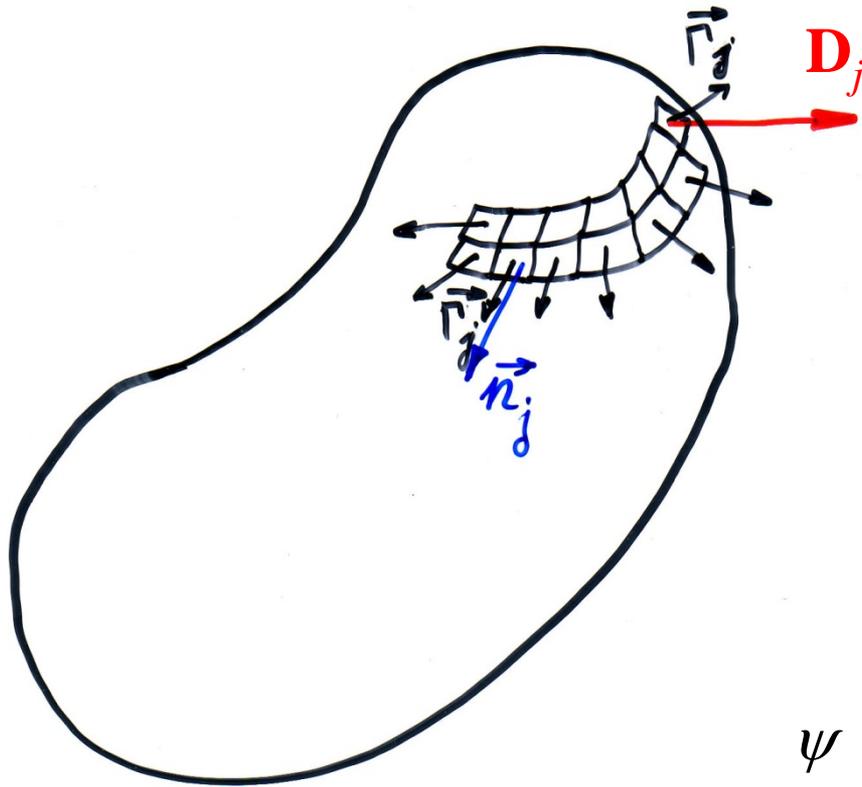
b)  $\psi = 0$

c)  $\psi = v\Gamma \cos \alpha$

Fluss durch eine beliebige geschlossene Oberfläche gibt Auskunft darüber, ob eine Vektorgröße im Volumen innerhalb der Fläche Quellen besitzt:



$\mathbf{n}$  ist der Einheitsvektor der äußeren Flächennormalen



Die Oberfläche wird in kleine ebene Flächenstücke  $\Gamma_j$  zerlegt

$$\Gamma_j = \mathbf{n}_j \Gamma_j \quad \psi_j = \mathbf{D}_j \cdot \Gamma_j$$

$$\psi \approx \sum_j \mathbf{D}_j \cdot \Gamma_j$$

Grenzübergänge:

$$\Gamma_j \rightarrow d\Gamma; \quad d\Gamma = \mathbf{n} d\Gamma$$

$$\sum \rightarrow \int$$

$$\psi = \oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot d\Gamma = \oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} D_n d\Gamma$$

Die elektrische Flussdichte  $\mathbf{D}$  ist eine Feldgröße, welche in unmittelbarem Zusammenhang mit den Ladungen steht: der Fluss von  $\mathbf{D}$  über eine geschlossene Fläche ist gleich die Ladungen im Volumen innerhalb der Fläche.

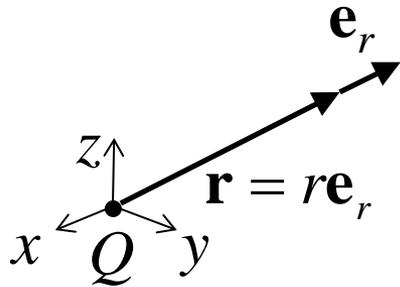
### 1.4.1 Das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik

Die elektrische Flussdichte wird als die Vektorfunktion  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$  definiert, welche für ein beliebiges Volumen  $\Omega$  (Randfläche  $\partial\Omega$ ) das folgende Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik erfüllt:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega = Q_{\Omega}$$

Einheit von  $\mathbf{D}$ :  $[\mathbf{D}] = \frac{[Q]}{[Fläche]} = 1 \frac{C}{m^2}$

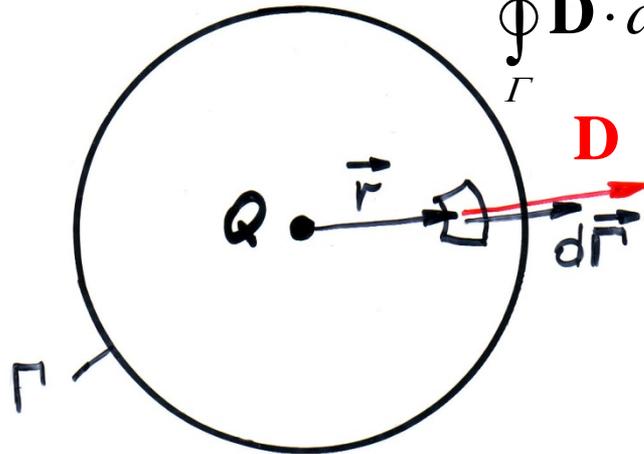
## 1.4.2 Elektrische Flussdichte einer Punktladung



Wegen der Symmetrie muss gelten:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(r)\mathbf{e}_r$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \oint_{\Gamma} D d\Gamma = D(r) \oint_{\Gamma} d\Gamma = 4\pi r^2 D(r)$$



Gauß'sches Gesetz:

$$4\pi r^2 D(r) = Q$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$\Gamma$ : Kugel,  $Q$  im Mittelpunkt, Radius  $r$

Im Vakuum gilt für die elektrische Feldstärke einer Punktladung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Beziehung zwischen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  einer Punktladung:

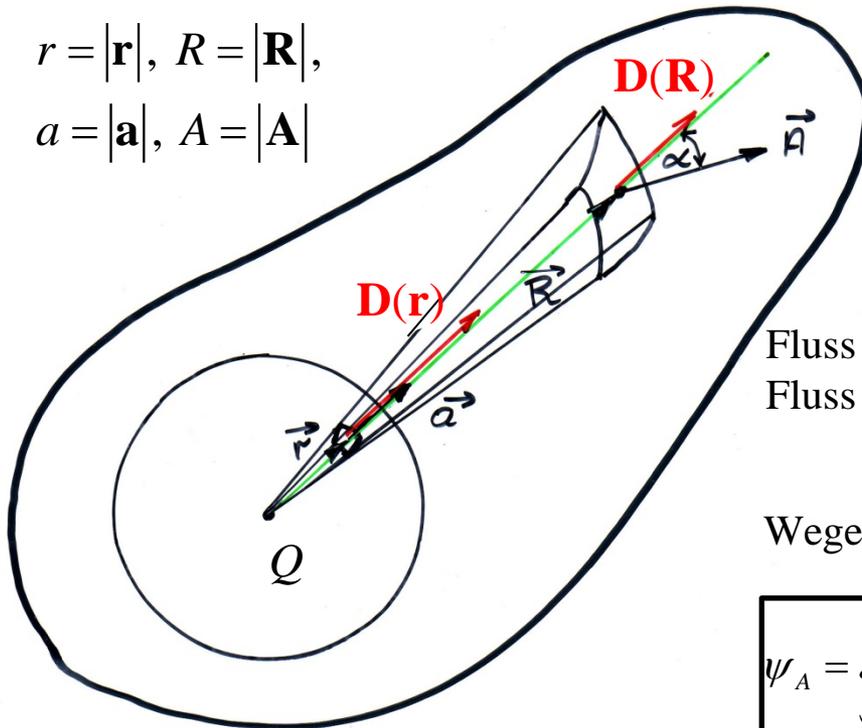
$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

### 1.4.3 Elektrische Flussdichte einer beliebigen Ladungsverteilung

Die elektrische Flussdichte  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  einer Punktladung erfüllt im Vakuum das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik auch für eine beliebige Hüllfläche:

$$r = |\mathbf{r}|, R = |\mathbf{R}|,$$

$$a = |\mathbf{a}|, A = |\mathbf{A}|$$



Das Flächenstück  $A$  ist größer als das Flächenstück  $a$  wegen:

- a) Strahlensatz  $\left(\frac{R^2}{r^2}\right)$
- b) Neigung um  $\alpha$ :  $A = a \left(\frac{R^2}{r^2}\right) \frac{1}{\cos \alpha}$

Fluss durch  $a$ :  $\psi_a = \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a} = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a} = \epsilon_0 E(\mathbf{r}) a$

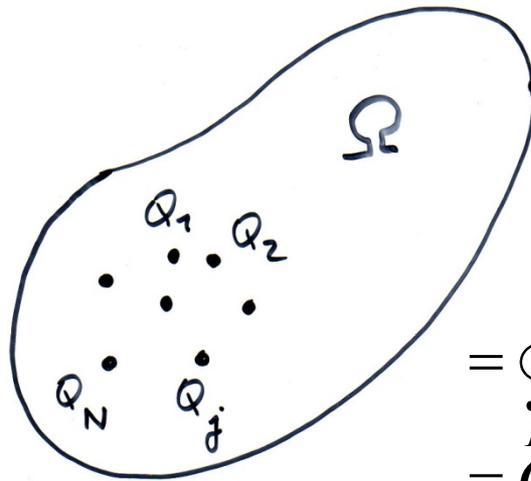
Fluss durch  $A$ :

$$\psi_A = \mathbf{D}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{A} = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{A} = \epsilon_0 E(\mathbf{R}) A \cos \alpha$$

Wegen  $\frac{D(\mathbf{R})}{D(\mathbf{r})} = \frac{\epsilon_0 E(\mathbf{R})}{\epsilon_0 E(\mathbf{r})} = \frac{r^2}{R^2}$  gilt:

$$\psi_A = \underbrace{\epsilon_0 E(\mathbf{r})}_{\epsilon_0 E(\mathbf{R})} \underbrace{\frac{r^2}{R^2} a \frac{R^2}{r^2} \frac{1}{\cos \alpha}}_A \cos \alpha = \psi_a$$

$N$  Ladungen im Inneren der Oberfläche, Superposition:



$$\begin{aligned} \psi &= \oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \\ &= \oint_{\Gamma} \varepsilon_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_N) \cdot d\mathbf{\Gamma} = \\ &= \oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{\Gamma} + \oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{\Gamma} + \dots + \oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E}_N \cdot d\mathbf{\Gamma} = \\ &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N \end{aligned}$$

$$\oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \sum_{j=1}^N Q_j$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$Q_j \rightarrow dQ = \rho d\Omega, \quad \sum \rightarrow \int$$

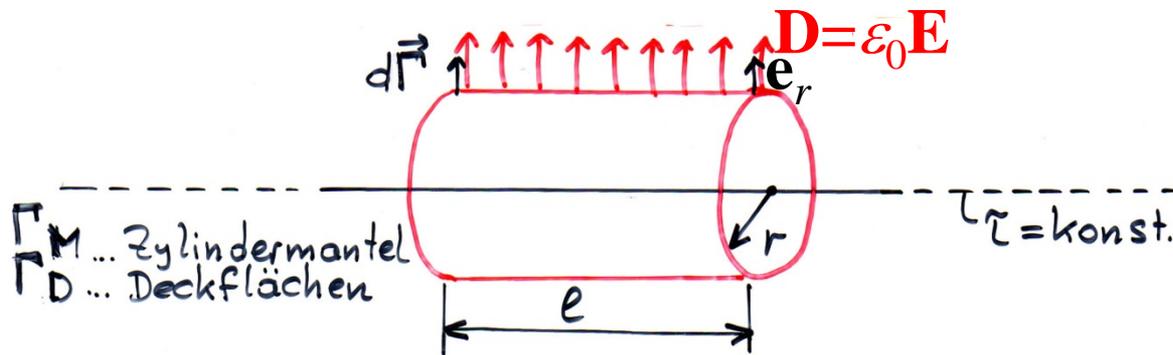
$$\oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

$\varepsilon_0 \mathbf{E}$  erfüllt im Vakuum das Gauß'sche Gesetz!

Im Vakuum gilt allgemein:  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$

Das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik kann daher in einfachen Fällen (mit hoher Symmetrie) auch zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke verwendet werden.

*Beispiel:* unendlich lange Gerade mit konstanter Linienladungsdichte  $\tau$



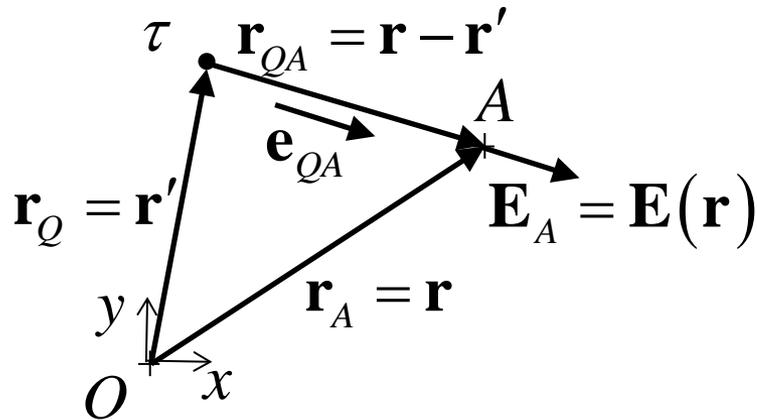
Wegen Symmetrie:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D(r)\mathbf{e}_r$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Gamma_M} D d\Gamma = D(r) \int_{\Gamma_M} d\Gamma =$$

$$= D(r) 2\pi r l = \int_C \tau ds = \tau l \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{\tau}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad \mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

Gerade unendlich lang in der  $z$ -Richtung: Feld von  $z$  unabhängig



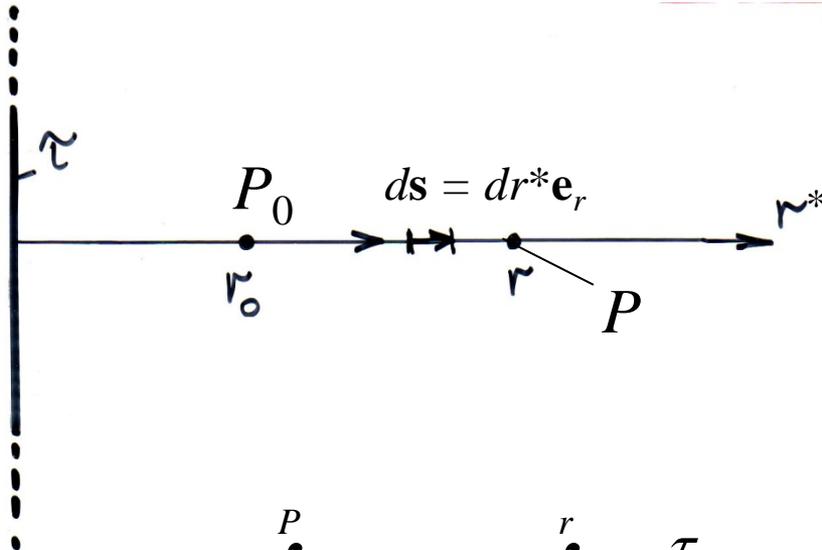
$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_{QA} = \frac{\mathbf{r}_{QA}}{|\mathbf{r}_{QA}|} = \frac{\mathbf{r}_{QA}}{r_{QA}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r_{QA}} \mathbf{e}_{QA} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

# Potential einer unendlich langen geraden Ladung mit konstanter Linienladungsdichte



$r^*$ : Integrationsvariable

$P_0$ : Bezugspunkt,  $r^*=r_0$

$P$ : Aufpunkt,  $r^*=r$

$$\mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^*} \mathbf{e}_r$$

$$V = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{r_0}^r \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r^*} dr^* = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r^* \Big|_{r_0}^r$$

$$V(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

Das Potential wird im Unendlichen unendlich groß, da die meiste Ladung im Unendlichen liegt.

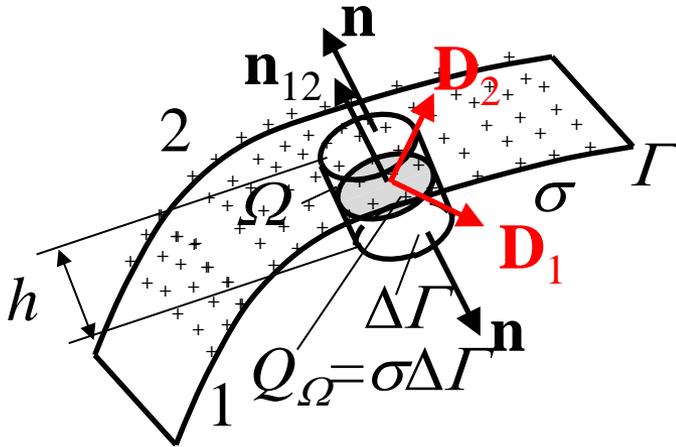
Die Spannung zwischen zwei Punkten mit den Koordinaten  $r_1$  und  $r_2$ :

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_1} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0 r_2}{r_1 r_0} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Der Abstand  $r_0$  des Bezugspunktes fällt bei der Differenzbildung weg.

Für  $r_2$  größer als  $r_1$  ist die Spannung positiv.

### 1.4.4 Verhalten der elektrischen Flussdichte auf einer Fläche mit einer Flächenladungsdichte



$\Omega$ : Zylinder mit Randfläche  $\partial\Omega$  bestehend aus den Stirnflächen  $\Delta\Gamma$  und der Mantelfläche der Höhe  $h$

Gauß'sches Gesetz:

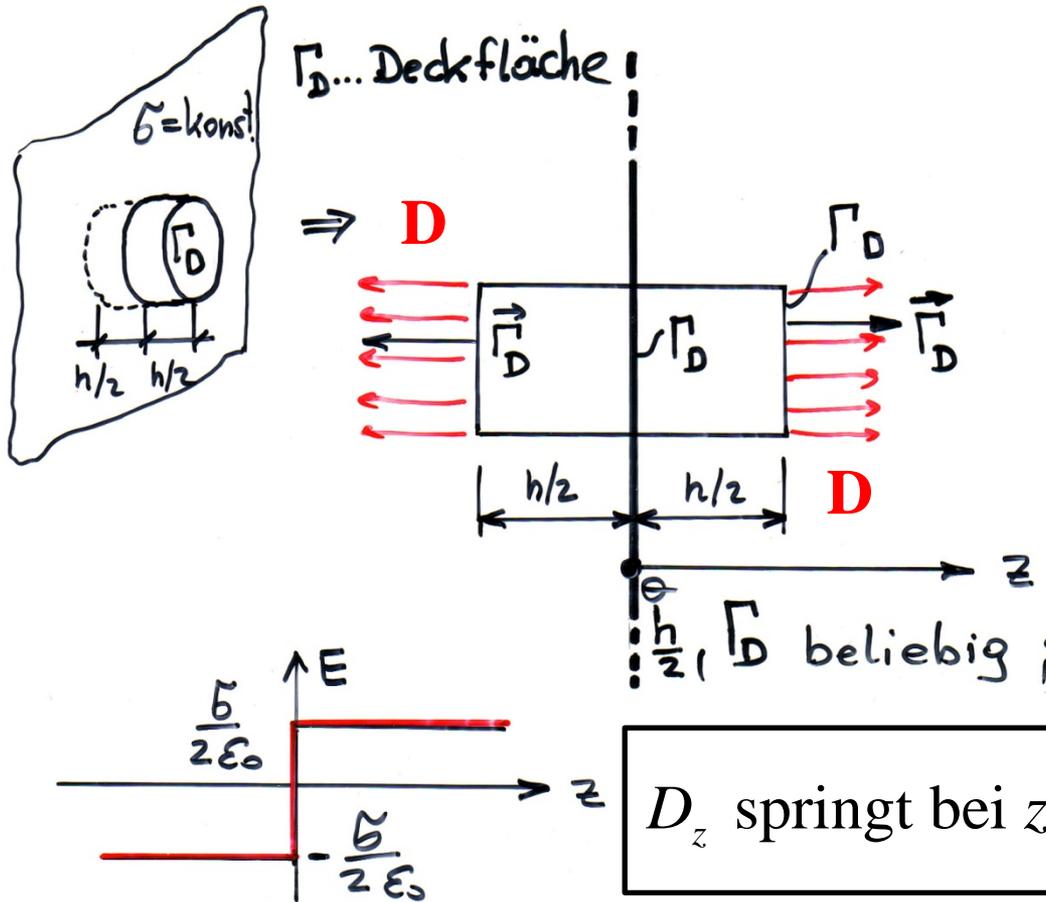
$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = Q_{\Omega}$$

Grenzübergänge:  $h \rightarrow 0$ ,  $\Delta\Gamma \rightarrow d\Gamma \Rightarrow \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} \Delta\Gamma - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} \Delta\Gamma = \sigma \Delta\Gamma$

$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma$$

Die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte springt mit dem Wert der Oberflächenladungsdichte!

Beispiel: Unendlich ausgedehnte Flächenladung in der  $xy$ -Ebene mit konstanter Dichte  $\sigma$



$$\oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot d\Gamma = 2D\Gamma_D = \sigma\Gamma_D$$

$$\Downarrow$$

$$D = \frac{\sigma}{2}, E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

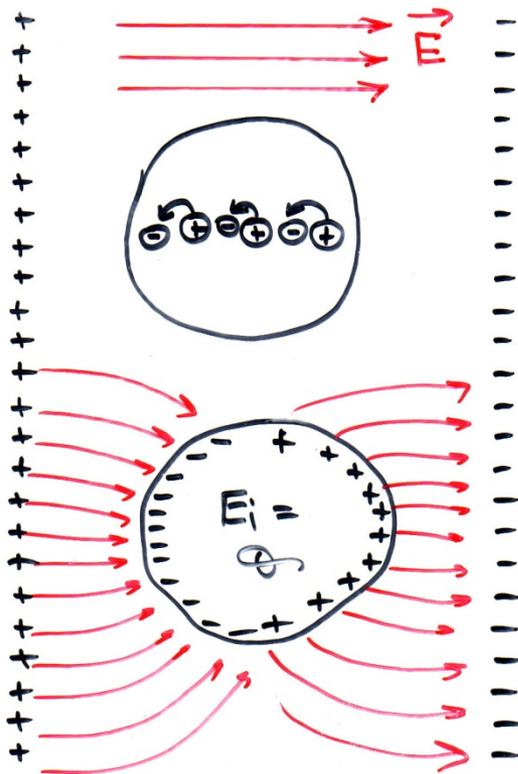
$D$  ist unabhängig von  $\frac{h}{2}$   
das Feld ist homogen

## 1.5 Leiter im elektrostatischen Feld (Influenz)

Wird ein leitender Körper in ein elektrisches Feld gebracht, bewegen sich die Elektronen durch die elektrischen Feldkräfte und gruppieren sich solange um, bis das von ihnen erzeugte Feld das externe Feld genau kompensiert. Die umgruppierten Ladungen sitzen als Flächenladungen nahe an der Oberfläche des Körpers. Das Innere ist raumladungsfrei. Eine negative Ladungsverteilung auf Teilen der Oberfläche geht auf Kosten einer entsprechenden positiven Verteilung (positive Atomrümpfe) auf den restlichen Teilen der Oberfläche. Dieser Vorgang heißt *Influenz*. Im Leiterinneren muss das elektrische Feld verschwinden, sonst würden sich die Ladungen nach wie vor bewegen.

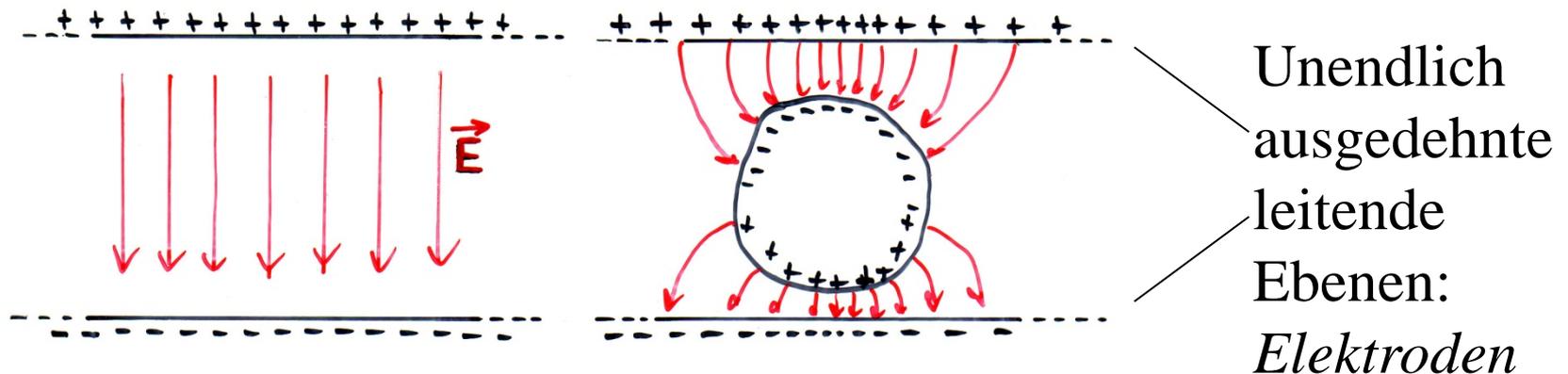
Leiter im homogenen elektrostatischen Feld: ein leitender Körper wird in ein homogenes elektrisches Feld gebracht.

1. Das homogene Feld wird durch zwei unendlich ausgedehnte, konstante, fixierte (d.h. unbewegliche) Flächenladungsschichten erzeugt.



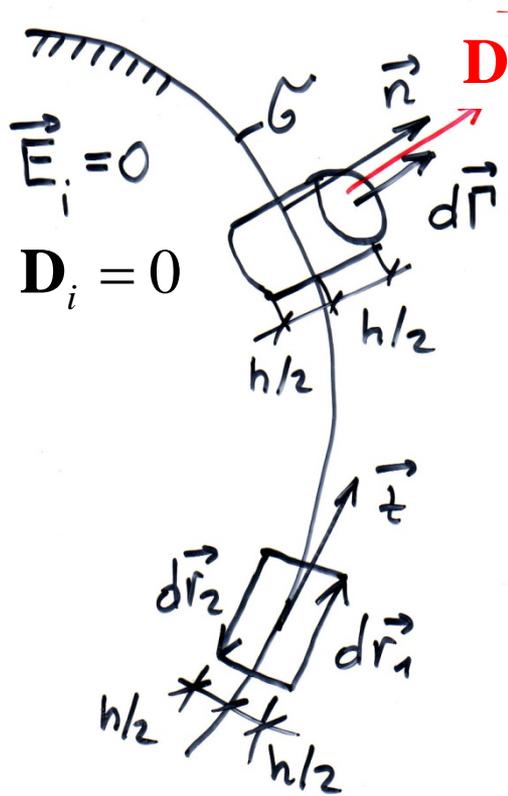
Die Ladungen ordnen sich an der Oberfläche so an, dass das resultierende Feld  $E_i$  im Inneren Null wird. Dieser Vorgang erfolgt sehr schnell. Das Feld des Leiters wirkt nicht auf die Flächenladungen zurück, da diese als nicht beweglich angenommen sind.

2. Das homogene Feld wird durch einen geladenen Parallelplattenkondensator erzeugt.



Das Feld des Leiters wirkt auf die Flächenladungsverteilung auf den Kondensatorplatten zurück. Sie ist nicht mehr konstant.

# Bedingungen an der Grenzfläche Leiter-Isolator (Leiteroberfläche):



Der Sprung der Normalkomponente der elektrischen Flussdichte ist die Oberflächenladungsdichte:  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{n} = \sigma$   
 Da  $\mathbf{D}_i = 0$  ist, gilt:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = D_n = \sigma \quad E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

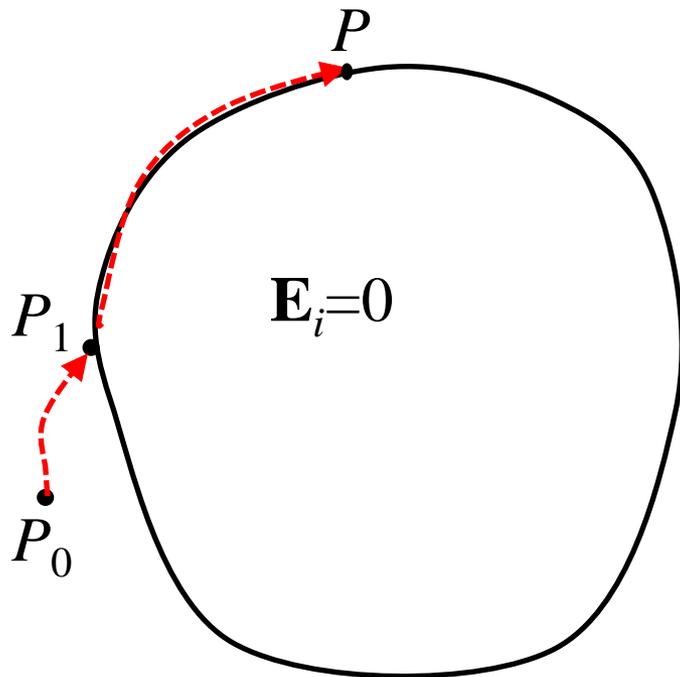
Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist stetig:  
 $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_i \times \mathbf{n} = 0$ . Da  $\mathbf{E}_i = 0$  ist, gilt:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad E_t = 0$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{n} \sigma$$

Das elektrische Feld steht normal auf die Leiteroberfläche!

Das Potential ist auf der Leiteroberfläche konstant:



$P_1$  ist ein beliebig gewählter bestimmter Punkt auf der Leiteroberfläche:

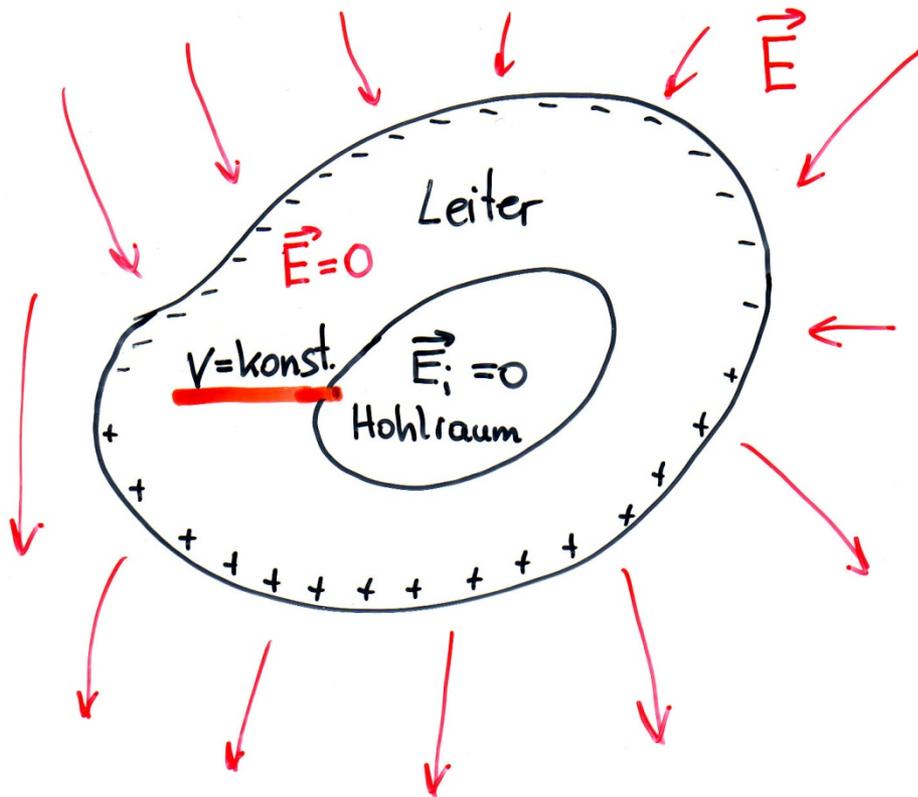
$$V(P_1) = V_1 = - \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$P$  ist ein beliebiger Punkt ebenfalls auf der Leiteroberfläche; die Kurve, welche  $P_1$  mit  $P$  verbindet verläuft auf der Leiteroberfläche. Daher ist das Potential im  $P$ :

$$V(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \underbrace{\int_{P_0}^{P_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}_{=V_1} - \underbrace{\int_{P_1}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}_{=0, \text{ da } \mathbf{E} \text{ normal auf die Kurve steht}} = V_1$$

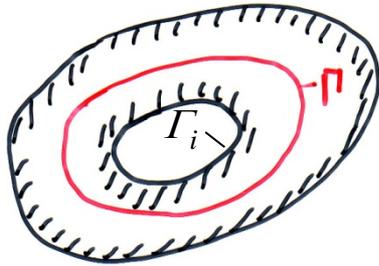
## Der Faraday'sche Käfig:

Das Innere eines hohlen Leiters, gleich welcher Gestalt, ist feldfrei, vorausgesetzt, dass der Innenraum selbst ladungsfrei ist.



Der ungeladene oder geladene Leiter befindet sich in einem externen Feld.

Beweis für  $\mathbf{E}_i=0$ :



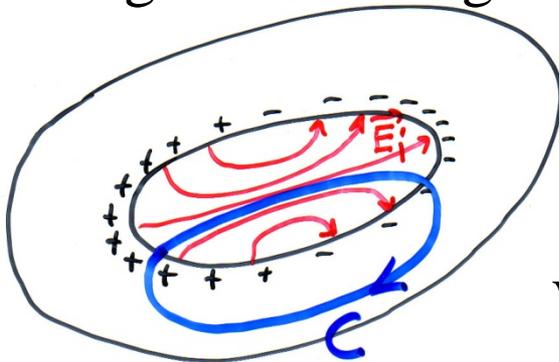
Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \text{ da } \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = 0$$

D.h. die eventuell auf der inneren Oberfläche sitzenden Ladungen (es gibt nur Flächenladungen!) sind in Summe Null:

$$\int_{\Gamma_i} \sigma d\Gamma = 0$$

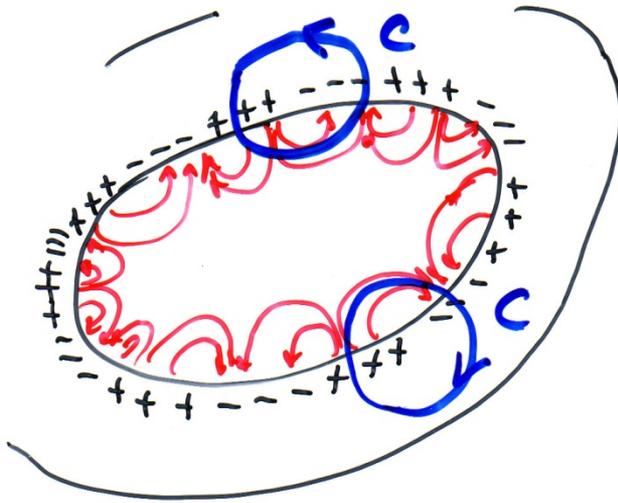
Mögliche Ladungsverteilung auf der Innenseite:



$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_{\text{Leiter}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$$

Widerspruch zur Wirbelfreiheit von  $\mathbf{E}$ !

Auch andere Ladungsverteilungen mit  $\int_{\Gamma_i} \sigma d\Gamma = 0$  verletzen immer die Wirbelfreiheit von  $\mathbf{E}$ !



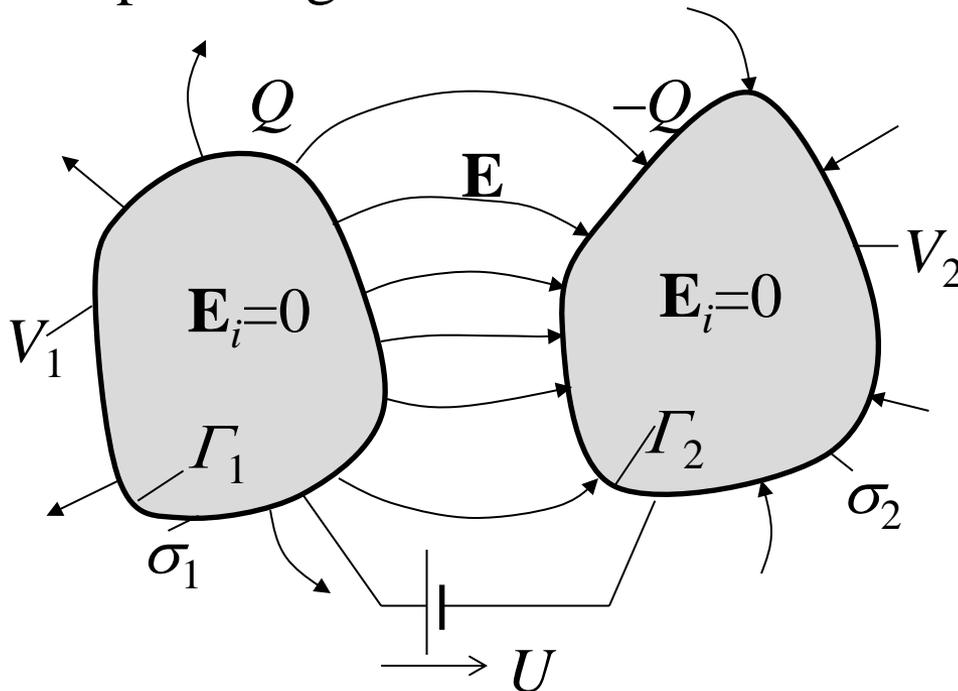
Die einzige mögliche  
Ladungsverteilung ist:

$$\sigma = 0 \text{ auf } \Gamma_i$$

Es gibt weder im Hohlraum noch auf dessen Randfläche Ladungen: die elektrische Feldstärke kann nur Null sein.

## 1.6 Kondensatoren und Kapazität

*Kondensator*: Anordnung bestehend aus zwei leitenden Körpern (Elektroden). Die Gesamtladung der beiden Elektroden ist Null: positive Elektrode hat Ladung  $Q$ , negative Elektrode hat Ladung  $-Q$ . Die Ladung  $Q$  ist der Spannung zwischen den Elektroden proportional.



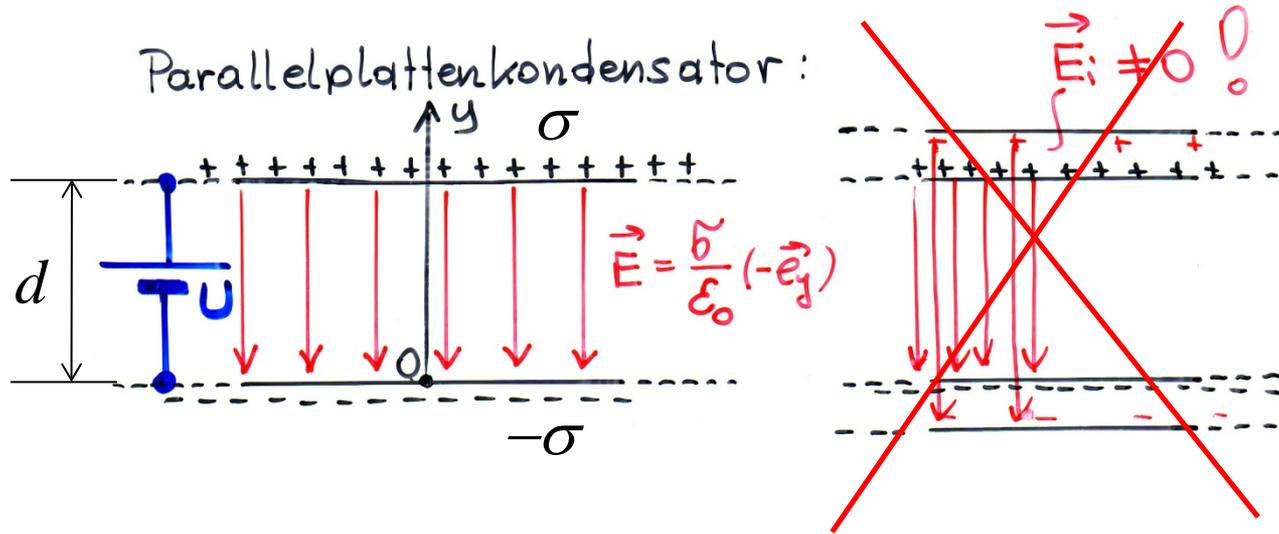
$$U = V_1 - V_2$$

$$Q = \int_{\Gamma_1} \sigma_1 d\Gamma = - \int_{\Gamma_2} \sigma_2 d\Gamma$$

$$Q = CU$$

$C > 0$ : Kapazität hängt nur von der Geometrie ab!

Beispiel:



Unendlich ausgedehnter Parallelplattenkondensator. Die Ladungen sitzen an den Innenseiten der Platten. Sonst wäre das Platteninnere nicht feldfrei.

Die Ladungsdichte  $\sigma$  ist konstant. Das elektrische Feld ist homogen.

Ist die Plattenfläche  $\Gamma_C$  endlich und die Plattenabmessungen sehr viel größer als der Plattenabstand  $d$ , können die „Randeffekte (Streufeld)“ vernachlässigt werden!

$$U = V_2 - V_1 = \int_{y=d}^{y=0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{y=0}^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_y dy = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = Ed$$

$$Q = \sigma \Gamma_C = \frac{\Gamma_C U \epsilon_0}{d} = U \frac{\epsilon_0 \Gamma_C}{d} = UC$$

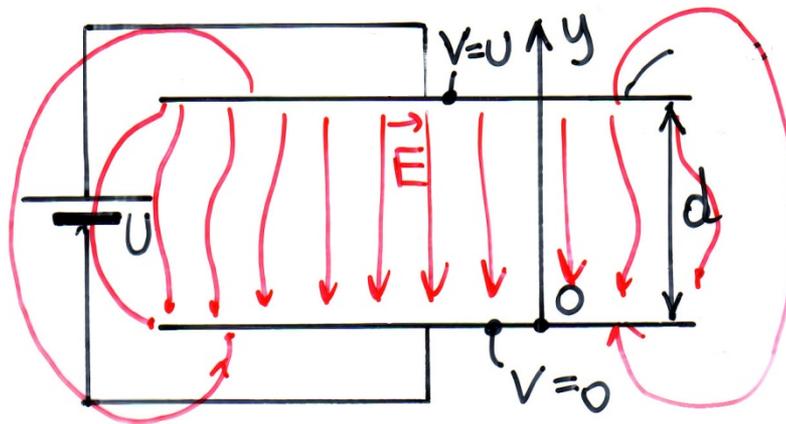
$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 \Gamma_C}{d}} \quad [C] = 1 \frac{C}{V} = 1 \frac{As}{V} = 1F \quad \dots \quad \text{Farad}$$

$$\text{z.B.: } C = 1F, \quad d = 1 \text{ mm}, \quad \Gamma_C = ? \quad \Gamma_C = \frac{Cd}{\epsilon_0} \approx \frac{1 \cdot 10^{-3}}{8,854 \cdot 10^{-12}} \sim 113 \text{ km}^2$$

Ein Farad ist eine sehr große Kapazität!

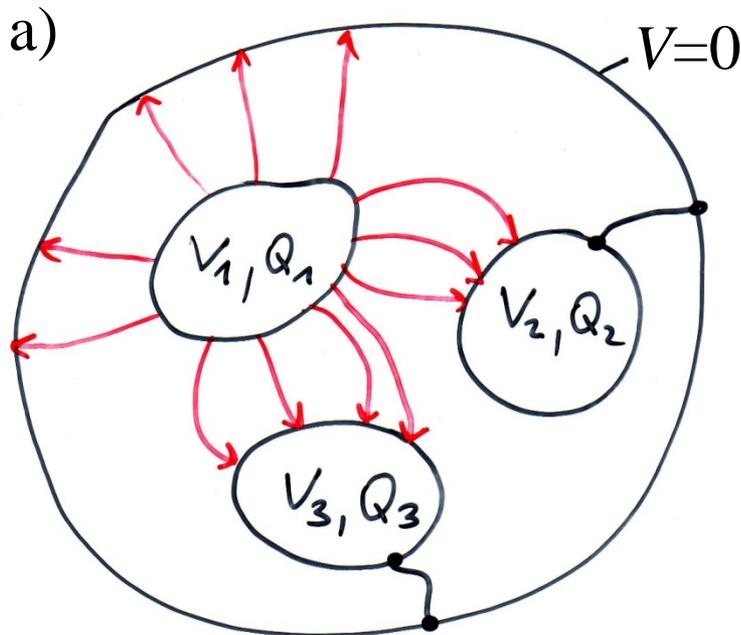
Deshalb:  $1 \mu F = 10^{-6} F$ ,  $1 nF = 10^{-9} F$ ,  $1 pF = 10^{-12} F$

Ist der Plattenabstand im Vergleich zu den Plattenabmessungen nicht klein, muss das Streufeld in den Randbereichen mit berücksichtigt werden. Bei Berücksichtigung der Randeffekte ist die Kapazität höher.



## 1.6.1 Teilkapazitäten von mehreren Leitern

Beispiel: drei Leiter



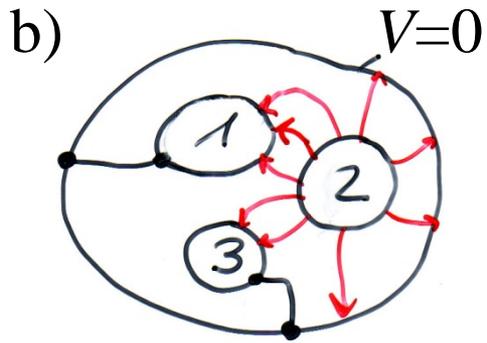
$$V_1 \neq 0 \quad V_2 = V_3 = 0$$

$$Q_1 = c_{11}V_1 \quad c_{11} > 0$$

$$Q_2 = c_{21}V_1 \quad c_{21} < 0$$

$$Q_3 = c_{31}V_1 \quad c_{31} < 0$$

Für  $V_1$  positiv, sind  $Q_2$  und  $Q_3$  negativ, d.h. die Kapazitätskoeffizienten  $c_{21}$  und  $c_{31}$  sind negativ.

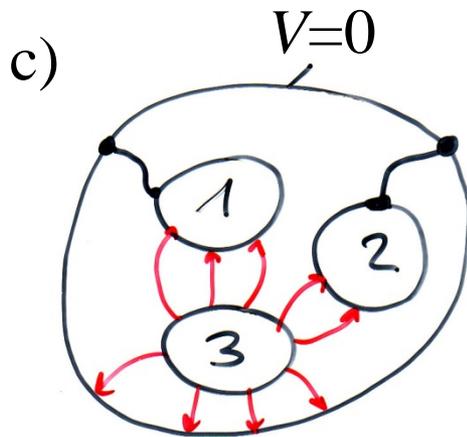


$$V_2 \neq 0 \quad V_1 = V_3 = 0$$

$$Q_1 = c_{12}V_2 \quad c_{12} < 0$$

$$Q_2 = c_{22}V_2 \quad c_{22} > 0$$

$$Q_3 = c_{32}V_2 \quad c_{32} < 0$$



$$V_3 \neq 0 \quad V_1 = V_2 = 0$$

$$Q_1 = c_{13}V_3 \quad c_{13} < 0$$

$$Q_2 = c_{23}V_3 \quad c_{23} < 0$$

$$Q_3 = c_{33}V_3 \quad c_{33} > 0$$

Die Überlagerung der Fälle a), b) und c) ist auch ein möglicher Zustand des Systems (Superposition!):

$$Q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}V_2 + c_{13}V_3$$

$$Q_2 = c_{21}V_1 + c_{22}V_2 + c_{23}V_3 \quad Q_i = \sum_j c_{ij}V_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$Q_3 = c_{31}V_1 + c_{32}V_2 + c_{33}V_3$$

$c_{ij}$ : ... Kapazitätskoeffizienten

$c_{ij}$  negativ für  $i \neq j$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

Addition und Subtraktion von  $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 c_{ik} V_i$  zur i-ten Zeile ( $i=1,2,3$ ):

$$Q_1 = (c_{11} + c_{12} + c_{13})V_1 - c_{12}(V_1 - V_2) - c_{13}(V_1 - V_3)$$

$$Q_2 = -c_{21}(V_2 - V_1) + (c_{22} + c_{21} + c_{23})V_2 - c_{23}(V_2 - V_3)$$

$$Q_3 = -c_{31}(V_3 - V_1) - c_{32}(V_3 - V_2) + (c_{33} + c_{31} + c_{32})V_3$$

Teilkapazitäten:  $C_{ij} = -c_{ij}; \quad i \neq j$

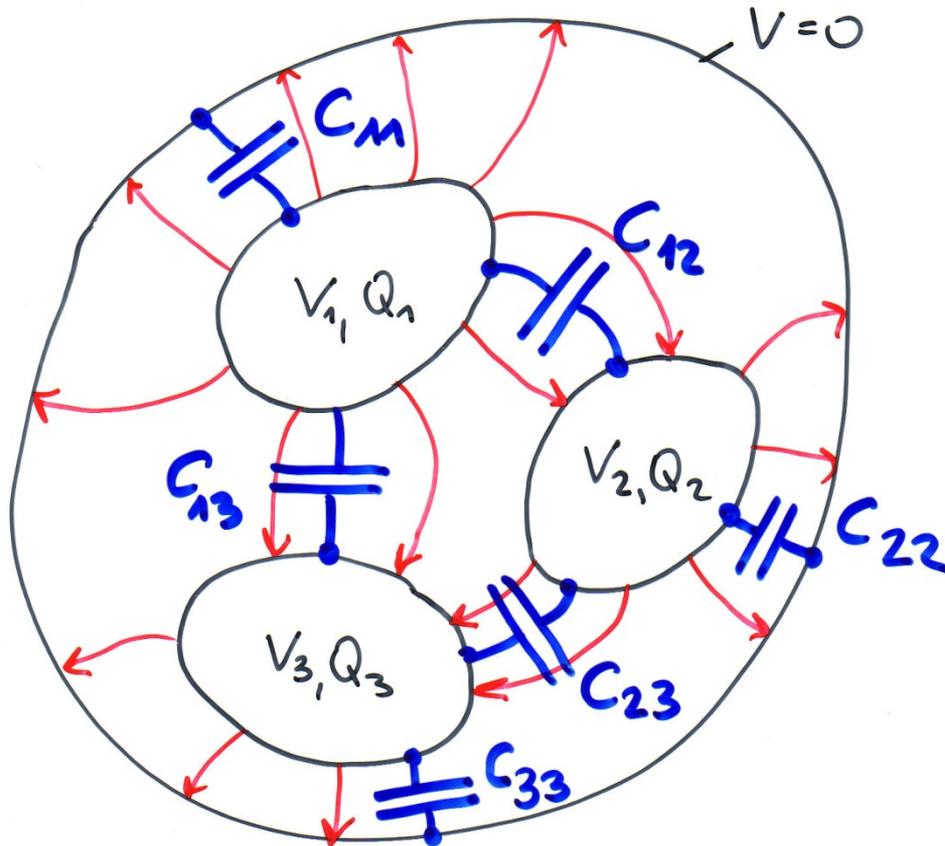
$$C_{ii} = \sum_{k=1}^3 c_{ik}$$

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3)$$

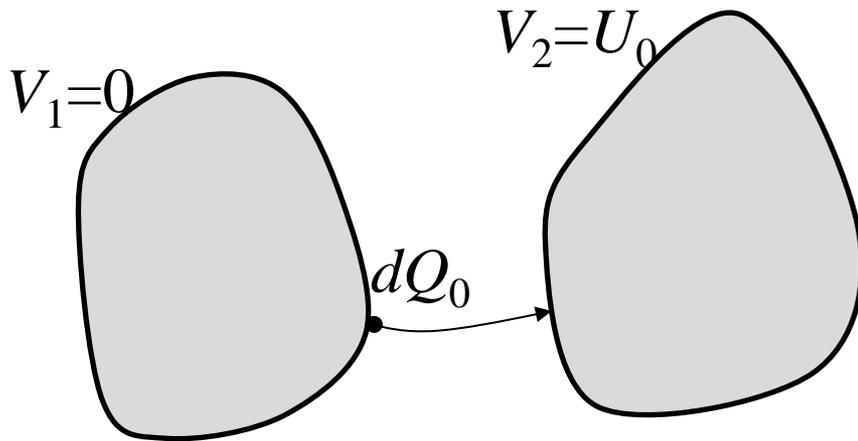
$$Q_2 = C_{12}(V_2 - V_1) + C_{22}V_2 + C_{23}(V_2 - V_3)$$

$$Q_3 = C_{13}(V_3 - V_1) + C_{23}(V_3 - V_2) + C_{33}V_3$$

Teilkapazitäten und Feldlinien (für  $V_1 > V_2 > V_3 > 0$ ):



## 1.6.2 Im Kondensator gespeicherte Energie



Die differenzielle Arbeit  $dW$ :

$$dW = dQ_0 U_0 = dQ_0 \frac{Q_0}{C}$$

Ein Kondensator wird auf die Ladung  $Q$  aufgeladen, indem von der Elektrode 1 die Ladung in kleinen Portionen  $dQ_0$  auf die Elektrode 2 gebracht wird. Zu einem bestimmten Zeitpunkt dieses Vorganges beträgt die Ladung  $\pm Q_0$  und die Spannung zwischen den Elektroden ist von Null auf  $U_0$  angestiegen:  $Q_0 = C U_0$

Die zur Aufladung des Kondensators, ausgehend von  $Q_0=0$  bis  $Q_0=Q$  (bzw.  $U_0=0$  bis  $U_0=U$ ), benötigte Arbeit ist:

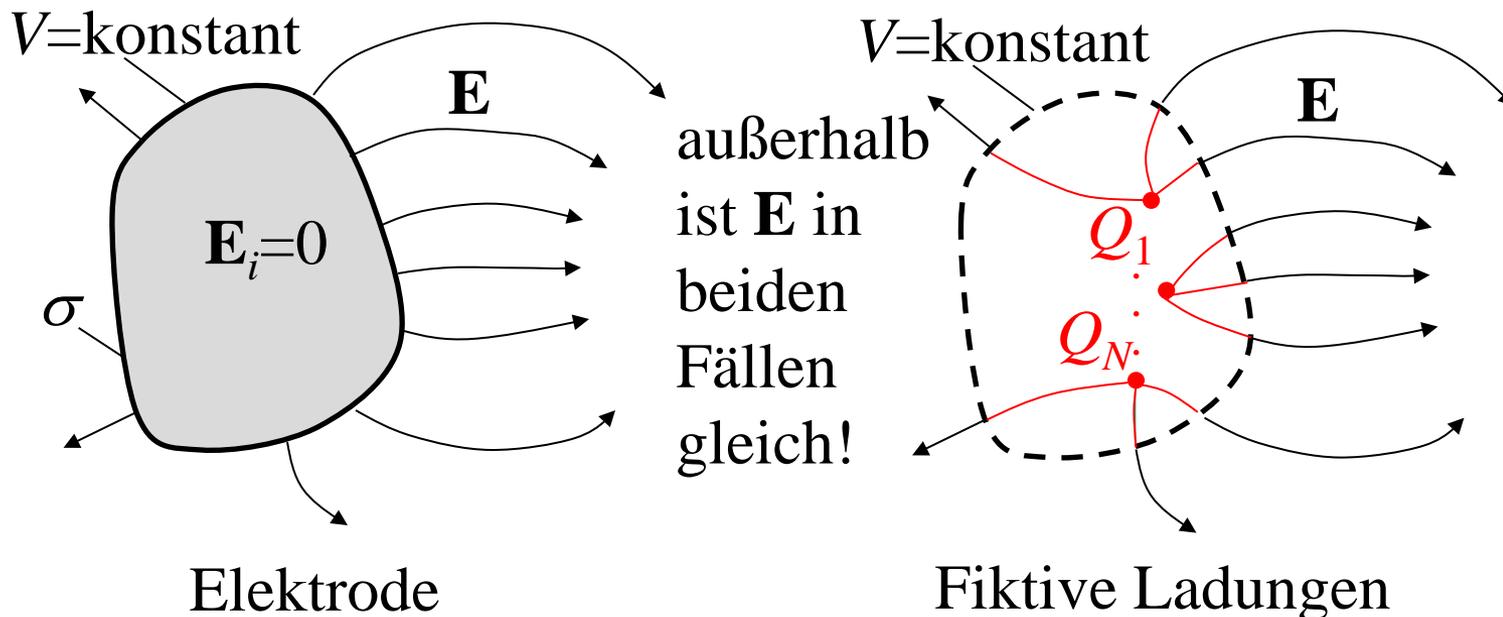
$$W = \frac{1}{C} \int_{Q_0=0}^Q Q_0 dQ_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Diese geleistete Arbeit ist als elektrische Energie im Kondensator gespeichert:

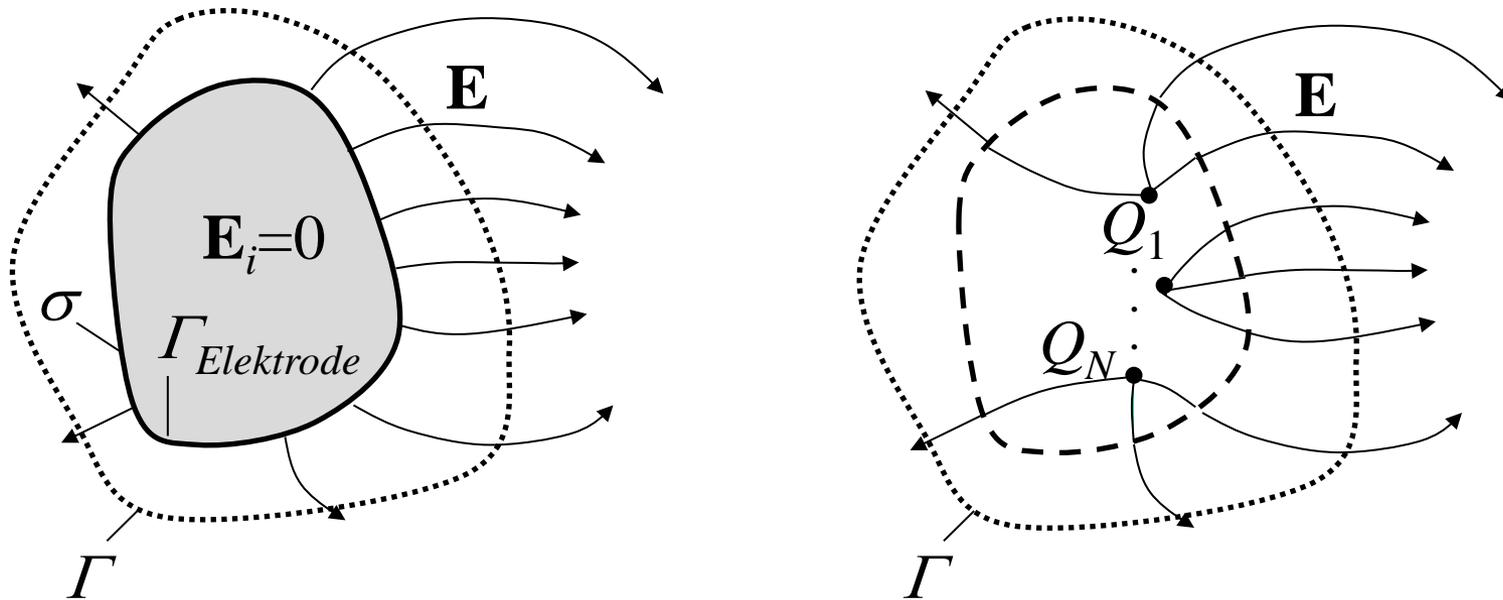
$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$

## 1.7 Methode der fiktiven Ladungen

Das elektrostatische Potential ist auf der Oberfläche von Metallelektroden konstant. Gelingt es eine Ladungsverteilung im *Inneren* der Elektrode (*fiktive Ladungen*) zu finden, so dass das Potential auf der Elektrodenoberfläche konstant ist, kann das elektrische Feld *außerhalb* der Elektrode als das Feld dieser Ladungen bestimmt werden.



Die Gesamtladung auf der Elektrodenoberfläche ist gleich die Summe der fiktiven Ladungen:

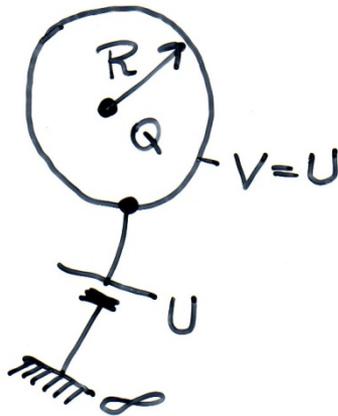


Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik:

$$\oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma_{\text{Elektrode}}} \sigma d\Gamma \qquad \oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N Q_j$$

$$\oint_{\Gamma_{\text{Elektrode}}} \sigma d\Gamma = \sum_{j=1}^N Q_j$$

Beispiel: Kugelelektrode (Radius  $R$ ) mit Bezugselektrode im Unendlichen



Potential einer Punktladung:  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Äquipotentialflächen sind *Kugelflächen*:  
 $r = \text{konstant} \Rightarrow V = \text{konstant}$

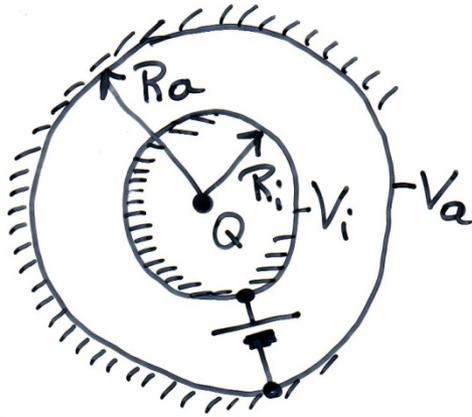
Die Punktladung ist die gesuchte Ladung, die kugelförmige Äquipotentialflächen hat.

$$V = U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{C} \quad \text{Im Unendlichen ist } V \text{ gleich Null.}$$

Kapazität einer Kugelelektrode gegen Unendlich:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

*Beispiel: Zwei konzentrische kugelförmige Metallelektroden*

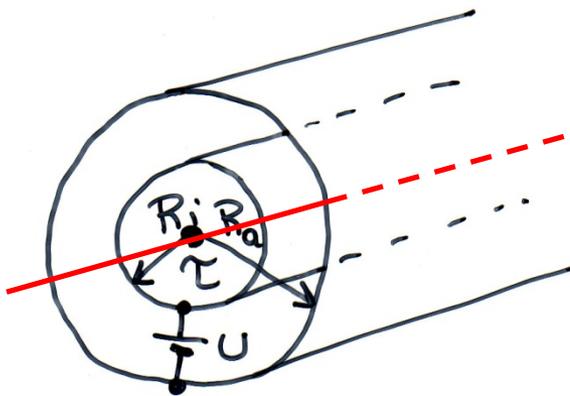


$$V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a}; \quad V_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i}$$

$$U = V_i - V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a} \right) = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_i R_a}{R_a - R_i}$$

*Beispiel: Unendlich langer Zylinderkondensator (Koaxialkabel)*



Äquipotentialflächen einer unendlich langen Linienladung mit konstanter Linienladungsdichte sind *Zylinderflächen*

$$V_i = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{R_i} \quad V_a = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{R_a}$$

$$U = V_i - V_a = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_a}{R_i}$$

Kapazität je Länge:

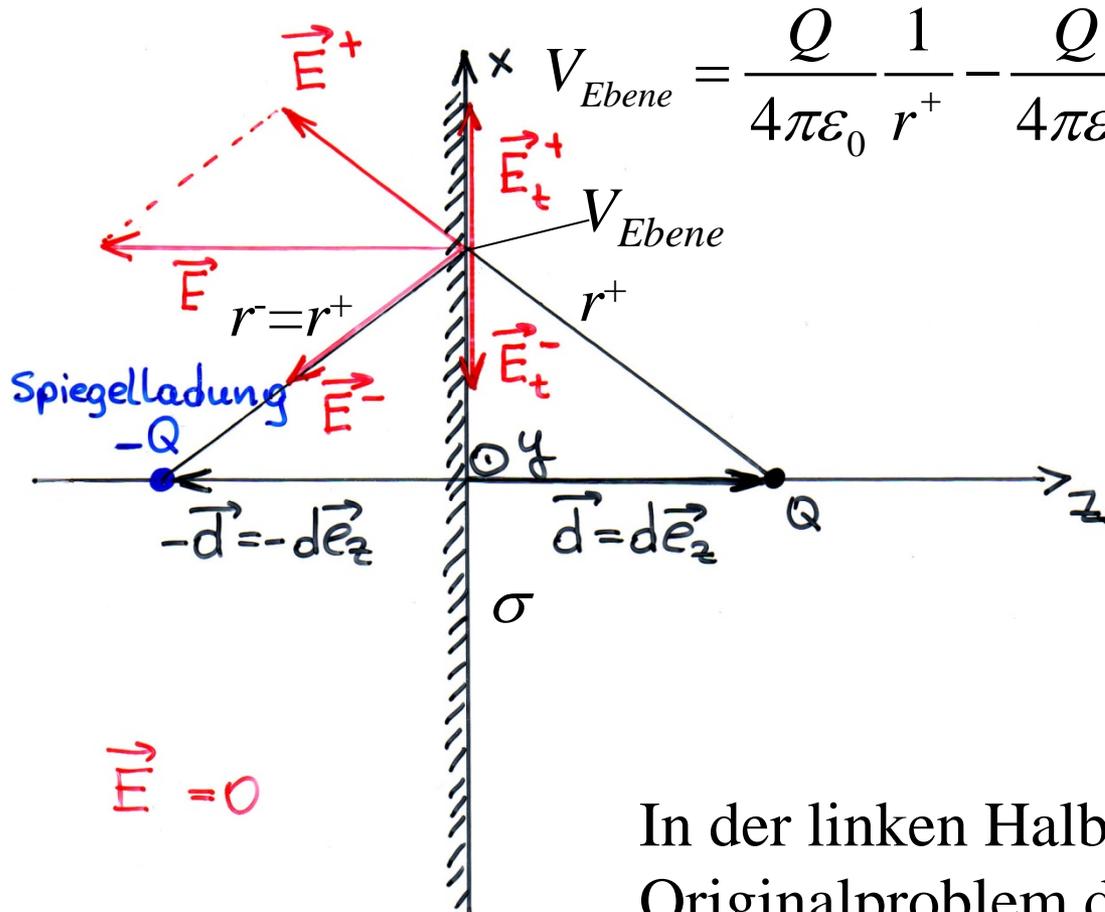
$$C' = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$$

Zylinderkondensator (Koaxialkabel) der Länge  $l$  ( $l \gg R_i, R_a$ ) bei Vernachlässigung der Randeffekte:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$$

## 1.7.1 Das Spiegelungsprinzip

Punktladung über unendlich ausgedehnter leitender Ebene:



$$V_{Ebene} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^+} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^-} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^+} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^+} = 0$$

Die Anordnung von  $Q$  und  $-Q$  im Abstand  $2d$  beschreibt für die rechte Halbebene das Problem:  $-Q$  ist eine fiktive Ladung: *Spiegelladung*

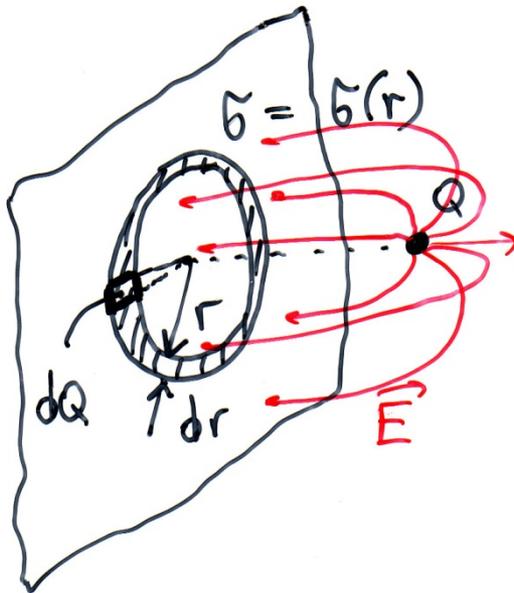
In der linken Halbebene ist beim Originalproblem die Feldstärke Null!

Feldstärke in einem beliebigen Aufpunkt:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$

$$\mathbf{r}_{QA} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + (z \pm d)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E}^+ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + (z-d)\mathbf{e}_z}{\left[x^2 + y^2 + (z-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \mathbf{E}^- = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + (z+d)\mathbf{e}_z}{\left[x^2 + y^2 + (z+d)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Für die  $xy$  - Ebene ( $z = 0$ ) ergibt sich:  $\mathbf{E} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z$



Flächenladungsdichte auf der Ebene:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{-Qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Influenzierte Gesamtladung auf der Ebene:

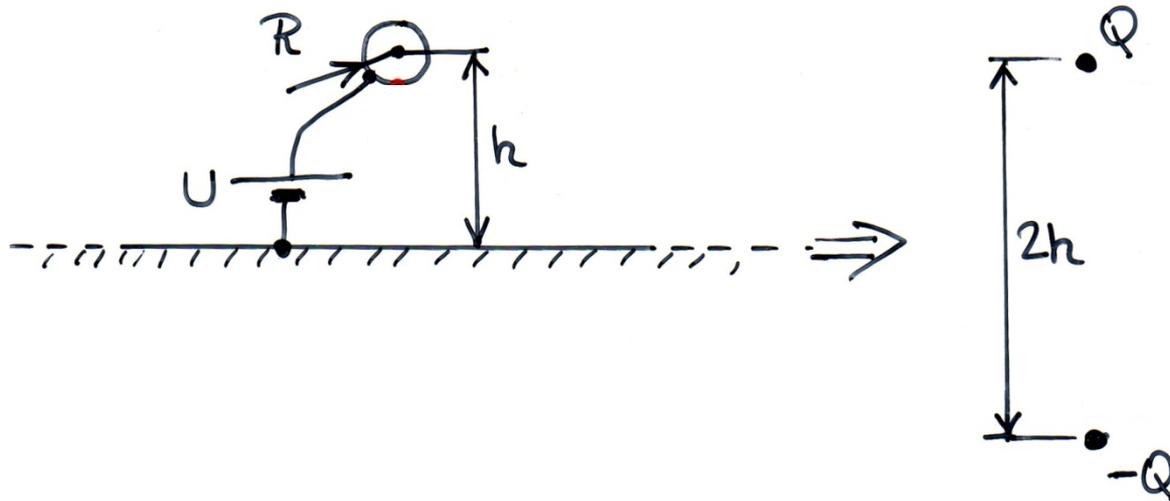
$$Q_{\text{inf}} = \int_{r=0}^{\infty} \sigma 2\pi r dr = -\frac{Qd}{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{2\pi r dr}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= Qd \left( \frac{1}{\sqrt{\infty}} - \frac{1}{\sqrt{d^2}} \right) = -Q$$

Die influenzierte Ladung ist gleich groß, wie die Spiegelladung:  $-Q$ .

Der Betrag der influenzierten Ladung ist gleich groß wie die influenzierende Ladung  $Q$ .

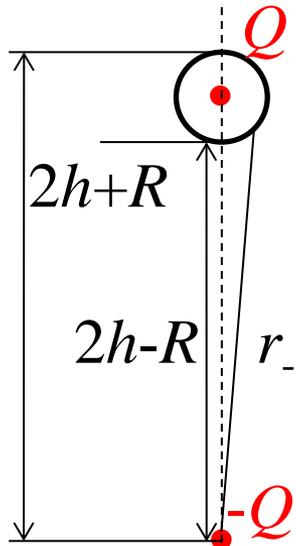
Punktladung über Ebene ist ein wenig realistisches Beispiel.

## Beispiel: Kugelelektrode über Ebene



Eine Kugelelektrode mit dem Radius  $R$  befindet sich im Abstand  $h$  über einer leitenden Ebene. Rechts: Ersatzproblem mit Spiegelladung im Kugelmittelpunkt (Näherung für  $R \ll h$ ). Zwei Punktladungen  $Q$  und  $-Q$  haben nur eine kugelförmige Äquipotentialfläche, nämlich die Symmetrieebene mit  $V=0$  (Radius dieser „Kugeloberfläche“ ist unendlich!) Alle anderen Äquipotentialflächen sind keine Kugelflächen.

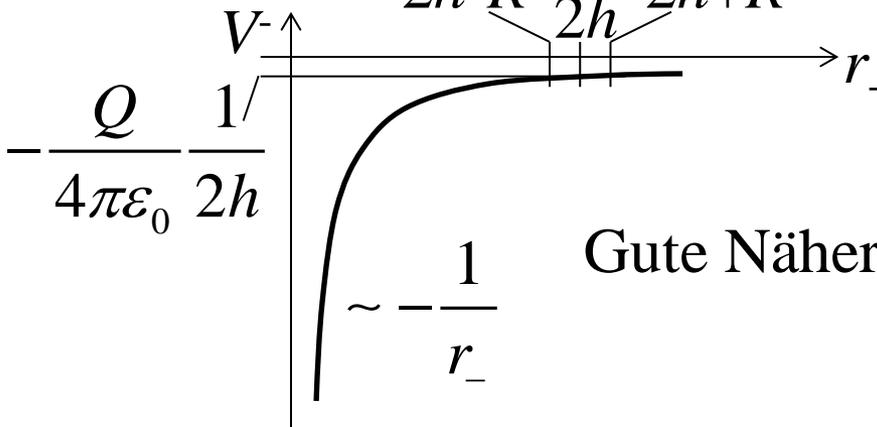
Die Kugelfläche ist aber näherungsweise äquipotentiell, falls  $R \ll h$ : nur im Feld von  $Q$  ist sie exakt äquipotentiell.



Im Feld von  $-Q$  ist das Potential in verschiedenen Punkten der Kugelfläche verschieden, da die Abstände  $r_-$  zur Spiegelladung  $-Q$  verschieden sind. Es gilt aber:  $2h - R \leq r_- \leq 2h + R$ , d.h. für

$$V^- = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-} \quad \text{hat man:}$$

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2h - R} \leq V^- \leq -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2h + R}$$



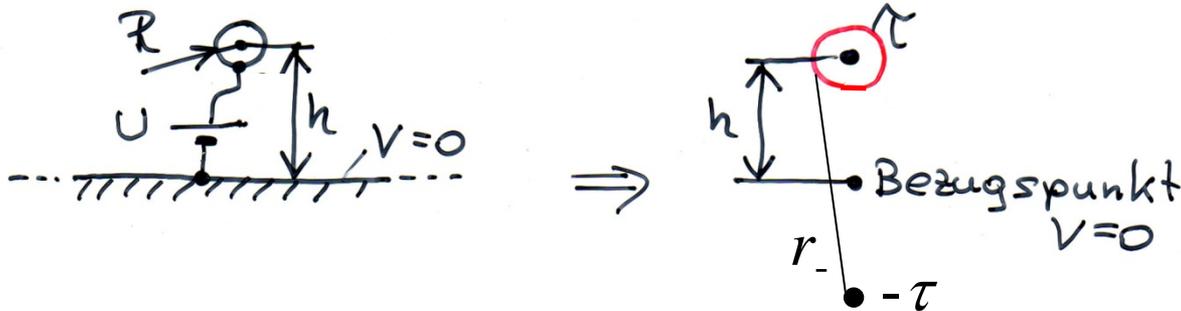
Gute Näherung:  $V^- = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2h} = \text{konstant}$

$$U = V_{Kugel} - V_{Ebene} = V_{Kugel} = V^+ + V^- \text{ (Superposition)}$$

$$V^+ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad V^- \approx -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2h}$$

$$U = \frac{Q}{C} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2h} \right) \Rightarrow C \approx \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R} - \frac{1}{2h}} = \frac{8\pi\epsilon_0 Rh}{2h - R}$$

## Beispiel: Unendlich lange Zylinderelektrode über Ebene



$$U = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Ebene}} = V_{\text{Zylinder}} = V^+ + V^- \quad (\text{Superposition})$$

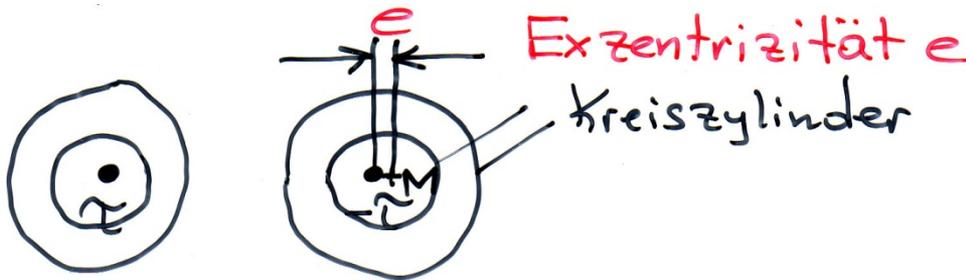
$$V^+ = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{R}$$

$$-\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{2h-R} \leq V^- \approx -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{2h} \leq -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{2h+R}$$

Kapazität je Länge:

$$U = \frac{\tau}{C'} \approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{h}{R} - \ln \frac{h}{2h} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R} \Rightarrow C' \approx \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}}$$

Das Problem hat auch eine exakte Lösung: Alle Äquipotentialflächen der Anordnung  $\tau, -\tau$  sind exzentrische Kreiszyylinder!



Die Ladungen sind bzgl. des Mittelpunktes um  $e$  verschoben.

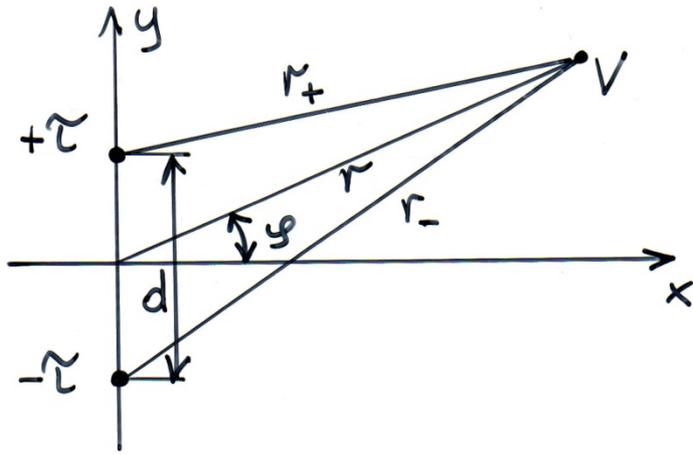
Bezugspunkt  $V=0$

$$U = V_{\text{Zylinder}} = V^+ + V^-$$

$$U = \frac{\tau}{C'} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h-e}{R-e} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h-e}{2h-e-R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-e-R}{R-e}$$

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h-e-R}{R-e}}$$

# Bestimmung von $e$ : Äquipotentialflächen eines Liniendipols



$$r_+^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \sin \varphi \quad r_-^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \sin \varphi$$

$$V = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} (\ln \frac{r_0}{r_+} - \ln \frac{r_0}{r_-}) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \sin \varphi}{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \sin \varphi}$$

Äquipotentialflächen:  $V = V_0 = \text{konstant} \Rightarrow e^{\frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{\tau}} = c > 0$

$$c(r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \sin \varphi) = r^2 + \frac{d^2}{4} + rd \sin \varphi \Rightarrow r^2(c-1) + \frac{d^2}{4}(c-1) - rd \sin \varphi(c+1) = 0 \quad r \sin \varphi = y$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

a)  $c = 1 \Rightarrow V_0 = 0 \Rightarrow 2yd = 0 \Rightarrow y = 0$  ... Symmetrieebene

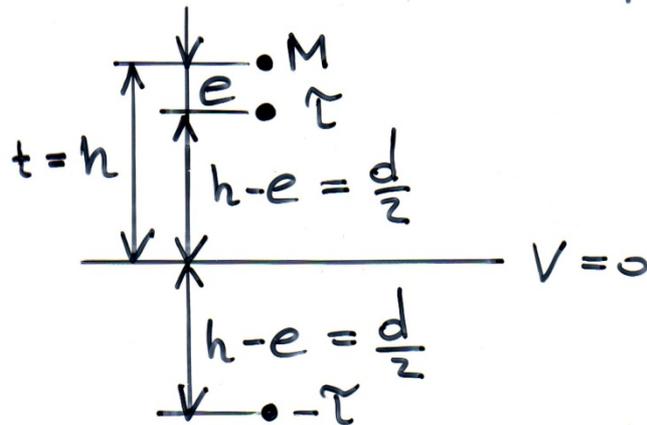
b)  $c \neq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - dy \frac{c+1}{c-1} + \frac{d^2}{4} = 0$

$$x^2 + (y - \frac{d}{2} \frac{c+1}{c-1})^2 = \frac{d^2}{4} \left[ \left( \frac{c+1}{c-1} \right)^2 - 1 \right] = \frac{d^2}{4} \frac{4c}{(c-1)^2} = \frac{d^2 c}{(c-1)^2}$$

Kreise, deren Mittelpunkte um  $t = \frac{d}{2} \frac{c+1}{c-1}$  verschoben sind

Der Radius ist:  $R = \frac{d\sqrt{c}}{|c-1|}$

Abstand des Mittelpunktes von  $+\tau$  und  $-\tau$ :



$$e = t - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \left( \frac{c+1}{c-1} - 1 \right) = d \frac{1}{c-1}$$

$$2h - e = t + \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \left( \frac{c+1}{c-1} + 1 \right) = d \frac{c}{c-1}$$

$$\Rightarrow e \cdot (2h - e) = R^2$$

$$e^2 - 2he + R^2 = 0 \Rightarrow e = h \pm \sqrt{h^2 - R^2} \quad e < h!$$

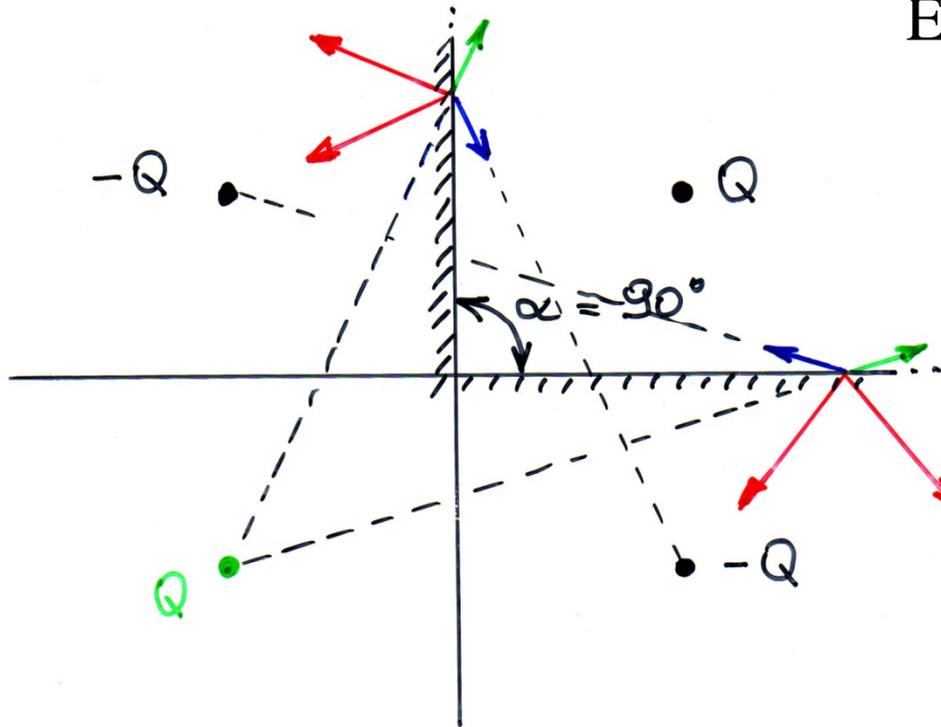
Der Abstand von  $\tau$  zum Mittelpunkt ist die Exzentrizität  $e$ :

$$e = h - \sqrt{h^2 - R^2}$$

Abstand von  $-\tau$  zum Mittelpunkt:  $2h - e = h + \sqrt{h^2 - R^2}$

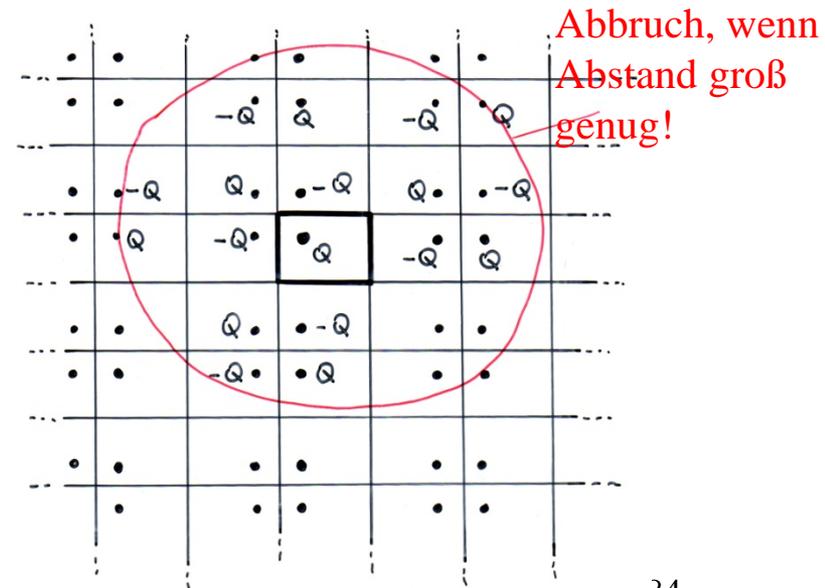
Beispiel: Spiegelung an rechtwinkliger Ecke  $90^\circ$ :

Punktladung in  $90^\circ$  Ecke



Es geht, falls  $\alpha = \frac{180}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Punktladung in rechteckiger Box. Unendlich viele Spiegelungen:

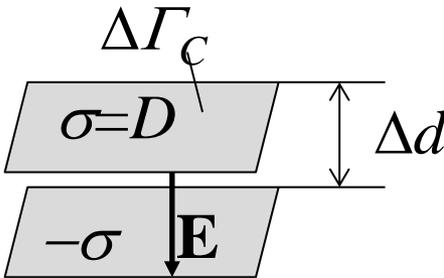


## 1.8 Energie und Kräfte im elektrischen Feld

### 1.8.1 Energieinhalt des elektrischen Feldes

**E** und **D** seien die elektrische Feldstärke und die elektrische Flussdichte in einem Punkt im Raum. In einem sehr kleinen Volumen  $\Delta\Omega$  um diesen Punkt kann das Feld als homogen betrachtet werden.

Energie eines infinitesimalen Parallelplattenkondensators:


$$\Delta W = \frac{1}{2} \underbrace{E \Delta d}_U \underbrace{\sigma \Delta \Gamma_c}_Q = \frac{1}{2} E D \Delta d \Delta \Gamma_c = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \Delta \Omega$$

elektrische Energiedichte  
(eine Feldgröße) wird postuliert als:

$$w_e = \frac{\Delta W}{\Delta \Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

Elektrische Energie in einem Volumen  $\Omega$ :

$$W = \int_{\Omega} w_e d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\Omega$$

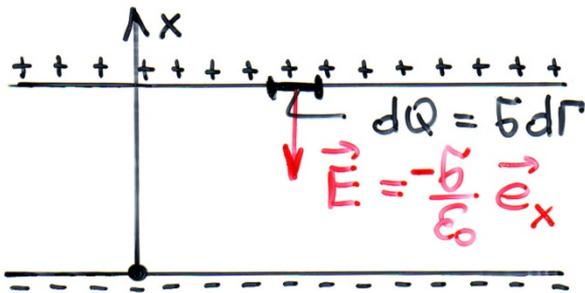
Die Energie wird nicht in den Ladungen, sondern im elektrischen Feld gespeichert. Die Äquivalenz

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho V d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\Omega$$

wird im Kapitel 6 bewiesen.

## 1.8.2 Kräfte auf Leiter im elektrischen Feld

Kraft auf die Elektrode eines Parallelplattenkondensators  
(Streufeld vernachlässigt, Fläche ist  $\Gamma_C$ ):

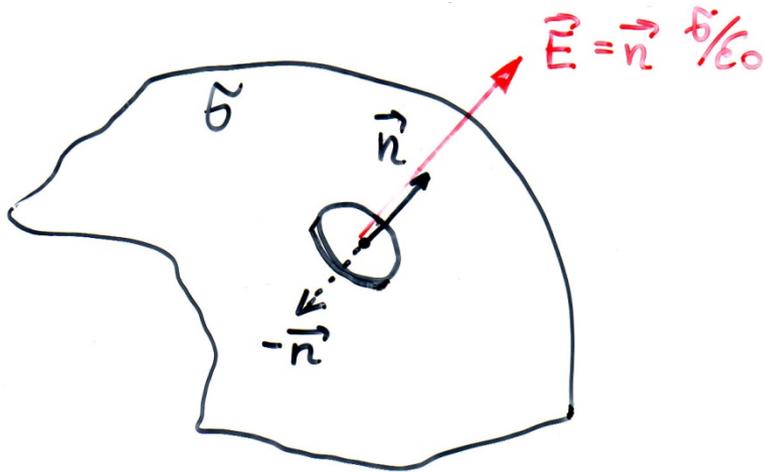


$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} dQ \mathbf{E} = - \int_{\Gamma} \sigma d\Gamma \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_x = - \frac{\sigma^2 \Gamma_C}{\epsilon_0} \mathbf{e}_x$$

**Falsch!**

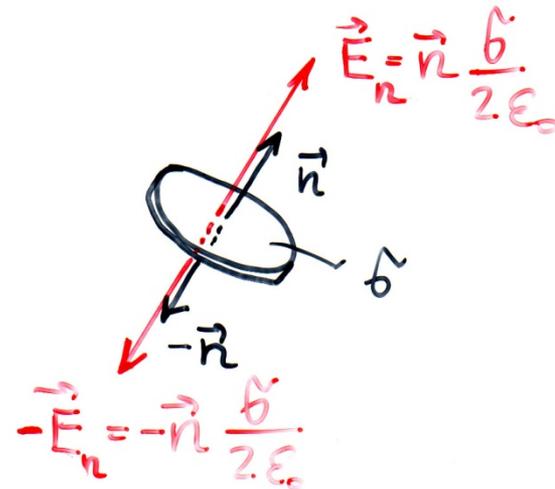
Das eigene Feld der differentiellen Ladung  $\sigma d\Gamma$  darf nicht berücksichtigt werden: das richtige Ergebnis ist nur die Hälfte!

## Beweis für beliebige Elektrodenoberfläche

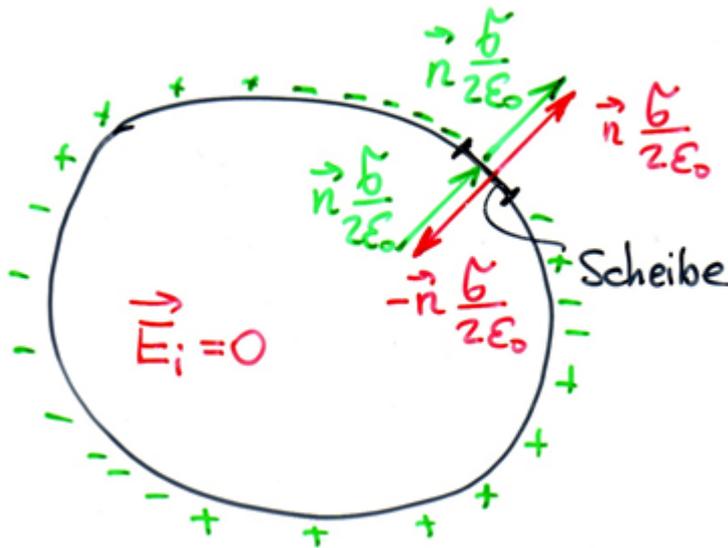


Kleine Scheibe aus geladener Elektrodenoberfläche wird herausgeschnitten und getrennt betrachtet

Die Normalkomponente von  $\mathbf{E}$  bei der getrennt betrachteten Scheibe ist wegen der Symmetrie  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .



Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  heben sich auf, sie brauchen daher nicht betrachtet werden, es interessieren nur die Normalkomponenten.



Es müssen alle restlichen Ladungen auf der Oberfläche der Elektrode (und alle sonstigen, vorhandenen Ladungen außerhalb der Elektrode) ein Feld  $\mathbf{n} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  am Ort des entfernten Scheibchens erzeugen, so dass das Feld nach Überlagerung mit dem Scheibchenfeld innen Null wird und somit außen den Wert  $\mathbf{n} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  annimmt.

Die Scheibe befindet sich also im Fremdfeld mit der Stärke  $\mathbf{n} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  und dieses Feld ist für die Kraft auf die Scheibe verantwortlich

$$\boxed{d\mathbf{F} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 d\Gamma}{\epsilon_0} \mathbf{n}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \frac{\sigma^2 d\Gamma}{\epsilon_0}}$$

Die Kraft auf die Kondensatorplatte, wie auch auf jede anderen beliebig geformte Elektrode ist exakt halb so groß, da das auf das Flächenelement wirkende Feld nur halb so groß, wie das Gesamtfeld ist.

Richtige Kraft auf die Kondensatorplatte ist daher:

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{\sigma^2 \Gamma_c}{2\epsilon_0} (-\mathbf{e}_x)}$$

### 1.8.3 Prinzip der virtuellen Verschiebung

Der Körper, an dem die Kräfte angreifen, wird um ein infinitesimal kleines Wegstück  $d\mathbf{r}$  verschoben. Die dazu nötige Arbeit wird vom Feld geleistet, wenn es sich um ein *abgeschlossenes physikalisches System* handelt, in dem der *Energieerhaltungssatz* gilt. Die Summe aller in einem solchen System auftretenden Energien bleibt stets konstant.

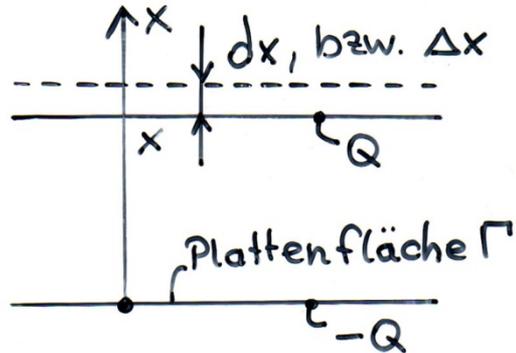
Es gilt in einem solchen abgeschlossenen System:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + dW = 0$$

bzw.

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dW$$

## Beispiel 1: Parallelplattenkondensator (Batterie abgeschlossen)



Die Ladung  $Q$  wird konstant gehalten  
(Batterie abgeschlossen):  
*energetisch abgeschlossenes System*

Die obere Platte wird um  $dx$  bzw.  $\Delta x$  in positive  $x$ -Richtung verschoben:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\varepsilon_0 \Gamma_C (x + \Delta x)}{2} E_2^2 - \frac{\varepsilon_0 \Gamma_C x}{2} E_1^2$$

$$E_1 = E_2 = E, \text{ da } Q = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \Gamma_C} \Rightarrow \Delta W = \frac{\varepsilon_0 \Gamma_C \Delta x E^2}{2} = \frac{Q^2 \Delta x}{2 \Gamma_C \varepsilon_0}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dx = -dW \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F \Delta r \approx -\Delta W$$

$$\mathbf{F} = -\frac{Q^2}{2\Gamma_c \varepsilon_0} \mathbf{e}_x = -\frac{\sigma^2 \Gamma_c}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_x$$

Gleiches Ergebnis, wie aus der Kraft auf die Ladungen im elektrischen Feld.

Ist die Batterie angeschlossen, spricht man von einem gekoppelten physikalischen System. Hier muss gelten, dass die Summe der von einem System aufgenommenen Energie gleich ist der vom anderen System abgegebenen Energie. Der Zuwachs der Energie eines Systems ist gleich der vom anderen System geleisteten Arbeit:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + dW = -dW_{Batt} \quad \text{mit} \quad dW_{Batt} = -dQU$$

Somit ist:  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + dW = dQU$

Man könnte auch die Batterie in das System mit einbeziehen und hat dann wieder nur ein einziges abgeschlossenes System. In diesem Fall kann man sagen, dass die von der Batterie geleistete Arbeit zum Verschieben des Körpers und zur Erhöhung der Feldenergie verwendet wird:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - dQU + dW = 0$$

## Beispiel 2: Plattenkondensator (Batterie angeschlossen)

Die Spannung  $U$  wird konstant gehalten (Batterie angeschlossen).  
Da  $U$ =konstant, ändert sich  $\mathbf{E}$  bei der Verschiebung:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{U}{x + \Delta x} - \frac{U}{x} = \frac{U}{x} \left( \frac{1}{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1 \right)$$

$$\Delta E \approx \frac{U}{x} \left( 1 - \frac{\Delta x}{x} - 1 \right) = -\frac{U \Delta x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = Q_2 - Q_1 = \varepsilon_0 \Gamma_C \Delta E$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 =$$

$$\frac{\varepsilon_0 \Gamma_C (x + \Delta x) U^2}{2(x + \Delta x)^2} - \frac{\varepsilon_0 \Gamma_C x U^2}{2x^2} = \frac{\varepsilon_0 \Gamma_C U^2}{2x} \left( \frac{1}{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1 \right) \approx -\frac{\varepsilon_0 \Gamma_C \Delta x U^2}{2x^2}$$

$$Fdx - dQU + dW = 0 \quad \text{bzw.} \quad Fdx - \underbrace{dE\varepsilon_0\Gamma_C}_{dQ}U + dW = 0$$

Damit ergibt sich:

$$Fdx = -\frac{U^2 dx \varepsilon_0 \Gamma_C}{x^2} + \frac{\varepsilon_0 \Gamma_C dx U^2}{2x^2} = -\frac{U^2 \varepsilon_0 \Gamma_C}{2x^2} dx$$

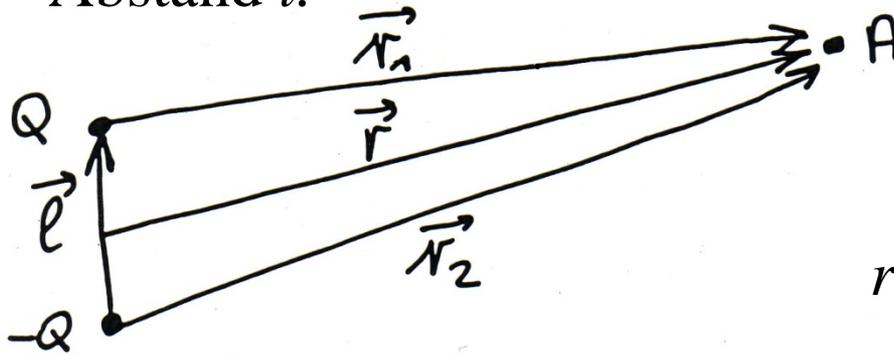
$$\mathbf{F} = -\frac{\varepsilon_0 \Gamma_C U^2}{2x^2} \mathbf{e}_x$$

Die Kraft auf die Platte ist selbstverständlich gleich wie für

das Beispiel 1, es braucht nur  $U^2$  durch  $\frac{Q^2}{C^2}$  mit  $C = \varepsilon_0 \frac{\Gamma_C}{x}$  ersetzt werden.

### 1.8.4 Der elektrische Dipol

Betrachtet wird die Doppelquelle im gegenseitigen Abstand  $l$ .



$$r \gg l$$

$$r = |\mathbf{r}|, l = |\mathbf{l}|, r_1 = |\mathbf{r}_1|, r_2 = |\mathbf{r}_2|$$

Die elektrische Feldstärke im Aufpunkt A:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{1}{r_2^2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right]$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2}, \quad r_1 = \sqrt{r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{l} + \frac{l^2}{4}} \approx r \sqrt{1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2}}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{l} + \frac{l^2}{4}} \approx r \sqrt{1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2}}$$

Für  $|x| \ll 1$  gilt:  $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ ,  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ,

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \quad \frac{1}{1-x} \approx 1 + x, \quad (1+x)^3 \approx 1 + 3x, \quad (1-x)^3 \approx 1 - 3x$$

$$r_1 \approx r \left( 1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2r^2} \right), \quad \frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2r^2} \right), \quad \frac{1}{r_1^3} \approx \frac{1}{r^3} \left( 1 + \frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2 r^2} \right)$$

$$r_2 \approx r \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2r^2} \right), \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2r^2} \right), \quad \frac{1}{r_2^3} \approx \frac{1}{r^3} \left( 1 - \frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2 r^2} \right)$$

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2}}{r^3} \left( 1 + \frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2 r^2} \right) - \frac{\mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2}}{r^3} \left( 1 - \frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2 r^2} \right) \right]$$

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \cancel{\mathbf{r}} + \frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2 r^2} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} - \cancel{\frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{4 r^2} \mathbf{l}} - \cancel{\mathbf{r}} + \frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{2 r^2} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} + \cancel{\frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{4 r^2} \mathbf{l}} \right]$$

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( -\mathbf{l} + 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2} \mathbf{r} \right)$$

Grenzübergang:  $l \rightarrow 0$ ;  $Q \rightarrow \infty$ , damit  $Q\mathbf{l}$  endlich (mathematischer Dipol): Das Dipolmoment  $\mathbf{p} = Q\mathbf{l}$  ist ein konstanter Vektor:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( -\mathbf{p} + 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \mathbf{r} \right)} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \text{ verschwindet } |\mathbf{E}| \text{ mit } 1/r^3$$

Ähnlich ist das Potential im Aufpunkt A:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{l} + \frac{l^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{l} + \frac{l^2}{4}}} \right)$$

$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2}}} \right) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2}} \right)$$

$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}}{r^2} \right) \right] = \frac{Q(\mathbf{r} \cdot \mathbf{l})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

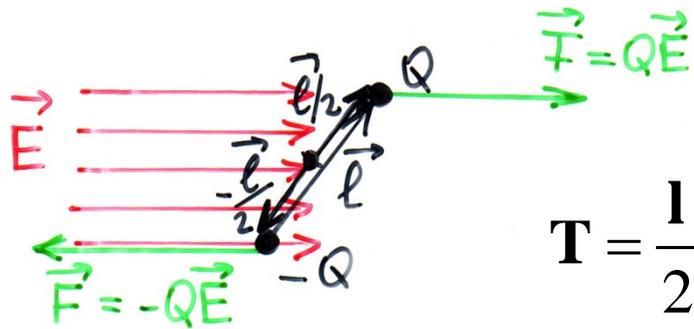
Potential eines Dipols mit Dipolmoment  $\mathbf{p}$ :

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

für  $r \rightarrow \infty$  verschwindet  $V$  mit  $1/r^2$

## 1.8.5 Kräfte auf einen elektrischen Dipol

Dipol im homogenen Feld:



Drehmoment:  $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{l}}{2} \times Q\mathbf{E} - \frac{\mathbf{l}}{2} \times (-Q\mathbf{E}) = 2 \frac{\mathbf{l}}{2} \times Q\mathbf{E} = \mathbf{l}Q \times \mathbf{E}$$

$\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$  gilt für auch für ein inhomogenes Feld



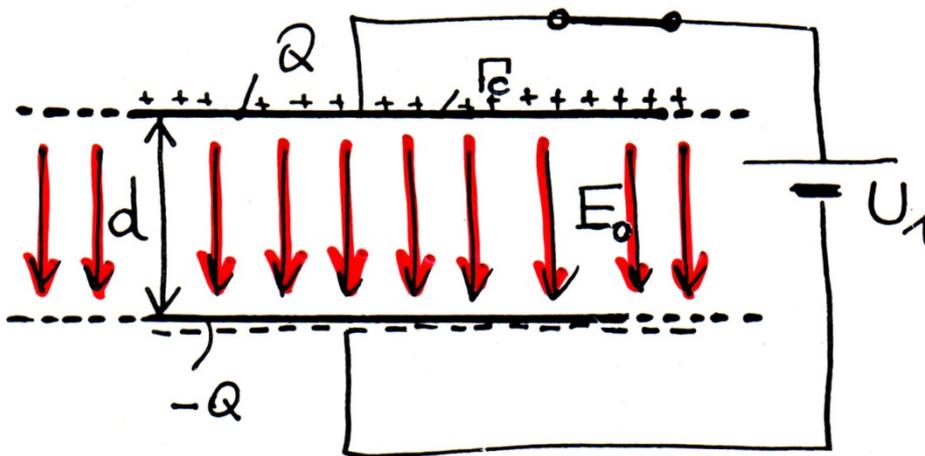
Ist der Dipol ausgerichtet, verschwinden Kraft und Drehmoment

## 1.9 Elektrische Felder in Materie

Wird der Raum zwischen den Elektroden eines Kondensators statt Vakuum mit einem dielektrischen (nichtleitenden, isolierenden) Material gefüllt erhöht sich die Kapazität um einen Faktor  $\epsilon_r > 1$ . Dieser heißt auch relative Dielektrizitätskonstante und ist eine Eigenschaft des Dielektrikums.

Betrachten wir einen Parallelplattenkondensator in drei verschiedenen Situationen:

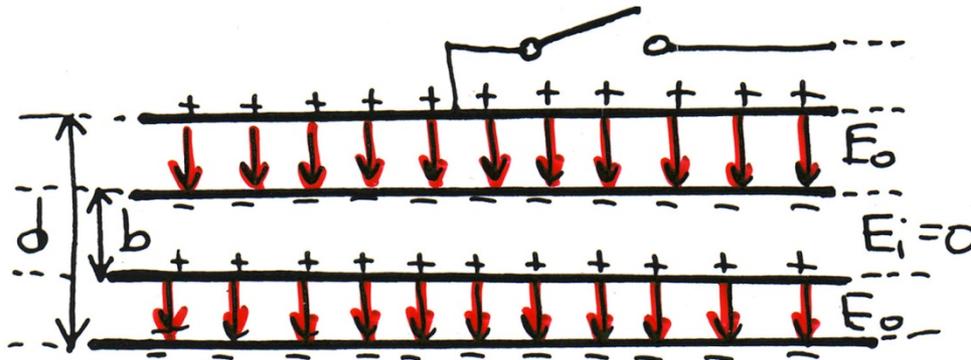
*1. Batterie angeschlossen, Vakuum zwischen Platten*



$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \Gamma_c}{d}$$

$$E_0 = \frac{Q}{\Gamma_c \epsilon_0} = \frac{U_1}{d}$$

2. Batterie getrennt,  $Q$  bleibt konstant, ungeladene Metallplatte der Dicke  $b$  wird eingeschoben



$$E_0 = \frac{Q}{\Gamma_C \epsilon_0}$$

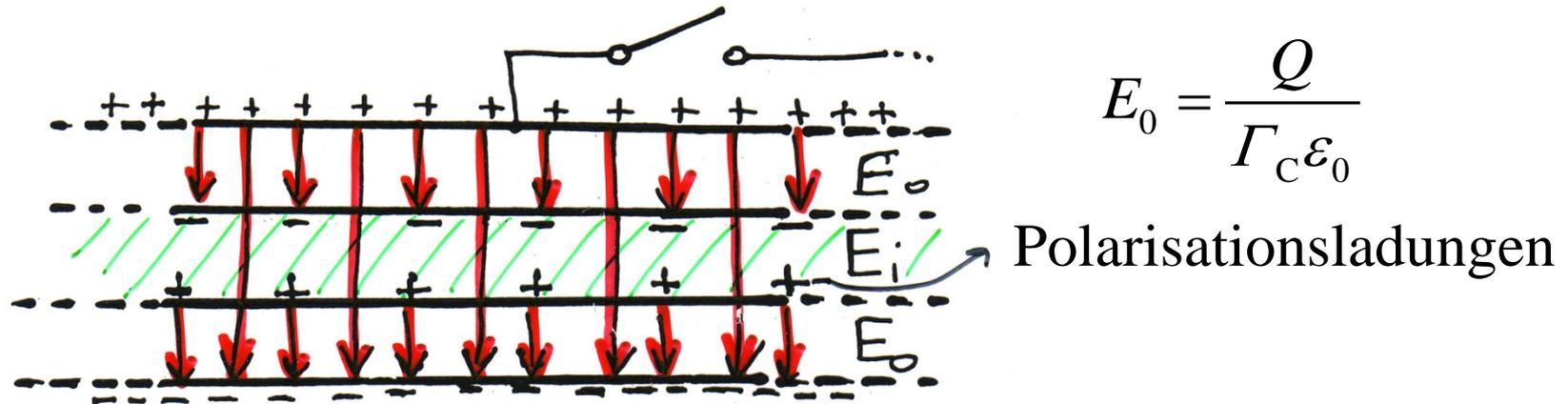
Die Spannung  $U_2$  zwischen den Platten wird kleiner:

$$U_2 = E_0(d - b) < U_1$$

Daher ist die Kapazität größer:

$$C_2 = \frac{Q}{U_2} = \frac{\epsilon_0 \Gamma_C}{d - b} > C_1$$

3. Batterie getrennt,  $Q$  bleibt konstant, ein Isolator der Dicke  $b$  wird eingeschoben



Die Spannung  $U_3$  zwischen den Platten wird kleiner, bleibt aber größer als  $U_2$ . Damit ist die Kapazität größer, als im Fall 1 aber kleiner als im Fall 2:  $U_2 < U_3 < U_1 \Rightarrow C_1 < C_3 < C_2$

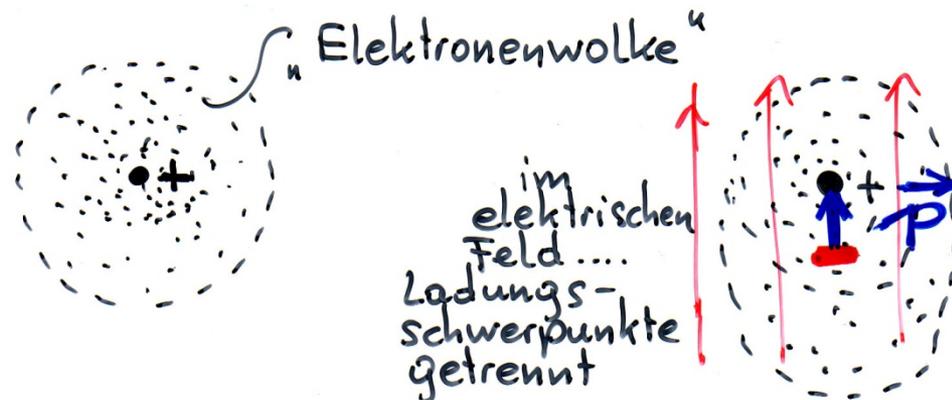
$$U_3 = E_0(d - b) + bE_i \Rightarrow 0 < E_i < E_0$$

Die elektrische Feldstärke im Dielektrikum ist kleiner als im Vakuum, ist aber nicht Null.

## 1.9.1 Atomare und molekulare Dipole

### 1.9.1.1 Induziertes Dipolmoment (unpolare Medien)

Wasserstoffatome im Grundzustand: Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons ist kugelförmig (exponentielle Verteilung).



Atomares Dipolmoment:

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}$$

$\alpha$ : atomare

Polarisierbarkeit, meist konstant

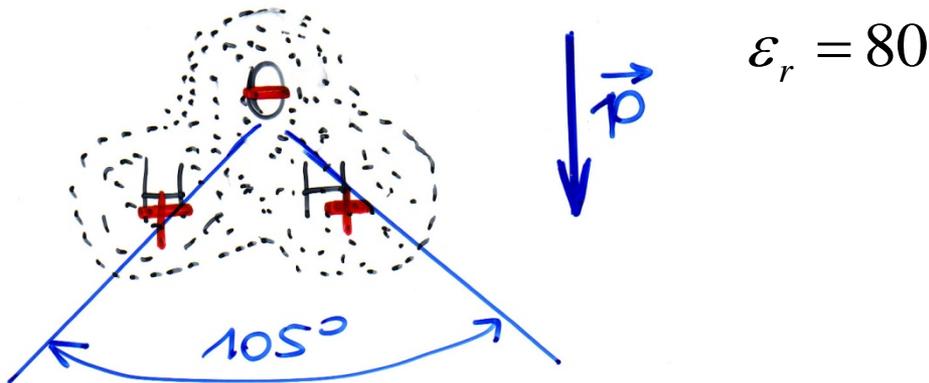
Relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  von unpolaren Medien etwa 2 bis 7

Die für die Praxis wichtigen Isolationsstoffe sind unpolar (Öl, Glass, Holz, Substrat, ...)

## 1.9.1.2 Permanentes Dipolmoment (polare Medien)

Polare Medien haben bereits in Abwesenheit eines elektrischen Feldes ein Dipolmoment (permanentes Dipolmoment).

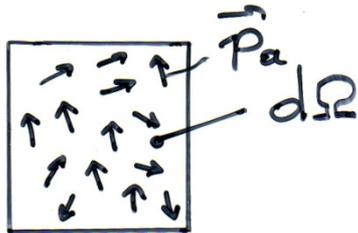
Beispiel: Wassermolekül  $\text{H}_2\text{O}$



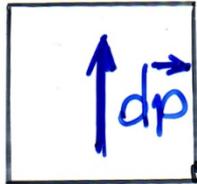
Weitere polare Medien: ferroelektrische Kristalle

## 1.9.2 Polarisationsdichte und die elektrische Flussdichte

Makroskopische „Verschmierung“ der atomaren Dipolmomente in einem makroskopischen Volumenelement  $d\Omega$ :



$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_a}{d\Omega} : \text{Polarisationsdichte}$$

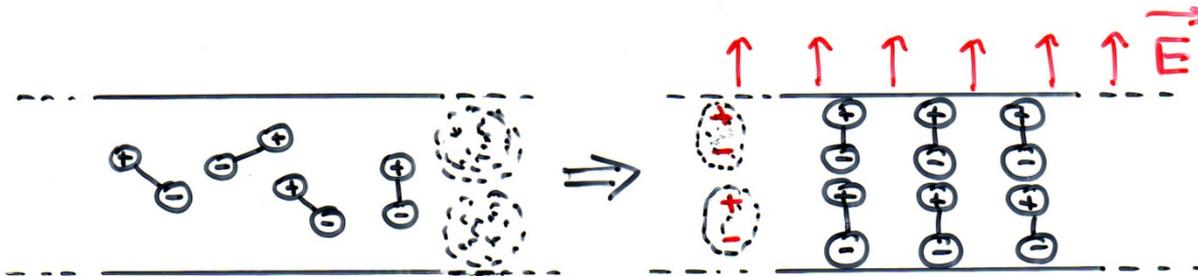


$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} d\Omega$$

$\mathbf{P}$  und  $\mathbf{D}$  haben die gleiche Einheit:

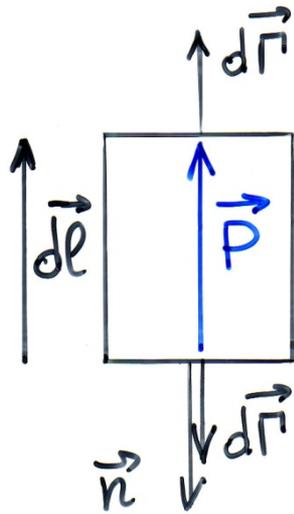
$$[\mathbf{P}] = \frac{[Ql]}{[\text{Volumen}]} = 1 \frac{Cm}{m^3} = 1 \frac{C}{m^2}$$

## Plattenkondensator mit dielektrischer Platte:

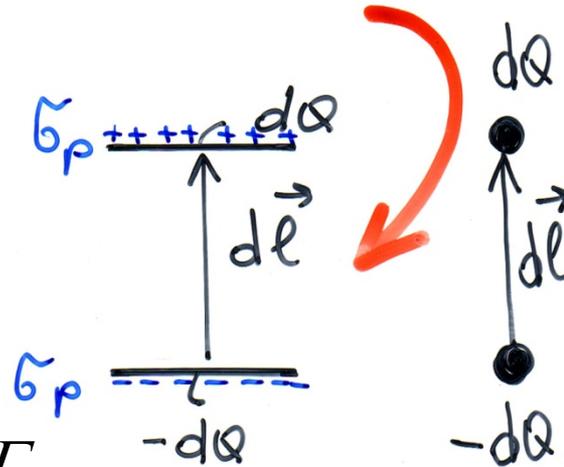


Es werden im externen elektrischen Feld Dipole induziert (unpolare Medien) oder bereits vorhanden permanente Dipole ausgerichtet (polare Medien). Im Inneren der Platte kompensieren sich die Ladungen, an den Deckflächen bleiben sogenannte *Polarisationsladungen* (das sind *gebundene* Ladungen im Gegensatz zu den *freien* Ladungen) zurück. Das elektrische Feld im Inneren der Platte kann im Gegensatz zur Influenz nicht völlig verschwinden, weil sonst die Ursache für die Polarisation wegfällt.

### 1.9.2.1 Zusammenhang zwischen Polarisationsdichte und Polarisationsladung



$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}d\Omega = \mathbf{P} \underbrace{d\Gamma \cdot d\mathbf{l}}_{d\Omega} = \underbrace{(\mathbf{P} \cdot d\Gamma)}_{dQ} d\mathbf{l} = dQd\mathbf{l}$$

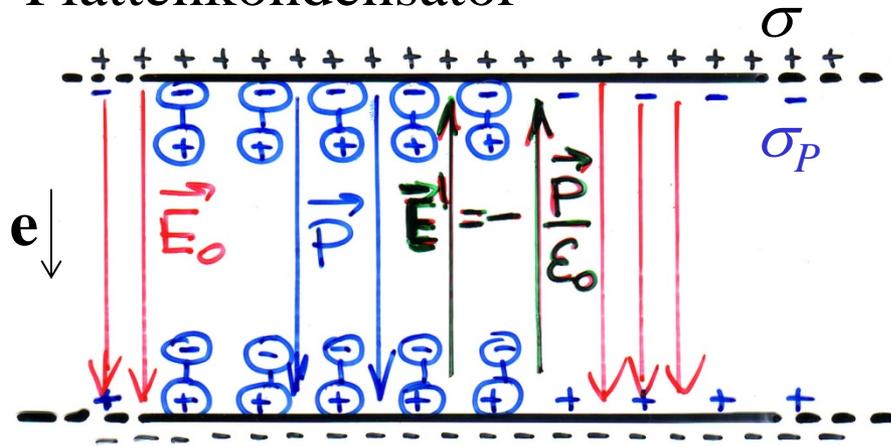


$$dQ = \mathbf{P} \cdot d\Gamma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \sigma_p d\Gamma$$

$$\boxed{\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}$$

Gilt auch, wenn  $\mathbf{P}$  beliebig orientiert ist.

# Plattenkondensator



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

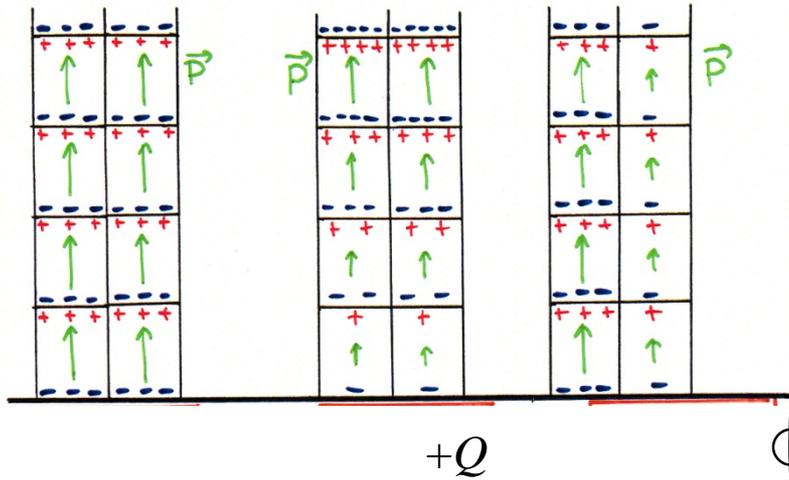
Die Polarisationsflächenladungen erzeugen ein Feld  $\mathbf{E}'$ , das dem ursprünglichen Feld  $\mathbf{E}_0$  entgegenwirkt.

Das Feld  $\mathbf{E}_0$  wird durch die freien Ladungen  $\sigma$  erzeugt, es gilt daher  $\sigma = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}$ . Nach der Definition der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D}$  gilt  $\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}$ . Damit hat man  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ . Daher:

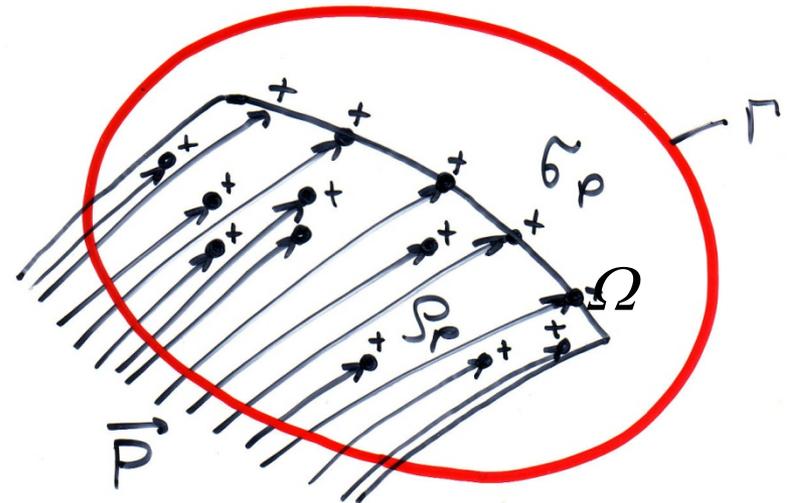
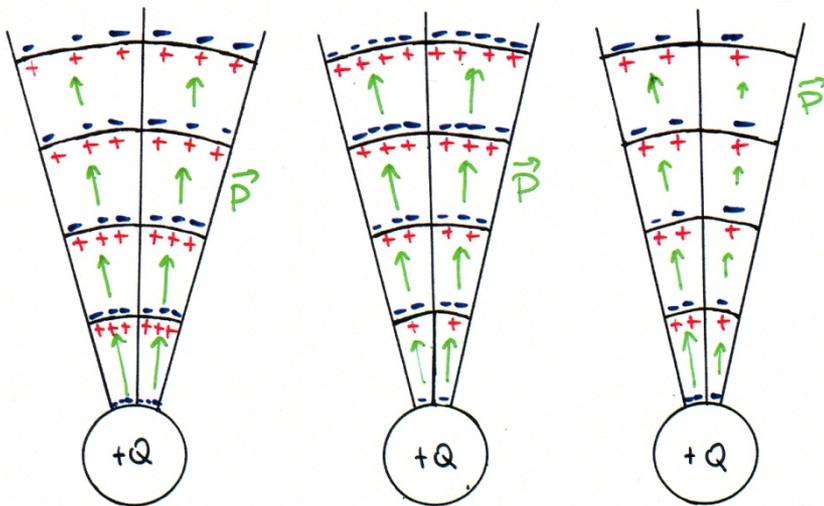
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

# Verhalten von $\mathbf{P}$ für verschiedene homogene und inhomogene Dielektrika bei einer ebenen und einer kugelförmigen Elektrode:

Im Allgemeinen sind die Quellen von  $\mathbf{P}$  die negativen Polarisationsladungen:



$$\oint_{\Gamma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -Q_P = -\int_{\Omega} \rho_P d\Omega - \int_{\Gamma_P} \sigma_P d\Gamma$$



Sind auch freie Ladungen  $\rho$  vorhanden, bilden diese zusammen mit den Polarisationsladungen die Quellen von  $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ :

$$\oint_{\Gamma} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma_p} \sigma_p d\Gamma + \int_{\Omega} \rho_p d\Omega}_{-\oint_{\Gamma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}$$

$$\oint_{\Gamma} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

Die freien Ladungen sind die Quellen von  $\mathbf{D}$ :  $\oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega$

Es gilt daher im Allgemeinen:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Das Medium ist linear, wenn  $\mathbf{P}$  proportional zu  $\mathbf{E}$  ist:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\chi$  heißt elektrische Suszeptibilität:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$$

In linearen Medien sind daher  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  auch proportional

Kapazität eines Parallelplattenkondensators, welcher mit einem Medium mit der Suszeptibilität  $\chi$  gefüllt ist:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma \Gamma_c}{Ed} = \frac{D \Gamma_c}{Ed} = (1 + \chi) \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\Gamma_c}{d}}_{C_0}$$

$C_0$ : Kapazität des mit Vakuum gefüllten Kondensators.  
Es gilt laut Messungen:  $C = \varepsilon_r C_0$ . Damit gilt:

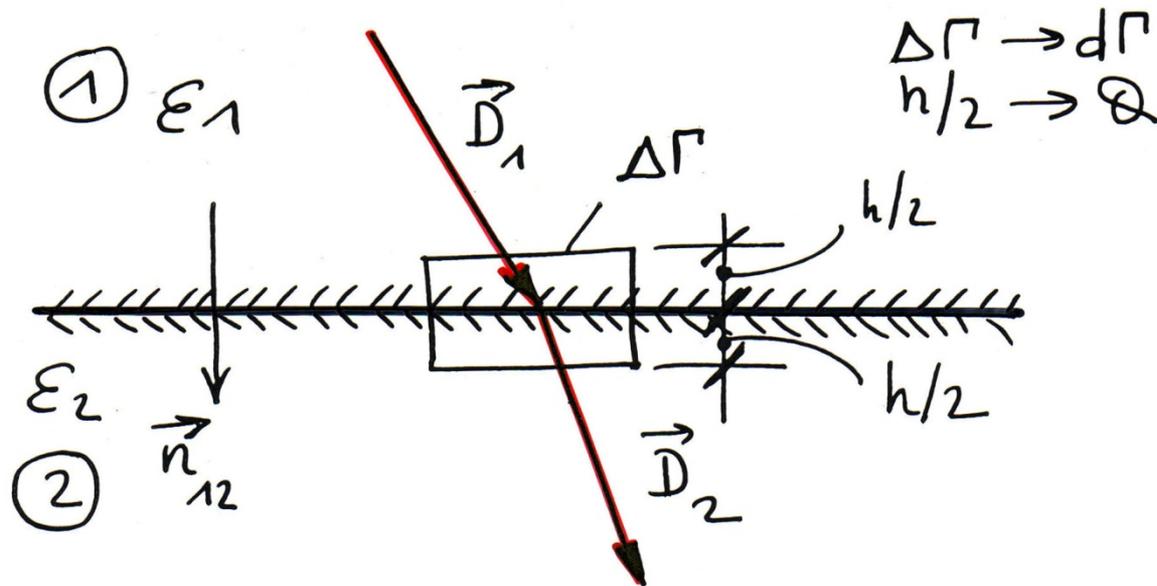
$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ : Permittivität oder Dielektrizitätszahl

### 1.9.3 Grenzflächenbedingungen

Verhalten von  $\mathbf{D}$  auf der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedener Permittivität:



$$\oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{D}_1 \Delta\Gamma + \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{D}_2 \Delta\Gamma = 0$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{2n} - D_{1n} = 0$$

Die Normalkomponente von  $\mathbf{D}$  ist stetig, wenn auf der Grenzfläche keine freien Flächenladungen sitzen!

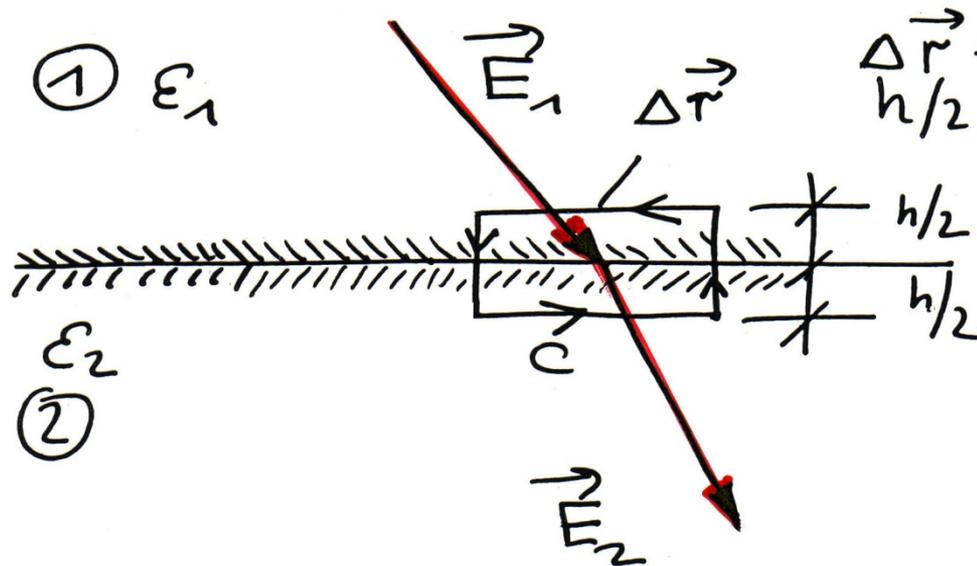
$$D_{2n} = D_{1n}$$

Wegen  $\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$  gilt

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Die Normalkomponenten von  $\mathbf{E}$  verhalten sich an der Grenzfläche umgekehrt proportional zum Verhältnis der Permittivitäten!

Verhalten von  $\mathbf{E}$  auf der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedener Permittivität:



$\Delta \mathbf{r}$  sehr klein, sodass  $\mathbf{E}$   
im Bereich von  $\Delta \mathbf{r}$   
konstant in 1. Näherung

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2 - \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1 = \Delta \mathbf{r} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = (E_{2t} - E_{1t}) \Delta r = 0$$

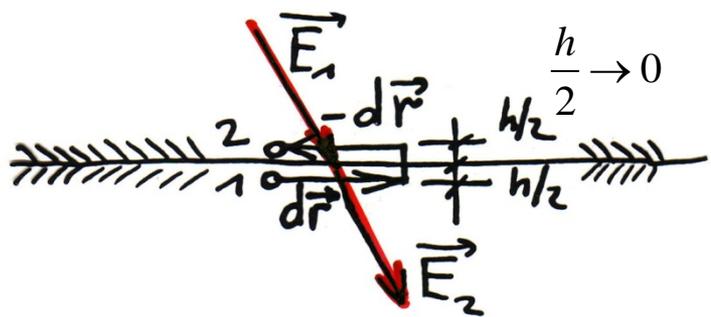
Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  sind stetig!

$$\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}$$

Wegen  $\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$  gilt  $\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{D}$  verhalten sich an der Grenzfläche direkt proportional zum Verhältnis der Permittivitäten!

Verhalten des Potentials an der Grenzfläche:



The diagram shows a horizontal interface between two media. A red vector  $\mathbf{E}_1$  points downwards and to the right in the upper medium, and a red vector  $\mathbf{E}_2$  points downwards and to the right in the lower medium. A path for integration is shown with segments of length  $h/2$  in each medium, and a differential path element  $d\mathbf{r}$  is indicated. The height  $h$  is shown to approach zero ( $h \rightarrow 0$ ).

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} =$$

$$= (E_{2t} - E_{1t}) dr = 0$$

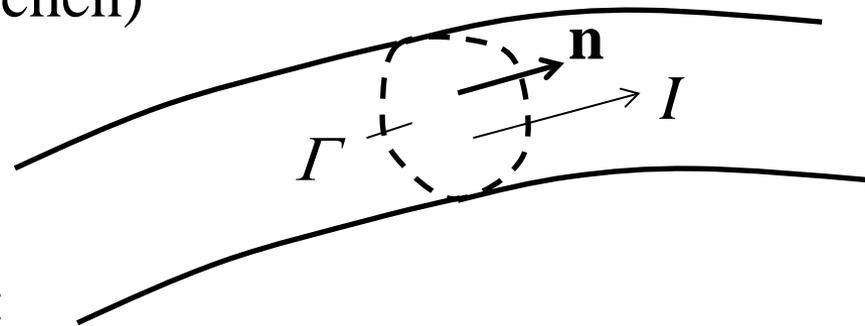
Das Potential ist an der Grenzfläche wegen  $E_{2t} = E_{1t}$  stetig!

# 2. Das stationäre elektrische Strömungsfeld

## 2.1 Elektrischer Strom, Stromdichte

- Strömende elektrische Ladung: elektrischer Strom
- Bewegung von Ladungsträgern: positive und negative Ionen (geladene Teilchen)

- Strom(stärke)  $I$ :  
Ladung durch eine  
Fläche  $\Gamma$  je Zeit

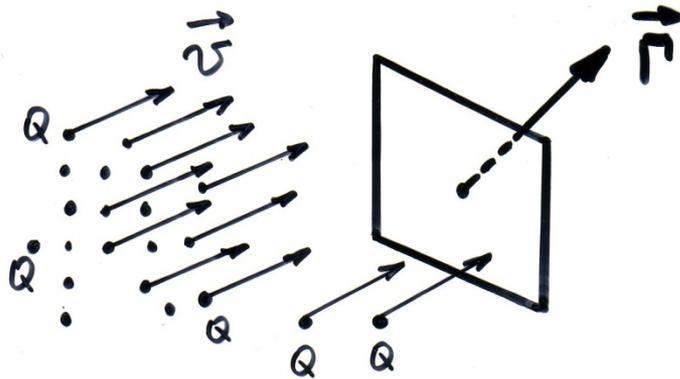


- Einheit des Stromes:

$$[I] = \frac{[Ladung]}{[Zeit]} = 1 \frac{C}{s} = 1 \frac{As}{s} = 1A \text{ (Ampere)}$$

- Stationärer Strom:  $I$  ist zeitlich konstant

Spezialfall: konvektiver Strom beweglicher Teilchen gleicher Größe  $Q$  mit gleicher zeitunabhängiger Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$



$n$ : Teilchendichte (Anzahl der Teilchen je Volumeneinheit),  
 $[n] = 1/m^3$

Ladungsdichte:  $\rho = Qn$

Anzahl der Teilchen durch Fläche im Zeitintervall  $\Delta t$ :  $n\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Gamma} \Delta t$ .  
 Damit ist der Strom durch die Fläche:

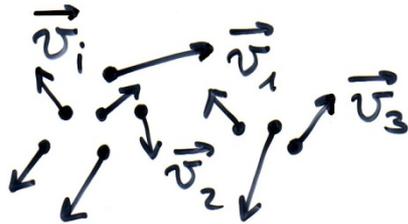
$$I = \frac{Qn\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Gamma} \Delta t}{\Delta t} = Qn\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Gamma} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{\Gamma}$$

Homogene Stromdichte  $\mathbf{J}$ :  $I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{\Gamma}$

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}}$$

Leitungsmechanismus in Metallen:

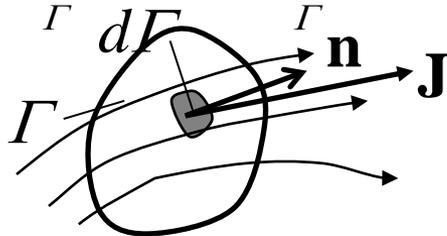
Frei bewegliche Elektronen führen stochastische (thermische) Bewegungen durch. Für die Stromleitung ist die mittlere Geschwindigkeit (Driftgeschwindigkeit)  $\mathbf{v}$  ausschlaggebend



$$\mathbf{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \quad \boxed{\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}}$$

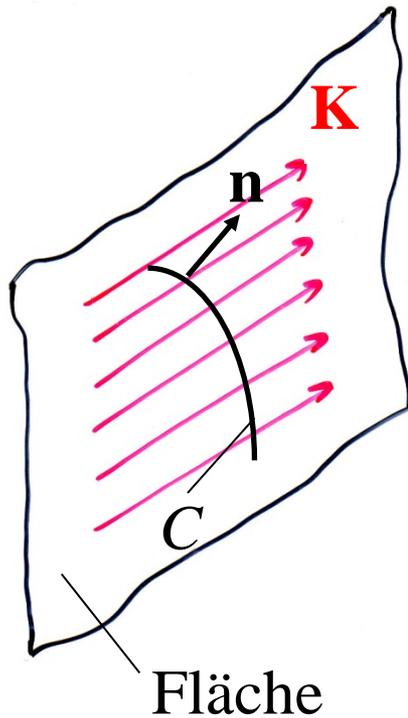
Für eine inhomogene Stromdichteverteilung (d.h.  $\rho$  und  $\mathbf{v}$  sind Funktionen vom Ort) gilt für eine beliebige Fläche  $\Gamma$ :

$$I = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \mathbf{J} \text{ ist eine Feldgröße. Einheit: } [\mathbf{J}] = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$



Die Wahl der Orientierung von  $\mathbf{n}$  bestimmt die Zählrichtung des Stromes

Oberflächenstromdichte:  $\mathbf{K}$  (manchmal wird auch  $\alpha$  verwendet)



$$\Rightarrow I_C = \int_C \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} ds$$

$$[\mathbf{K}] = 1 \frac{A}{m}$$

## 2.2 Kontinuitätsgleichung, Ladungserhaltung

Ein Strömungsfeld ist stationär, wenn die Stromdichte überall zeitlich konstant ist, d.h.  $\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0$ .

Strom durch eine geschlossene Fläche:

Es kann kein zeitlich unabhängiger Strom  $I$  aus einer geschlossenen Oberfläche beliebig lang (unendlich lang!) aus- oder eintreten. Das ist im Widerspruch zum Ladungserhaltungssatz. Es müsste im eingeschlossenen Volumen laufend Ladung aus dem Nichts erzeugt werden. Es gilt daher für das *stationäre* Strömungsfeld:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$$

Die Quellen des stationären Strömungsfeldes sind Null!

Ist im Allgemeinen die Stromdichte  $\mathbf{J}$  zeitabhängig, muss ein aus einer geschlossenen Oberfläche austretender Strom eine Abnahme der Ladung im Inneren bewirken.

In der Zeit  $dt$  fließt die Ladung  $dQ$  aus dem Volumen durch die Oberfläche, d.h. die Ladung im Inneren nimmt um

$\left[ \oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} \right] dt$  ab. Dies bedeutet, dass die Änderung der

Ladung in der Zeit  $dt$   
 $dQ = Q(t + dt) - Q(t) = - \left[ \oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} \right] dt$  ist. Daraus folgt das Kontinuitätsgesetz:

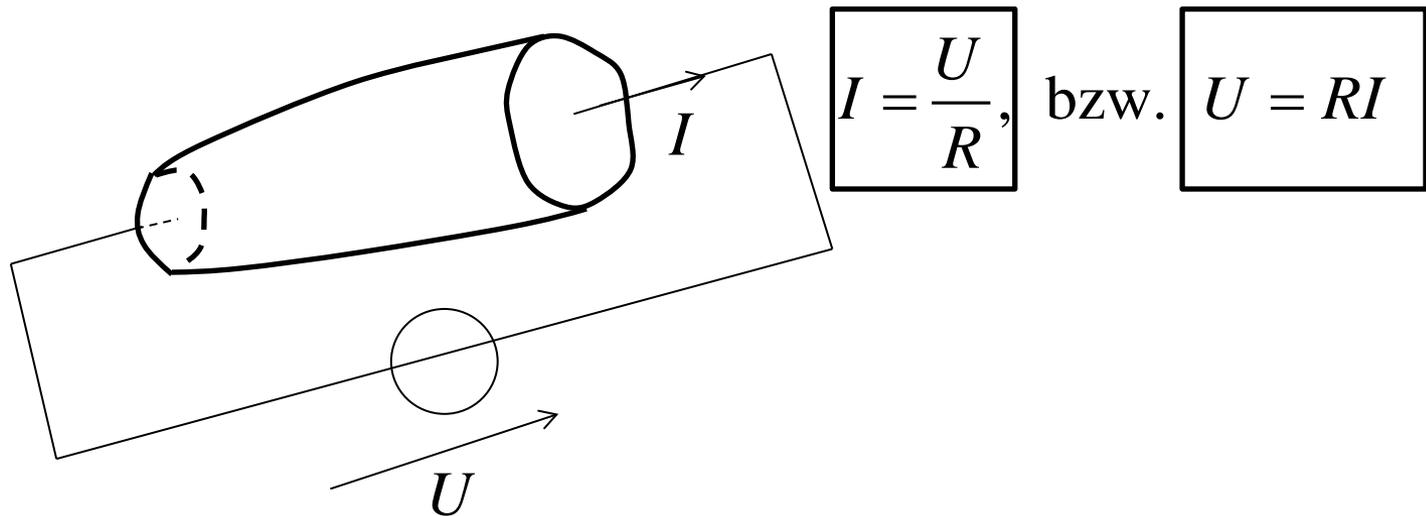
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega$$

## 2.3 Das Ohm'sche Gesetz

Im Gegensatz zum konvektiven Strom mechanisch bewegten Ladungen ( $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ ), werden in einem Leiter die Ladungen durch ein elektrisches Feld bewegt: **Leitungsstrom**.

Die häufigste Ursache für das Zustandekommen eines Stromes ist das elektrische Feld, das eine Kraft auf die Ladungen ausübt und sie in Bewegung versetzt, falls dies die Eigenschaften der Materie, in der sich die Ladungsträger befinden, gestatten (Leiter!).

Eine der frühesten experimentellen Entdeckungen über elektrische Ströme in Materie wird durch das *Ohm'sche Gesetz* beschrieben: der Strom, der z.B. in einem Stück Kupferdraht fließt, ist proportional der an seinen Enden liegenden Spannung:



Bei konstanter Temperatur ist der Widerstand  $R$  von der Stromstärke unabhängig, er hängt nur von der Geometrie und vom Material ab.

Das Ohm'sche Gesetz ist Ausdruck einer bemerkenswerten und allgemeinen Eigenschaft der Materie. Das Grundgesetz, das sich dahinter verbirgt ist folgendes:

In Leitern, in denen das Ohm'sche Gesetz gilt, ist die Stromdichte  $\mathbf{J}$  an jedem Punkt im Raum der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  proportional. Der Proportionalitätsfaktor hängt nur vom Leitermaterial ab und nicht von der Geometrie des Leiters:

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\gamma$  ist die spezifische Leitfähigkeit.

$$\text{Einheit: } [\gamma] = \frac{[\mathbf{J}]}{[\mathbf{E}]} = 1 \frac{A}{m^2} \cdot \frac{m}{V} = \frac{1}{\Omega m} = 1 \frac{S}{m}$$

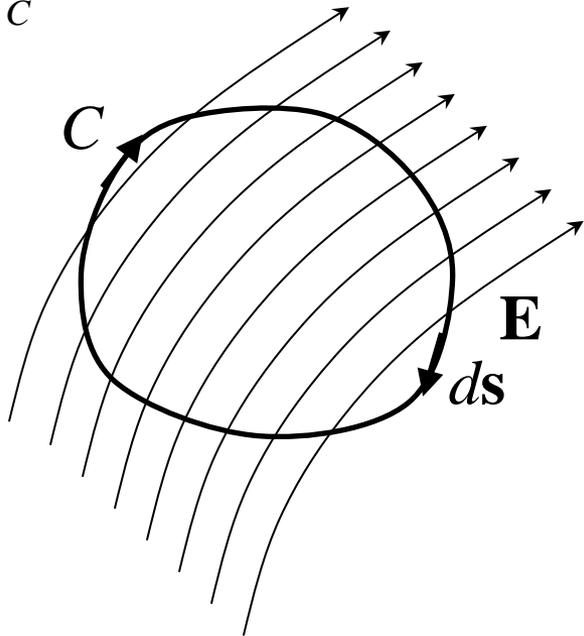
$\Omega$  : Ohm,  $S$  : Siemens

Typische Werte für  $\gamma$ : Cu:  $\gamma=5,7 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$  Stahl:  $\gamma=5 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$   
Al:  $\gamma=3,5 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$  Erde:  $\gamma=10^{-2} \frac{S}{m}$

Diese sonderbare Eigenschaft der Leiter bedarf einer Begründung, werden doch *frei bewegliche* Ladungen im elektrischen Feld beschleunigt, d.h. es ist der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{J}$  und  $\mathbf{E}$  keinesfalls linear. Der Grund für die Linearität ist der, dass die Elektronen bei ihrer beschleunigten Bewegung laufend ihre Richtungsinformation durch Stöße mit den Atomen des Leiters verlieren und immer wieder „von vorne“ anfangen müssen. Der Verlust der Richtungsinformation erfolgt durch die thermische Bewegung der Elektronen. Ist die thermische Geschwindigkeit sehr viel größer als die durch das Feld hervorgerufene, wird die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen (Driftgeschwindigkeit) der Feldstärke  $\mathbf{E}$  proportional.

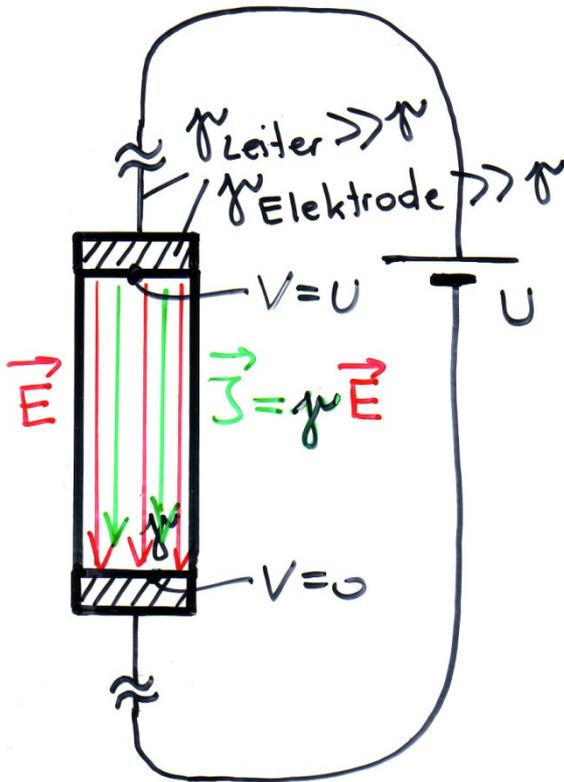
Im stationären Zustand gilt die Wirbelfreiheit der elektrischen Feldstärke auch in leitenden Medien:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{für eine beliebige geschlossene Kurve } C$$



Die Wirbelfreiheit gilt im Allgemeinen für die elektrische Stromdichte  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  nicht, da  $\gamma$  ortsabhängig sein kann

Beispiel: Drahtstück zwischen zwei Elektroden mit der Spannung  $U$



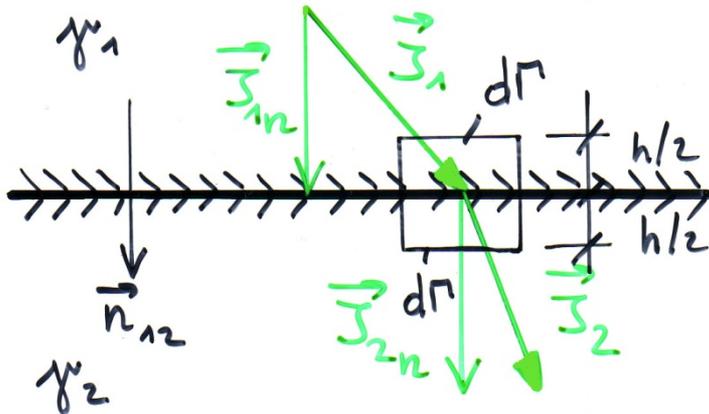
$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}; \quad I = \Gamma J = \Gamma \gamma E; \quad U = El$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{El}{\Gamma \gamma E} = \frac{l}{\gamma \Gamma}$$

Auch Messungen zeigen, dass der Widerstand proportional der Länge des Drahtes und umgekehrt proportional der Querschnittsfläche des Drahtes ist.

## 2.4 Grenzflächenbedingungen

Die Grenzflächenbedingungen sind analog zur Elektrostatik. Die Quellenfreiheit von  $\mathbf{J}$  und die Wirbelfreiheit von  $\mathbf{E}$  sind für die Bedingungen verantwortlich.



$$\frac{h}{2} \rightarrow 0$$

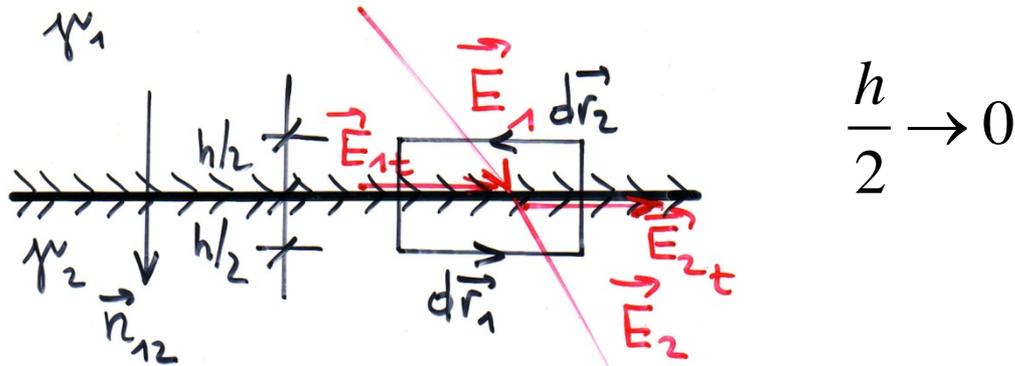
$$\Delta\Gamma \rightarrow d\Gamma$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\Gamma = 0 \Rightarrow J_{2n} - J_{1n} = 0$$

$$J_{2n} = J_{1n}$$

Mit  $J_{1n} = \gamma_1 E_{1n}$  und  $J_{2n} = \gamma_2 E_{2n}$  folgt:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$



$$\frac{h}{2} \rightarrow 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

$$\text{Mit } E_{1n} = \frac{J_{1n}}{\gamma_1} \text{ und } E_{2n} = \frac{J_{2n}}{\gamma_2} \text{ folgt: } \boxed{\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$$

Wegen  $E_{1t} = E_{2t}$  ist auch das Potential stetig.

## 2.5 Analogie zwischen dem stationären Strömungsfeld und dem elektrostatischen Feld

Die Gesetzmäßigkeiten des stationären Strömungsfeldes und des elektrostatischen Feldes sind analog:

Die elektrische Feldstärke ist in beiden Fällen  
Wirbelfrei:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{für eine beliebige geschlossene Kurve } C$$

Quellen der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$  sind Null:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad \text{für eine beliebige geschlossene Fläche } \Gamma$$

Quellen der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$  sind die Ladungen:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = Q_{\Omega} \quad \text{für eine beliebige geschlossene Fläche } \Gamma$$

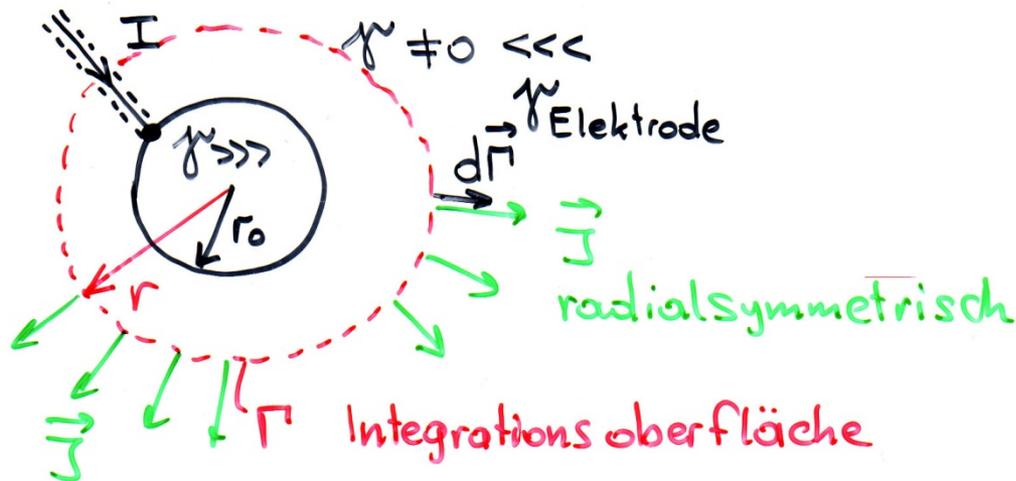
Analoge Größen:

$$\mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{E} \quad \mathbf{J} \Leftrightarrow \mathbf{D} \quad \gamma \Leftrightarrow \varepsilon$$

$$U \Leftrightarrow U \quad I \Leftrightarrow Q$$

$$\frac{1}{R} = G = \frac{I}{U} = \frac{\int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{\int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}{\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}$$

## Beispiel: Unendlich tief eingegrabener Kugelerder



Die Zuleitung ist isoliert und aus dem Feldgebiet ausgeklammert angenommen.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Obwohl das stationäre Strömungsfeld keine Quellen hat, tritt wegen Ausklammerung der Zuleitung  $I$  als Quelle auf!

$$\int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = I = J 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \text{ bzw. } \mathbf{E} = \frac{I}{4\pi \gamma r^2} \mathbf{e}_r$$

Wie die elektrische Feldstärke einer Punktladung!

Potential des Kugelerders gegen die unendlich entfernte Bezugselektrode:

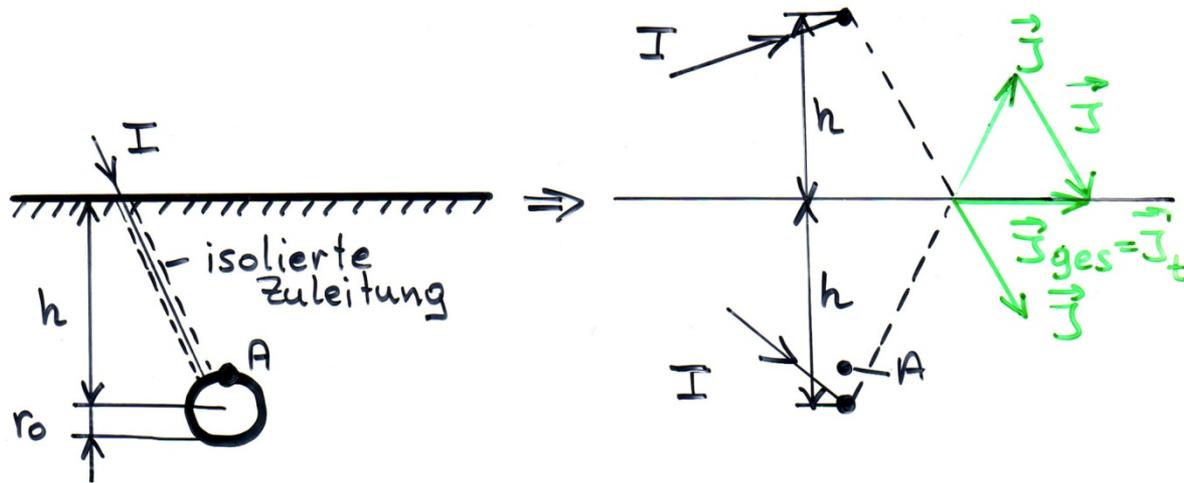
$$V = -\int_{\infty}^{r_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{4\pi\gamma} \int_{\infty}^{r_0} \frac{(-dr)}{r^2} = \frac{I}{4\pi\gamma r_0} = U \quad (\text{wie das Potential einer Punktladung!})$$

Erdausbreitungswiderstand  $R_E$  gegen die unendlich weit entfernte Elektrode:

$$R_E = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma r_0}$$

Wegen der Analogie zwischen stationärem Strömungsfeld und elektrostatischem Feld kann ein Verfahren analog zur Methode der fiktiven Ladungen (auch Spiegelungsprinzip) verwendet werden: *fiktive Stromquellen*.

## Beispiel: Endlich tief eingegrabener Kugelerder



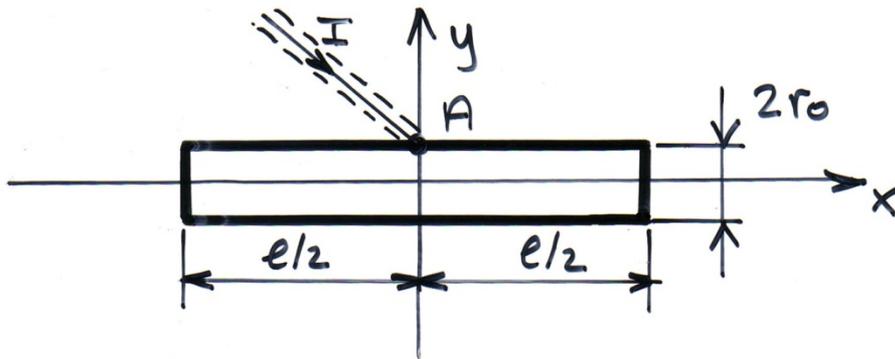
An der Erdoberfläche muss die Normalkomponente von  $\mathbf{J}$  Null sein. Im Ersatzmodell wird das durch eine Spiegelquelle mit gleichem Vorzeichen realisiert.

Die Äquipotentialflächen der beiden Punktquellen  $I$  sind keine Kugelflächen. Näherung für  $h \gg r_0$ .

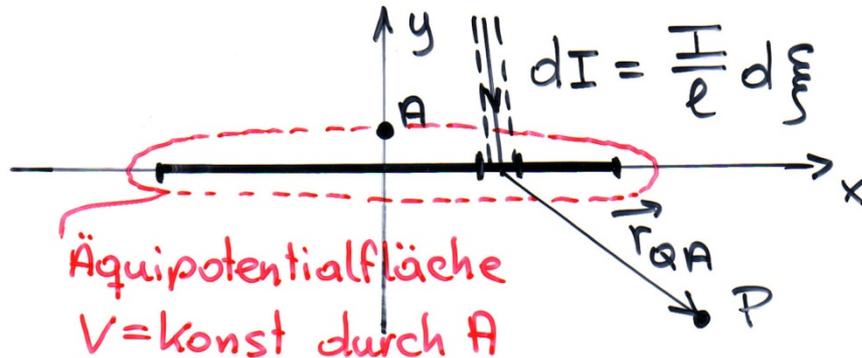
Die Gegenelektrode mit Nullpotential befindet sich im Unendlichen:  $U = V_{Kugel}$

$$V_{Kugel} = U \approx \frac{I}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right) \Rightarrow R_E \approx \frac{2h + r_0}{8\pi\gamma r_0 h}$$

*Beispiel: Unendlich tief eingegrabener Staberder mit endlicher Länge*



Die Ersatzquelle ist eine Linienquelle der Länge  $l$  mit konstanter Quellstärke.



Der zylindrische Staberder wird durch eine Rotationellipsoide, welche durch den Punkt A verläuft, angenähert, da die Äquipotentialflächen einer Linienquelle Rotationsellipsoide sind.

$$r_{QA} = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} \quad dV = \frac{I d\xi}{4\pi\gamma r_{QA} l}$$

$$V = \frac{I}{4\pi\gamma l} \int_{\xi = -\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}} = \frac{I}{4\pi\gamma l} \ln \frac{x + \frac{l}{2} + \sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + y^2}}{x - \frac{l}{2} + \sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + y^2}} \quad 139$$

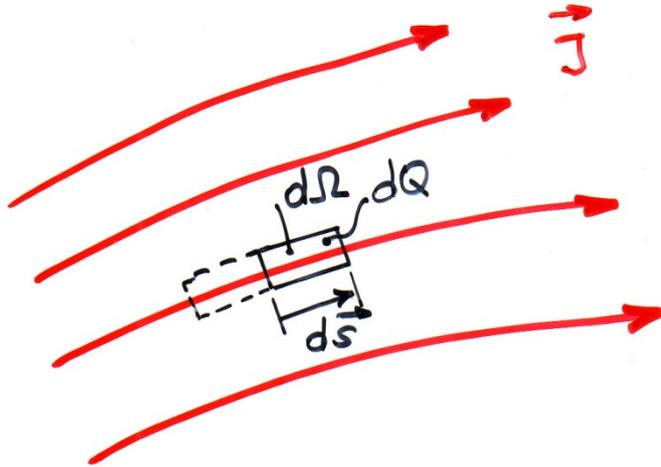
Das Potential im Punkt A ( $x = 0, y = r_0$ ) ist die angelegte Spannung  $U$ :

$$V_A = U = \frac{I}{4\pi\gamma l} \ln \frac{\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + r_0^2}}{-\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + r_0^2}} \approx \frac{I}{4\pi\gamma l} \ln \frac{l}{-\frac{l}{2} + \frac{l}{2} \sqrt{1 + \frac{4r_0^2}{l^2}}} \approx$$

$$\approx \frac{I}{4\pi\gamma l} \ln \frac{2}{-1 + (1 + \frac{2r_0^2}{l^2})} \quad U \approx \frac{I}{4\pi\gamma l} \ln \frac{l}{r_0}$$

$$R_E \approx \frac{\ln \frac{l}{r_0}}{2\pi\gamma l}$$

## 2.6 Die Leistung im elektrischen Strömungsfeld



In der Zeit  $dt$  wird die Ladung  $dQ = \rho d\Omega$  um das Wegelement  $ds = \mathbf{v} dt$  verschoben

Die an  $dQ$  geleistete Arbeit ist:  $dW = dQ \mathbf{E} \cdot ds = \rho d\Omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$

Wegen  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{v}$  und  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  gilt:  $dW = EJ d\Omega dt$

Leistung je Volumen ist Leistungsdichte:  $p = EJ = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma}$

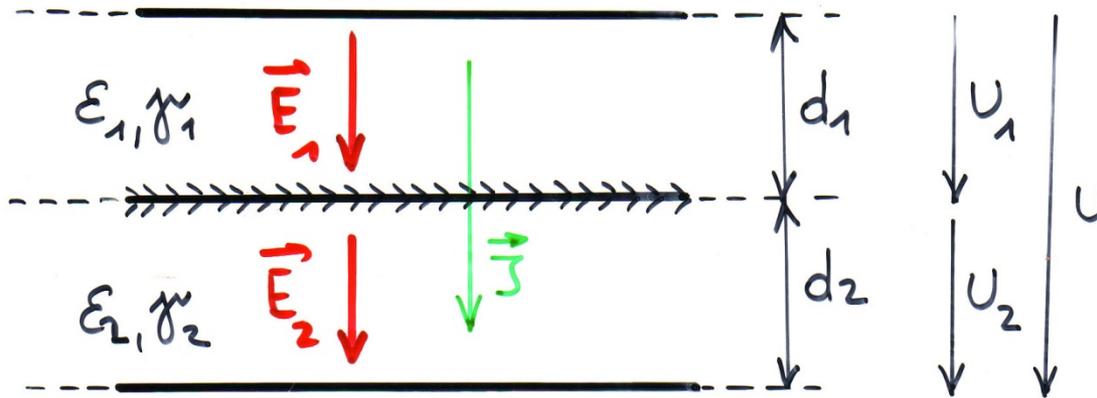
Joule'sches Gesetz: 
$$P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma} d\Omega$$

## **2.7 Medien mit Permittivität und Leitfähigkeit**

Reale Isolatoren haben auch eine endliche spezifische Leitfähigkeit, d.h. es ist immer ein elektrisches Strömungsfeld vorhanden. In der Elektrostatik (Gleichspannungen!) stellt sich daher die Potentialverteilung nach genügend langer Zeit immer nach dem Strömungsfeld ein.

Das zeitlich konstante elektrische Feld in Materie ist immer ein Strömungsfeld! Ein elektrostatisches Gleichfeld kann nur im Vakuum (idealer Isolator) entstehen.

*Beispiel: Parallelplattenkondensator mit geschichtetem Medium*



Nach genügend langer Zeit stellt sich ein stationäres Strömungsfeld ein:  $J_{n1} = J_1 = J_{n2} = J_2 = J$

Für die elektrische Feldstärke folgt aus dem Verhältnis der Leitfähigkeiten:  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$

Mit  $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2$  wird im allgemeinen  $D_{n1} \neq D_{n2}$

D.h. es sammelt sich an der Grenzfläche eine freie Flächenladung  $\sigma$  an:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{n2} - D_{n1} = D_2 - D_1 = \sigma$$

$$\sigma = D_2 - D_1 = \frac{\varepsilon_2 J}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1 J}{\gamma_1} = J \left( \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \right)$$

Mit der Spannung:  $U = U_1 + U_2 = \frac{J}{\gamma_1} d_1 + \frac{J}{\gamma_2} d_2 = J \left( \frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2} \right)$

$$\sigma = \frac{U}{\frac{d_1}{\gamma_1} + \frac{d_2}{\gamma_2}} \left( \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \right)$$

Wenn  $\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$  wird  $\sigma$  Null!

Ist die Leitfähigkeit ortsabhängig, entsteht auch eine Raumladung aus freien Ladungen.

# 3. Das stationäre Magnetfeld

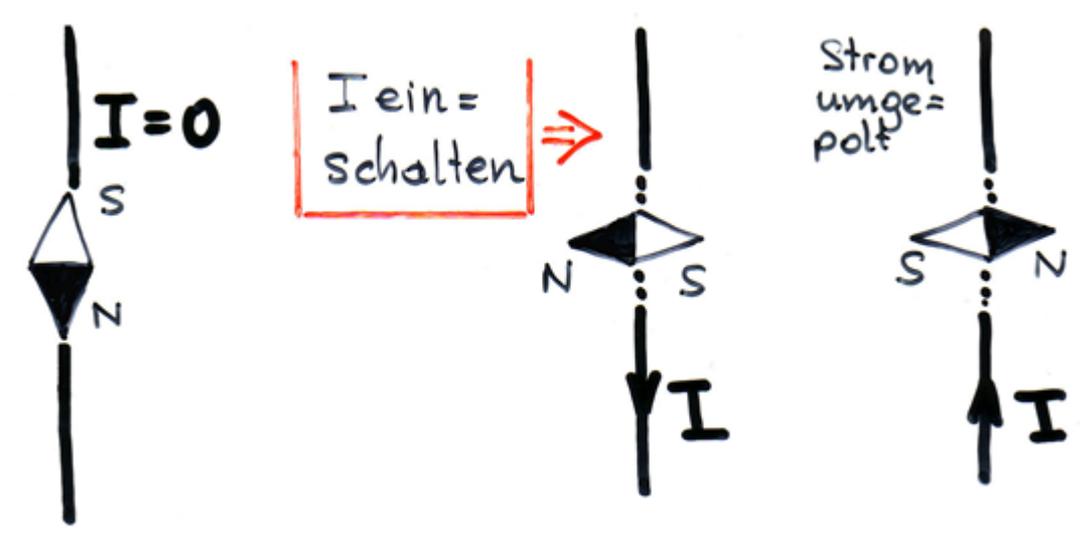
## 3.1 Magnetische Kräfte

- Magnetnadel verdreht sich in der Nähe zum stromdurchflossenen Draht
- Experimente durch *Hans Christian Oersted* (1820)



Oersteds fehlgeschlagenes Experiment. Die Magnetnadel war von vornherein normal zum Draht angeordnet. Deswegen hat sich kein Ausschlag beim Einschalten des Stromes ergeben.

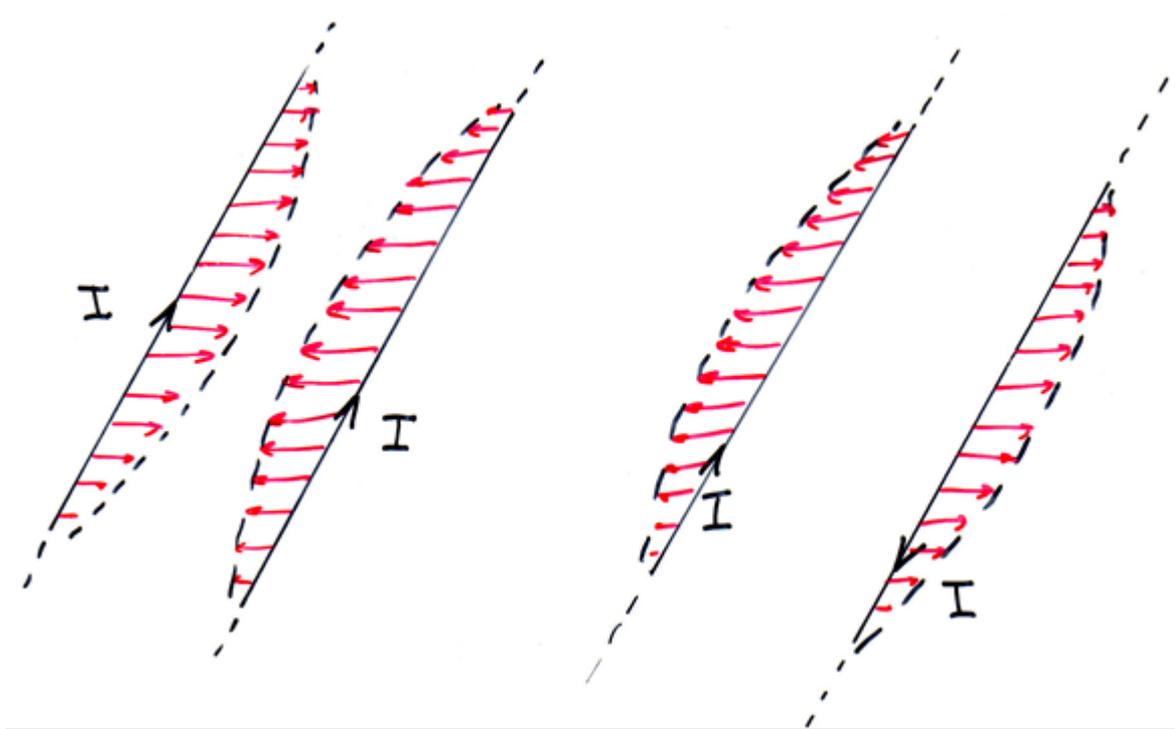
Oersted's neues Experiment auf Vorschlag eines Zuhörers, die Magnetnadel vor Einschalten des Stromes parallel zum Draht anzuordnen.



Im stromlosen Zustand ist die Magnetnadel parallel zum Draht (im Bild liegt die Nadel über dem Draht) angeordnet. Nach dem Einschalten des Stromes verdreht sich die Nadel.

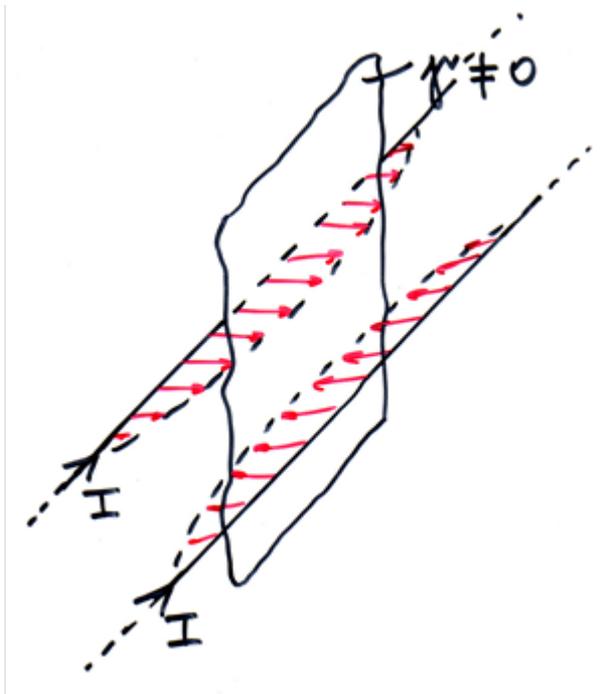
Noch im gleichen Jahr 1820 wurde durch *Jean Baptiste Biot* und seinem Assistenten *Felix Savart* durch exakte Messungen das Gesetz ermittelt, das die Auswirkung des Stromes in einem Draht im Aufpunkt angibt (Biot-Savart'sches Gesetz). Auch *Ampere* und *Faraday* haben zur gleichen Zeit grundlegende Arbeiten auf diesem Gebiet geleistet, so dass nach kurzer Zeit eine im Wesentlichen vollständige und exakte Theorie der magnetischen Wirkungen von elektrischen Strömen zur Verfügung stand.

Gleichsinnig stromdurchflossene Leiter ziehen sich an,  
gegensinnig durchflossene stoßen sich ab



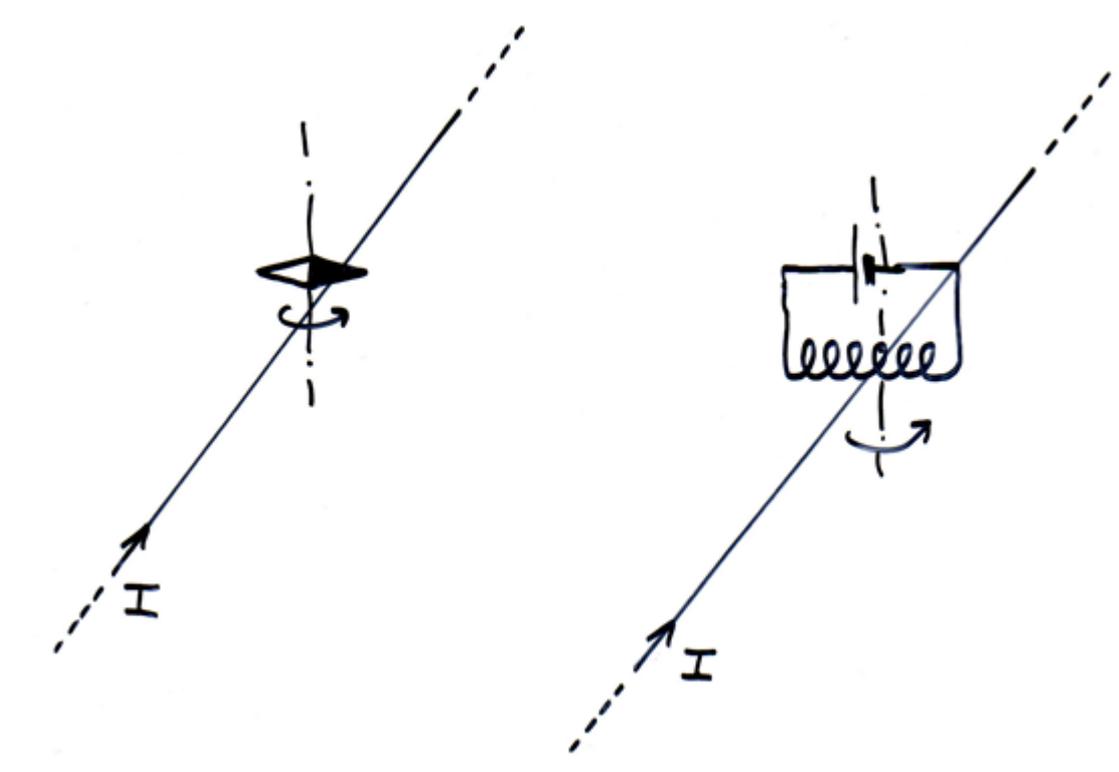
Die Kraft ist direkt proportional dem Produkt beider Ströme  
und umgekehrt proportional zum Abstand.

Die Wirkung zwischen den beiden Leitern hat nichts mit eventuell auf den Drähten sich befindenden Ladungen zu tun: diese Kräfte hängen nur von der Ladungsbewegung (in dem Fall von den Strömen) ab.

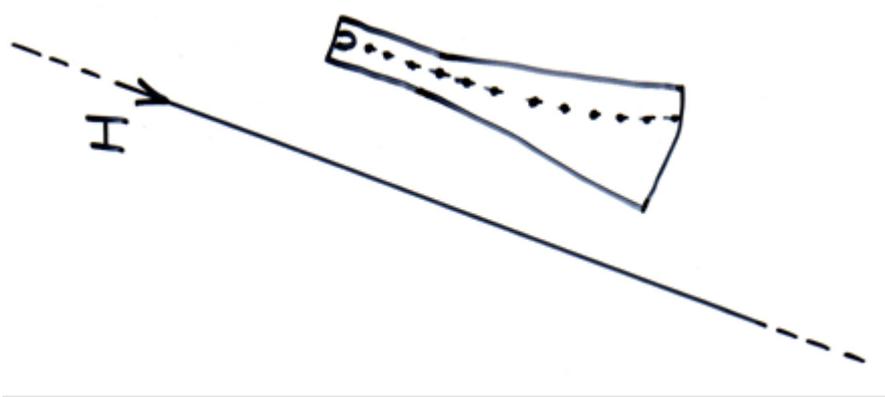


Eine zwischen den Leitern angebrachte nicht ferromagnetische Metallplatte beeinflusst die Kräfte nicht

Die Kompassnadel Oersteds hat wenig Ähnlichkeit mit einem Gleichstromkreis. Jedoch hat Ampere als erster vermutet, dass magnetisiertes Eisen von in Bewegung befindlichen Ladungen erfüllt ist, die kleinen (atomaren) Kreisströmen entsprechen. Eine dünne stromdurchflossene Drahtspule verhält sich unter dem Einfluss eines Stromes wie eine Magnetnadel:

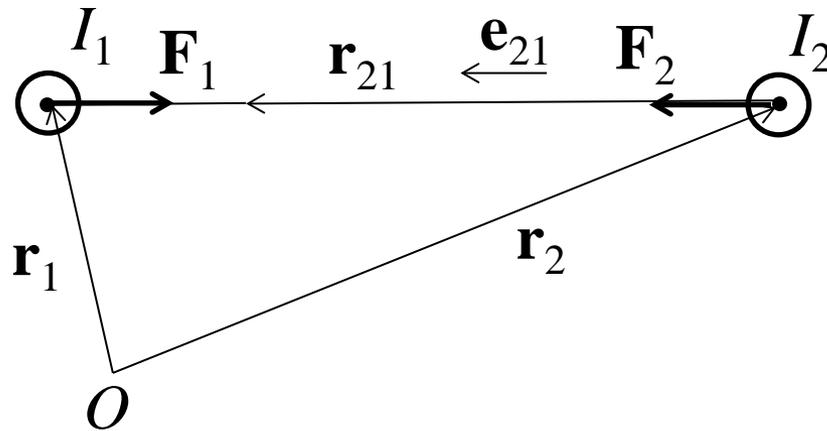


Auch frei bewegte Ladungen werden in der Nähe eines stromführenden Leiters abgelenkt:



### 3.2 Kraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern (unendlich lange Stromfäden)

*Medium: Vakuum*



$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{e}_{21} = \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}$$

$$r_{21} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

Kraft je Länge (Kraftbelag):

$$\mathbf{F}'_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{|\mathbf{r}_{21}|} \mathbf{e}_{21}$$

und

$$\mathbf{F}'_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{|\mathbf{r}_{12}|} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}'_2$$

Kraft auf Länge  $l$ :

$$\mathbf{F}_1 = l\mathbf{F}'_1 ; \mathbf{F}_2 = l\mathbf{F}'_2$$

Die Konstante  $\frac{\mu_0}{2\pi}$  gilt im Einheitssystem SI:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{VAs}{mA^2} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$$

*Permeabilität* des leeren Raumes (Vakuum)

Beispiel:  $I_1 = I_2 = 1A$ ;  $|\mathbf{r}_{21}| = 1m$ :

$$|\mathbf{F}'| = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$$

Definition der  
Einheit Ampere

### 3.3 Die magnetische Feldstärke, Flussdichte

Es lässt sich die Wechselwirkung von Strömen mit anderen bewegten Ladungen (d.h. allgemein die Wechselwirkung zwischen bewegten Ladungen!) durch Einführung eines *Magnetfeldes* beschreiben, genauso wie früher die Kraftwirkung auf Ladungen (Coulomb'sches Gesetz) durch Einführung des elektrischen Feldes erklärt wurde.

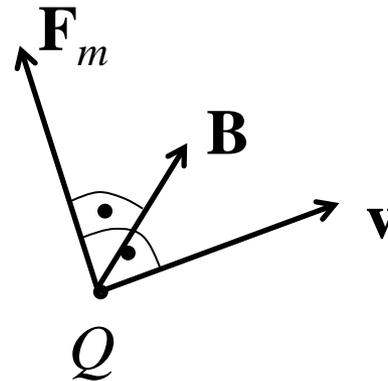
Ein elektrischer Strom (allgemeiner: bewegte elektrische Ladungen) ruft ein Magnetfeld im umgebenden Raum hervor. Andere Ströme bzw. bewegte Ladungen erfahren in diesem Magnetfeld eine Kraft, die proportional zur Stärke des Magnetfeldes,  $\mathbf{B}$ , und zur Geschwindigkeit,  $\mathbf{v}$ , ist.

Diese Kraft ist auch stets *senkrecht* zu  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$  gerichtet:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

elektrische  
Kraft  $\mathbf{F}_e$

magnetische  
Kraft  $\mathbf{F}_m$



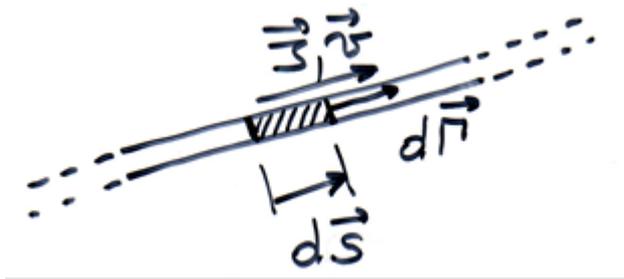
$\mathbf{B}$  ist die magnetische Feldstärke, wird aber gewöhnlich *magnetische Flussdichte* (manchmal magnetische Induktion) genannt.

Einheit der magnetischen Flussdichte:

$$[\mathbf{B}] = 1 \frac{Ns}{Cm} = 1 \frac{VAs}{m} \frac{1}{As} \frac{s}{m} = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1T \text{ (Tesla)}$$

## Kraft auf einen Stromleiter im Magnetfeld

Annahme: der Leiterquerschnitt ist sehr klein.



$$d\mathbf{F} = dQ(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ mit } dQ = \rho d\Omega$$

$$d\Gamma \parallel d\mathbf{s} \parallel \mathbf{J} \parallel \mathbf{v}$$

$$d\Omega = d\Gamma \cdot d\mathbf{s}$$

Mit  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$  kann man schreiben:

$$d\mathbf{F} = \rho(d\Gamma \cdot d\mathbf{s})(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (d\Gamma \cdot d\mathbf{s})(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\Omega.$$

Kraft auf einen Leiter im Volumen  $\Omega$ :

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\Omega$$

Kraftdichte:  $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ .

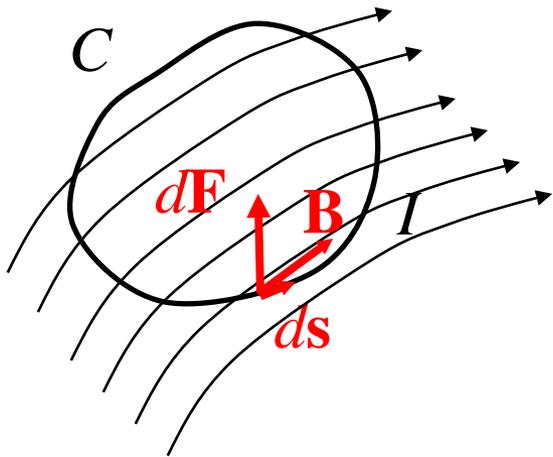
Für einen fadenförmigen Leiter gilt:

$$d\mathbf{F} = \underbrace{(\mathbf{J} \cdot d\Gamma)}_I (d\mathbf{s} \times \mathbf{B})$$

Stromelement:  $I ds$

Kraft auf Stromelement:

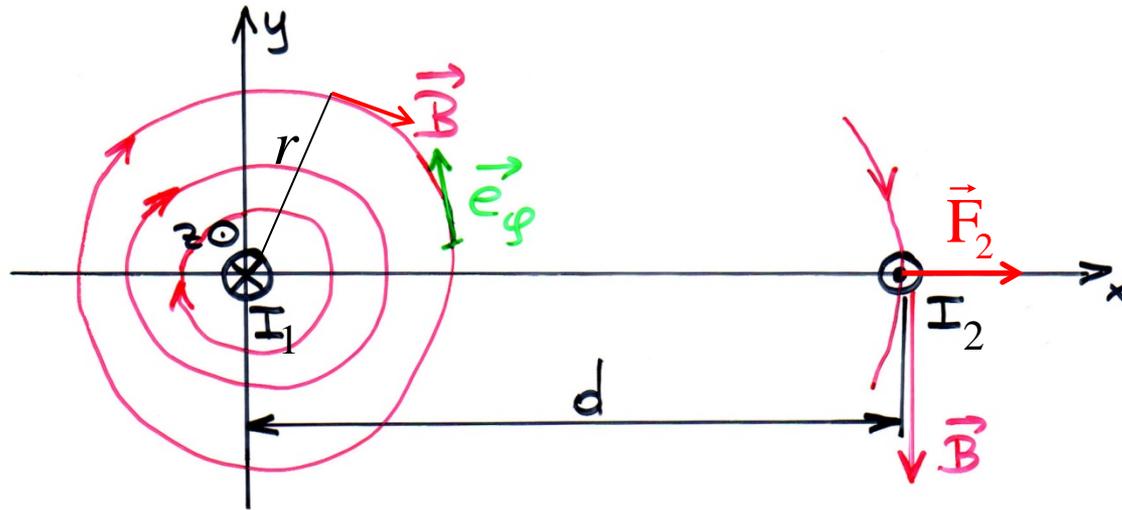
$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$



Kraft auf fadenförmige  
Stromschleife mit Strom  $I$ :

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$

### 3.3.1 Flussdichte eines unendlich langen geraden Stromfadens



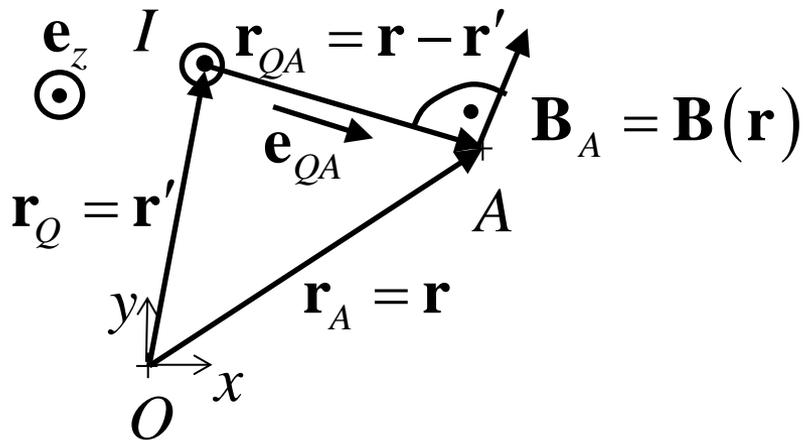
Kraft auf ein Stück der Länge  $l$  des Stromfadens  $I_2$ :  $\mathbf{F}_2 = l \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \mathbf{e}_x$

Mit der Flussdichte:  $\mathbf{F}_2 = I_2 \int_z^{z+l} dz \mathbf{e}_z \times \mathbf{B} = l I_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}$

Vergleich  $[\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \times (-\mathbf{e}_y)]$ :  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} (-\mathbf{e}_y)$

Im Abstand  $r$  vom Stromfaden  $I_1$ :  $\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} (-\mathbf{e}_\varphi)$

Flussdichte eines unendlich langen geraden Stromfadens  $I$   
 (Quellpunkt  $\mathbf{r}'$ , Aufpunkt  $\mathbf{r}$ ):



$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

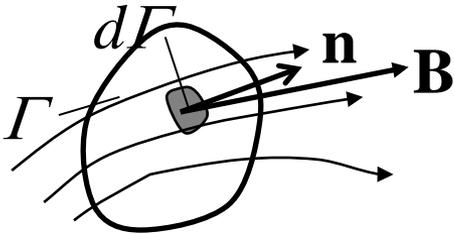
$$\mathbf{e}_{QA} = \frac{\mathbf{r}_{QA}}{|\mathbf{r}_{QA}|} = \frac{\mathbf{r}_{QA}}{r_{QA}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r_{QA}} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_{QA}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left( \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

### 3.3.2 *Der magnetische Fluss, die Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte*

Der magnetische Fluss einer Oberfläche  $\Gamma$  ist das Integral der magnetischen Flussdichte über  $\Gamma$ :

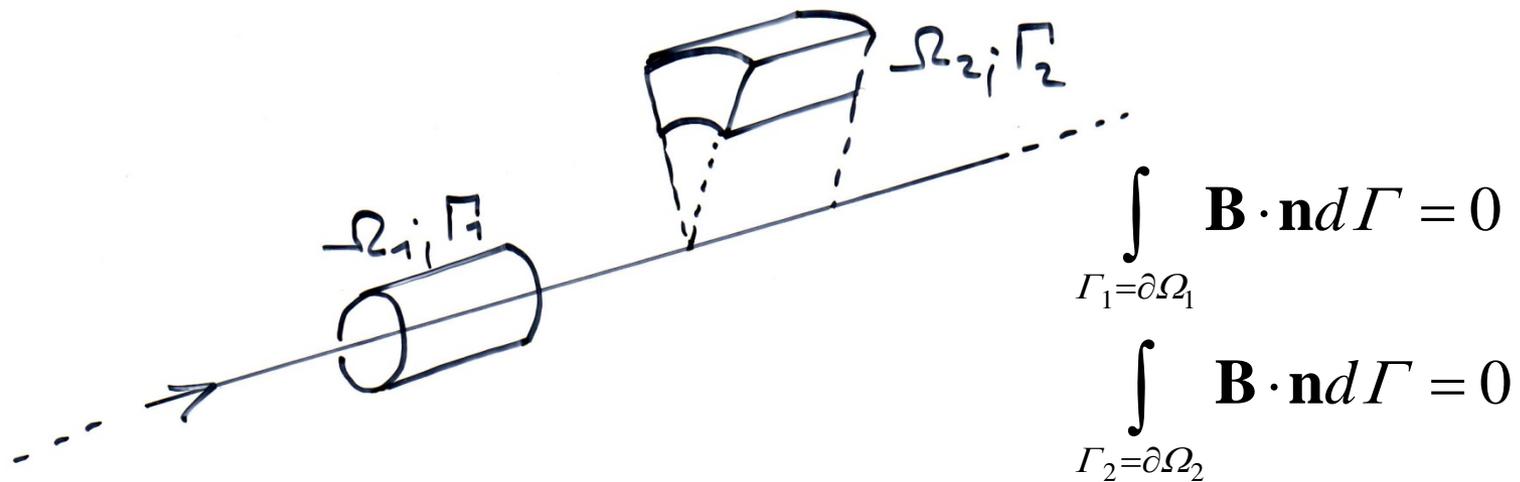
$$\Phi_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$



Analogie mit elektrischem Strom:

$$I = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Die Quellen der magnetischen Flussdichte werden durch den magnetischen Fluss von geschlossenen Oberflächen beschrieben:



Die Quellen sind Null: egal wie man das Volumen legt, es lässt sich keine Anordnung finden, die einen Nettofluss ungleich Null aufweist.

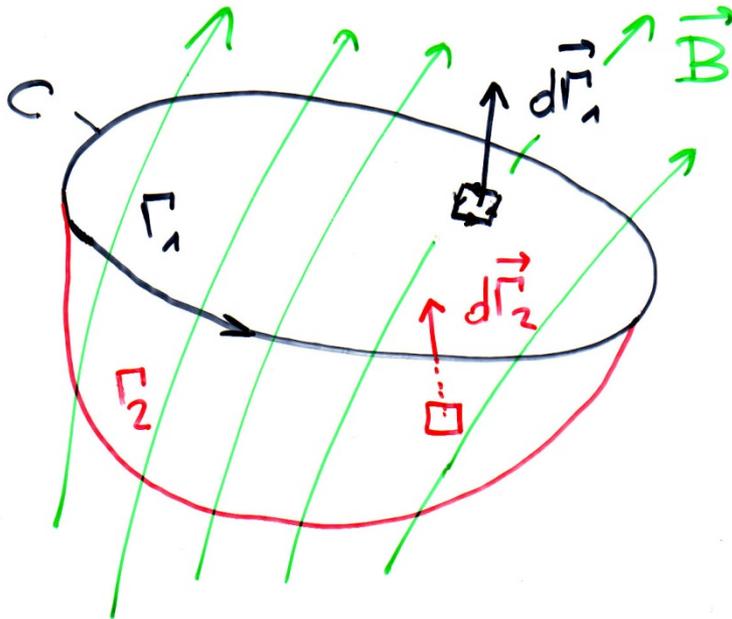
Man kann wieder auf mehrere gerade Stromfäden verallgemeinern, dann den Übergang auf gekrümmte Stromfäden und schließlich auf ein beliebiges Strömungsfeld  $\mathbf{J}$  durchführen:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\Gamma = 0 \quad \text{für eine beliebige geschlossene Fläche } \Gamma$$

Die magnetische Flussdichte ist Quellenfrei!

Analogie mit elektrischem Fluss: das magnetische Feld hat keine Ladungen (magnetische Monopole). Das ist bis jetzt noch nicht experimentell widerlegt worden, obwohl intensiv nach magnetischen Monopole gesucht wird.

Betrachten wir eine Fläche  $\Gamma_1$  mit dem Rand  $C$ , und dann „drücken“ wir die Fläche nach unten und erzeugen dadurch die Fläche  $\Gamma_2$ .



Die Flüsse der beiden Flächen sind:

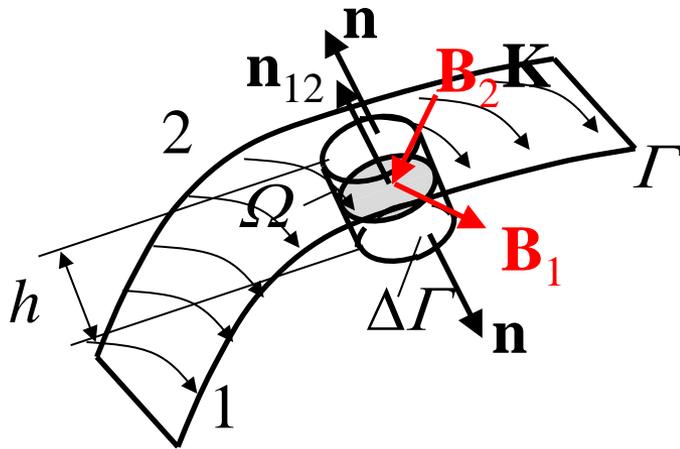
$$\Phi_1 = \int_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma} \quad \text{und} \quad \Phi_2 = \int_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma}.$$

Die Flächen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  bilden die Hüllfläche  $\Gamma$  eines Volumens. Es gilt daher:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma}_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot (-d\mathbf{\Gamma}_2) = 0, \text{ daher:}$$

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma}_1 = \int_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma}_2, \text{ bzw. } \boxed{\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi}$$

# Verhalten der magnetischen Flussdichte auf einer Fläche mit einer Flächenstromdichte



$\Omega$ : Zylinder mit Randfläche  $\partial\Omega$  bestehend aus den Stirnflächen  $\Delta\Gamma$  und der Mantelfläche der Höhe  $h$

Die Flussdichte ist quellenfrei:

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$$

Grenzübergänge:  $h \rightarrow 0$ ,  $\Delta\Gamma \rightarrow d\Gamma \Rightarrow \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} \Delta\Gamma - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} \Delta\Gamma = 0$

$$\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} = 0$$

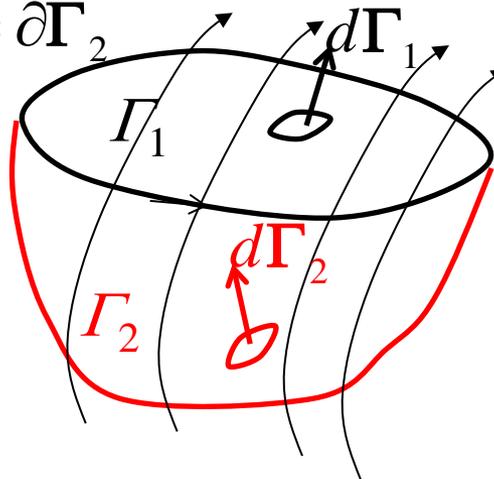
Die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte ist stetig!

### 3.4 Die magnetische Erregung

Die magnetische Erregung  $\mathbf{H}$  ist eine Feldgröße, welche in unmittelbarem Zusammenhang mit den Strömen steht: der Wirbel von  $\mathbf{H}$  entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich der (stationäre) Strom durch eine beliebige Fläche, deren Rand die Kurve ist.

Wegen der Quellenfreiheit der stationären Stromdichte ist der Strom durch alle Flächen mit der gleichen Randkurve gleich (Analogie mit Flussdichte und Fluss):

$$C = \partial\Gamma_1 = \partial\Gamma_2 \quad \mathbf{J} \quad I_1 = \int_{\Gamma_1} \mathbf{J} \cdot d\Gamma = I_2 = \int_{\Gamma_2} \mathbf{J} \cdot d\Gamma$$



Die Richtung der Kurve und der Fläche sind durch die Rechtshandregel verknüpft!

### 3.4.1 Der Ampere'sche Durchflutungssatz

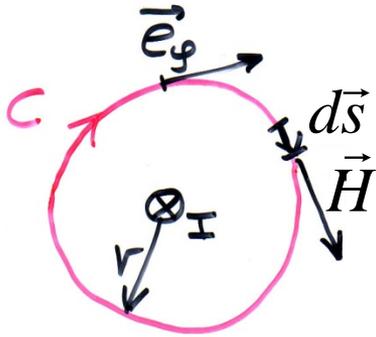
Die magnetische Erregung wird als die Vektorfunktion  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  definiert, welche für eine beliebige Fläche  $\Gamma$  (Randkurve  $\partial\Gamma$ ) den folgenden Ampere'schen Durchflutungssatz erfüllt:

$$\oint_{\partial\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\Gamma = I_{\Gamma}$$

Einheit von  $\mathbf{H}$ :  $[\mathbf{H}] = \frac{[I]}{[L\ddot{a}nge]} = 1 \frac{A}{m}$

Aus dem Durchflutungssatz folgt die Quellenfreiheit der elektrischen Stromdichte: er ist daher nur für stationäre Ströme gültig!

### 3.4.2 Magnetische Erregung eines unendlich langen geraden Stromfadens



Wegen der Symmetrie muss gelten:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H(r)\mathbf{e}_\phi$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C H ds = H(r) \oint_C ds = 2\pi r H(r)$$

Ampere'scher Durchflutungssatz:

$$2\pi r H(r) = I$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

$C$ : Kreis,  $I$  durch Mittelpunkt, Radius  $r$

Im Vakuum gilt für die magnetische Flussdichte eines unendlichen langen Stromfadens:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\mathbf{e}_\phi$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Beziehung zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  eines unendlich langen Stromfadens:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

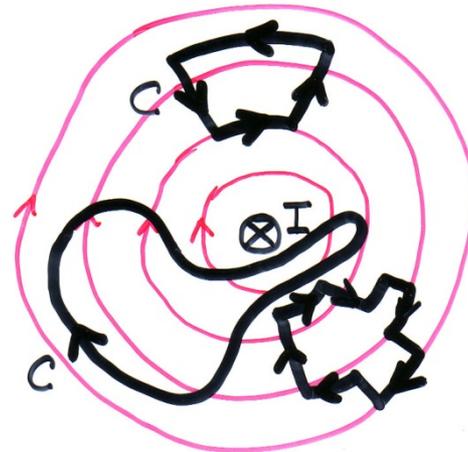
### 3.4.3 Zusammenhang zwischen der Flussdichte und Erregung im Vakuum

Die magnetische Erregung  $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu_0$  eines unendlich langen geraden Stromfadens erfüllt im Vakuum den Ampere'schen Durchflutungssatz auch für eine beliebige Kurve:

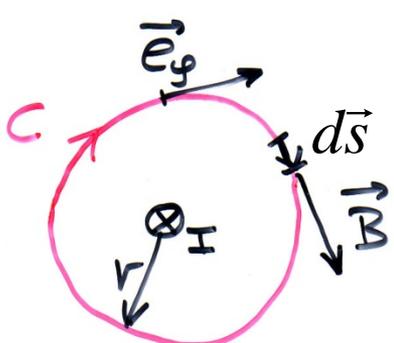
Verschiedene geschlossene Wege, die den Leiter nicht umschließen:

Weg in radiale Stücke und Bogenstücke zerlegt. Das Integral entlang der radialen Stücke ist Null, da  $\mathbf{B}$  normal auf  $d\mathbf{s}$  steht. Entlang der Bogenstücke heben sich die Beiträge zum Wegintegral auf, da die Länge der Bogenstücke mit dem Radius zunimmt und gleichzeitig aber  $\mathbf{B}$  mit  $1/r$  abnimmt. Ein beliebiger Weg ist in radiale und azimutale Stücke zerlegbar. Alle Wege, die den Leiter nicht umschließen, liefern daher:

$$\oint_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$



Für einen einfachen kreisförmigen Weg  $C$ , welcher den Leiter umschließt haben wir

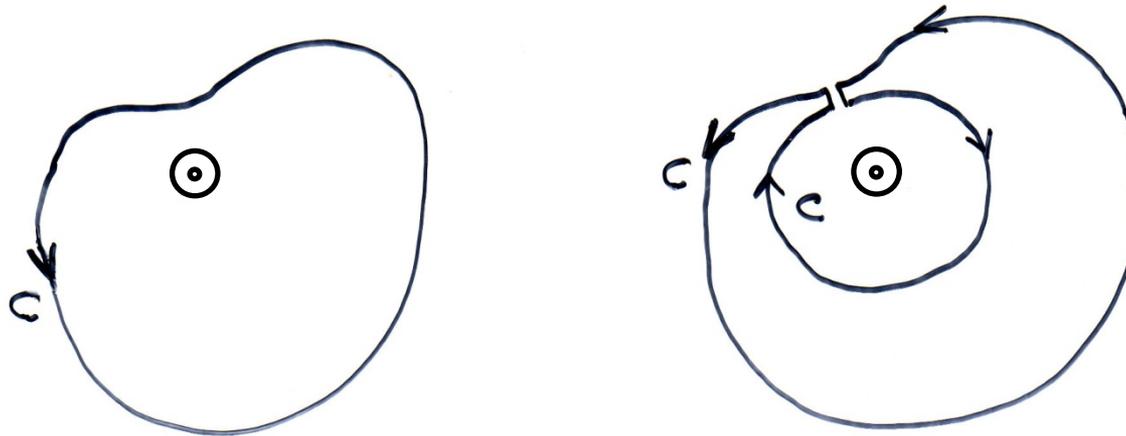


$$\oint_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \frac{1}{\mu_0} B ds = \frac{1}{\mu_0} B \oint_C ds = 2\pi r \frac{1}{\mu_0} B$$

Mit  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  folgt:  $\oint_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = I.$

Wichtig für diese Überlegungen ist, dass das Feld des Stromfadens exakt mit  $1/r$  abnimmt, ähnlich wie das Feld einer Punktladung exakt mit  $1/r^2$  abnehmen muss.

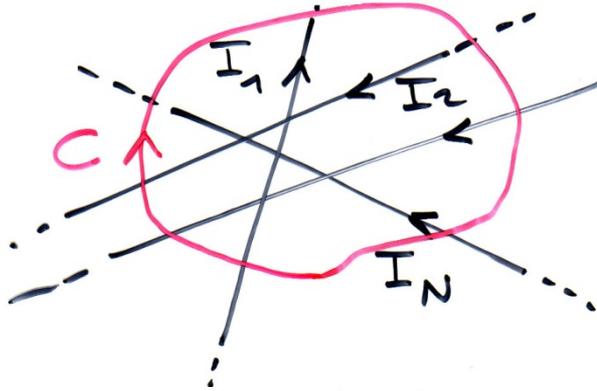
Das Wegintegral über jeden beliebigen den Leiter umschließenden Weg liefert das gleiche Ergebnis. Der Weg im rechten Bild umschließt den Leiter nicht, das Integral ergibt Null.



Daher muss das Wegintegral über den äußeren Weg (dieser ist identisch mit Weg auf der linken Seite) gleich groß mit negativem Vorzeichen sein, wie das Wegintegral über den inneren, kreisförmigen Weg. Dies ist aber  $-I$ , da der Umlaufsinn die Rechtshandregel nicht erfüllt. Daher gilt:

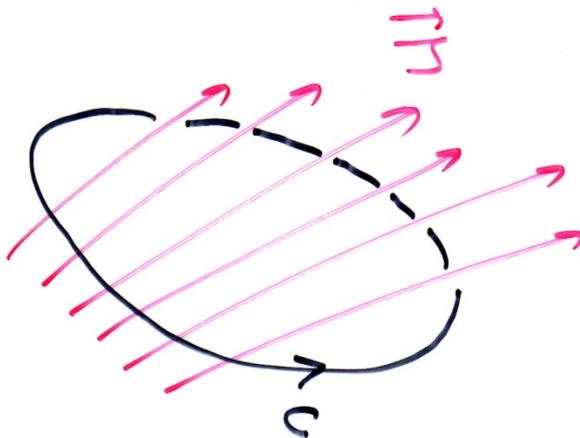
$$\oint_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = I$$

System von  $N$  unendlich langen geraden Stromfäden  
(Superpositionsprinzip):



$$\oint_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{j=1}^N I_j$$

Dies gilt auch für gekrümmte Stromfäden (Postulat der Theorie, das jedoch experimentell noch nicht widerlegt worden ist). Nun kann die Verallgemeinerung auf ein beliebiges Strömungsfeld  $\mathbf{J}$  gemacht werden:



$$\oint_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

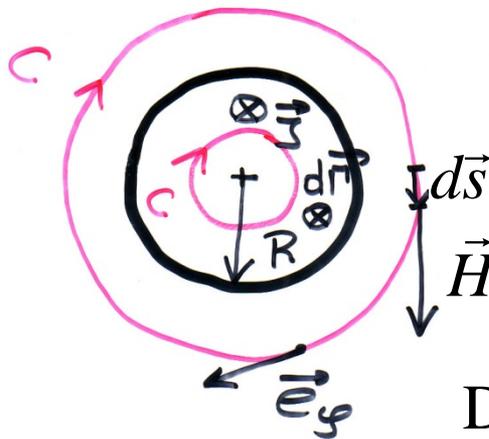
$\mathbf{B}/\mu_0$  erfüllt im Vakuum den Ampere'schen Durchflutungssatz!

Im Vakuum gilt allgemein:  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

### 3.4.4 Beispiele zum Durchflutungssatz

Der Ampere'sche Durchflutungssatz kann in einfachen Fällen (mit hoher Symmetrie) auch zur Bestimmung der magnetischen Erregung, bzw. der Flussdichte verwendet werden.

*Beispiel: Unendlich langer gerader Leiter mit kreisförmigem Querschnitt*



$$J = \frac{I}{R^2 \pi}$$

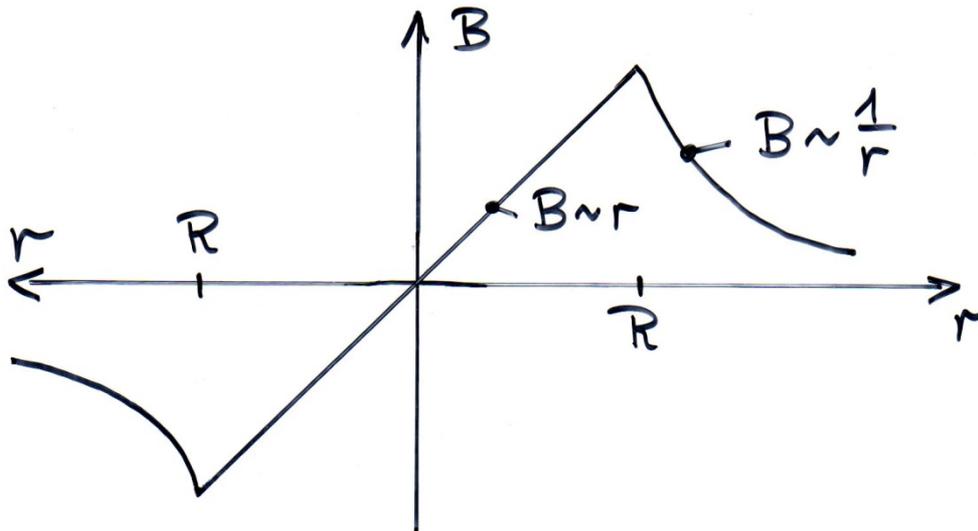
Für  $r \leq R$  gilt:  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H 2\pi r = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = Jr^2 \pi$

Daraus folgt:  $\mathbf{H} = \frac{Jr}{2} \mathbf{e}_{\varphi} = \frac{Ir}{2R^2 \pi} \mathbf{e}_{\varphi}$ ;  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2R^2 \pi} \mathbf{e}_{\varphi}$

Für  $r \geq R$  gilt:

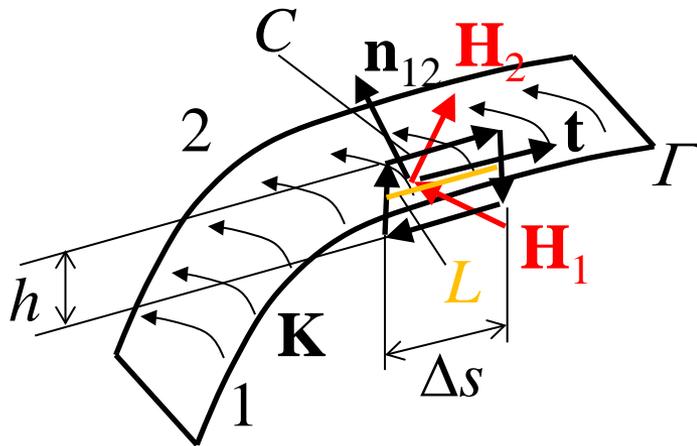
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H 2\pi r = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\Gamma = JR^2 \pi = I$$

$$\Rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_{\varphi}; \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_{\varphi}$$



Das Feld im Inneren des Leiters ändert sich linear mit  $r$ , während es außerhalb des Leiters mit  $1/r$  abnimmt. Außerhalb des Leiters ist das Feld nicht unterscheidbar vom Feld eines Fadenstromes in der Leiterachse.

## Verhalten der magnetischen Erregung auf einer Fläche mit einer Flächenstromdichte



$\mathbf{t}$ : Einheitsvektor in der Tangentialebene und in der Ebene von  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  ( $C$  ist ein Rechteck in der gleichen Ebene mit Seitenlängen  $h$  und  $\Delta s$ ).

Ampere'scher Durchflutungssatz:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I = \int_L \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{t}) ds$$

Grenzübergänge:  $h \rightarrow 0$ ,  $\Delta s \rightarrow ds$ ,  $d\mathbf{s} = \mathbf{t} ds \Rightarrow$

$$\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t} \Delta s - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} \Delta s = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{t}) \Delta s = (\mathbf{K} \times \mathbf{n}_{12}) \cdot \mathbf{t} \Delta s$$

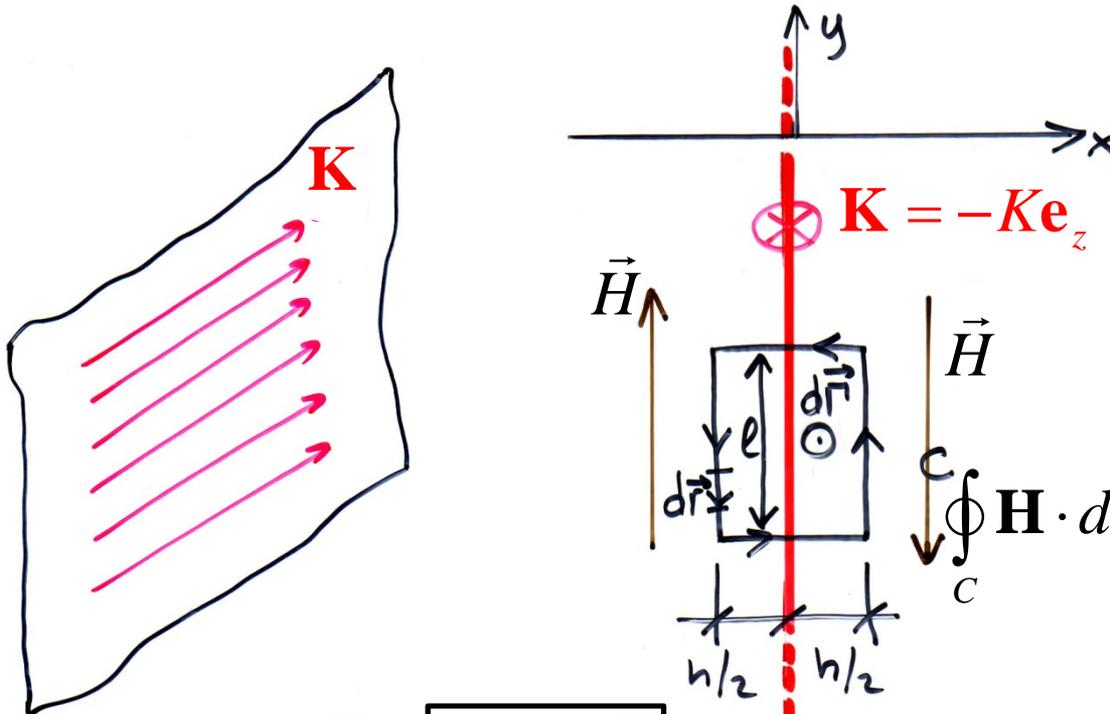
Da  $\mathbf{t}$  in der Ebene von  $\mathbf{H}_1$  und  $\mathbf{H}_2$  liegt:

$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{K} \times \mathbf{n}_{12} \Rightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{n}_{12})$$

$$\boxed{\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}}$$

## Beispiel: Unendlich ausgedehnter Flächenstrom

Eine unendliche ausgedehnte Flächenstromschicht erzeugt, ähnlich wie eine unendlich ausgedehnte Flächenladung ein homogenes Feld.

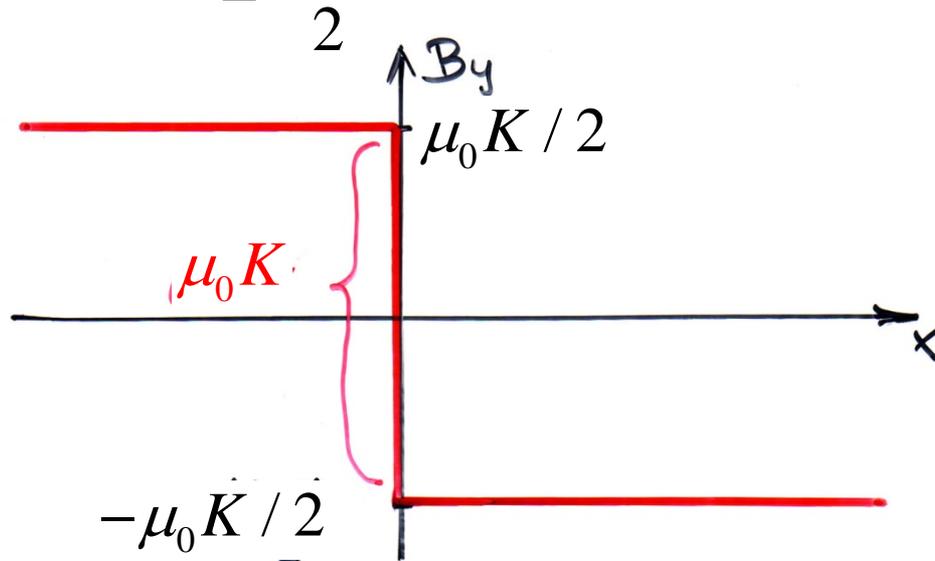


Der Durchflutungssatz entlang des Weges  $C$  ( $l$  und  $h$  können endlich sein!) angewendet, ergibt:

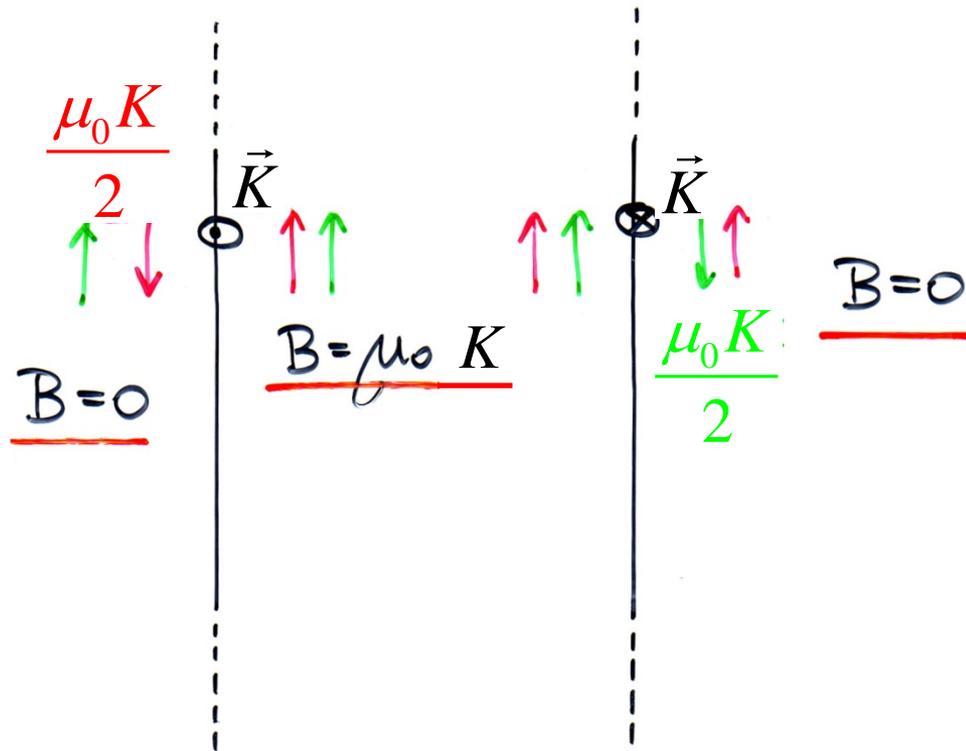
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = -2Hl = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = -Kl$$

$$H = \frac{K}{2}; \quad \boxed{B = \mu_0 \frac{K}{2}} \quad (\text{vergleiche: } D = \frac{\sigma}{2}; \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0})$$

Das Feld  $\mathbf{B}$  ist homogen und unendlich ausgedehnt und hat rechts vom Flächenstrom die negative und links die positive  $y$ -Richtung. Der Flächenstrom  $\mathbf{K}$  erzeugt einen Sprung in der Tangentialkomponente von  $\mathbf{B}$  mit der Größe  $\mu_0 K$ . Das gilt immer, auch wenn noch ein anderes Magnetfeld überlagert ist. Ist kein anderes Magnetfeld vorhanden, ist dieser Sprung symmetrisch  $\pm \frac{\mu_0 K}{2}$ .

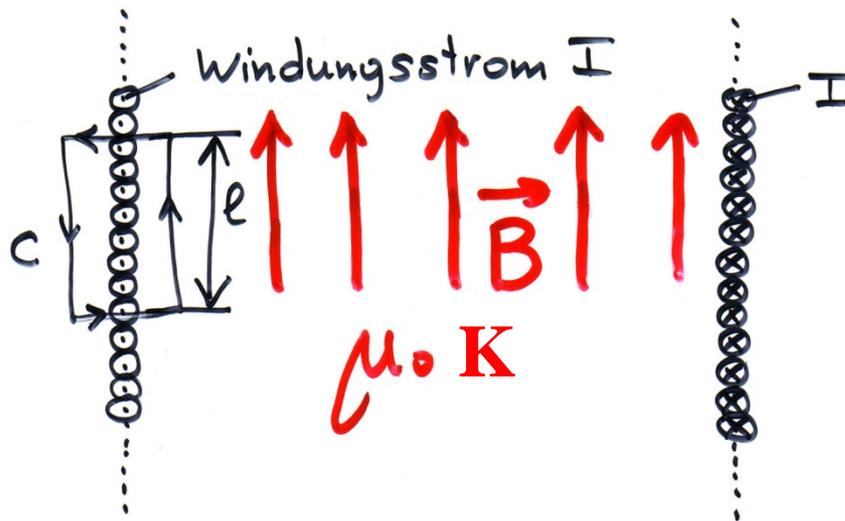


## Beispiel: Flächenstromdoppelschicht



Analogon zum  
Parallelplattenkondensator:  
Erzeugung eines  
homogenen Magnetfeldes  
zwischen einer  
Flächenstromdoppelschicht.

Die Flächenstromschicht ist eine Idealisierung einer dünnen, einlagigen Wicklung:



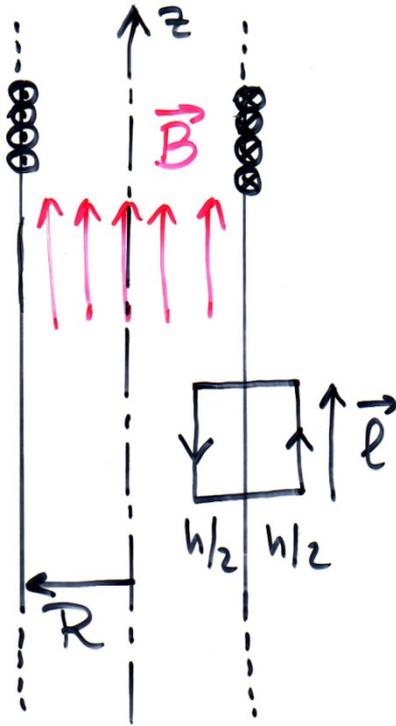
Strom  $I$ ,  $N'$  Leiter je Meter:

$$K = IN'$$

Durchflutungssatz:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = Hl = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = IN'l \Rightarrow B = \mu_0 IN'$$

## Beispiel: Unendlich ausgedehnte Zylinderspule



Unendlich lange Spule mit Radius  $R$ .  $\mathbf{B}$  ist außen Null.

$N'$  Windungen je Meter mit dem Strom  $I$  auf  $K=IN'$  verschmiert.

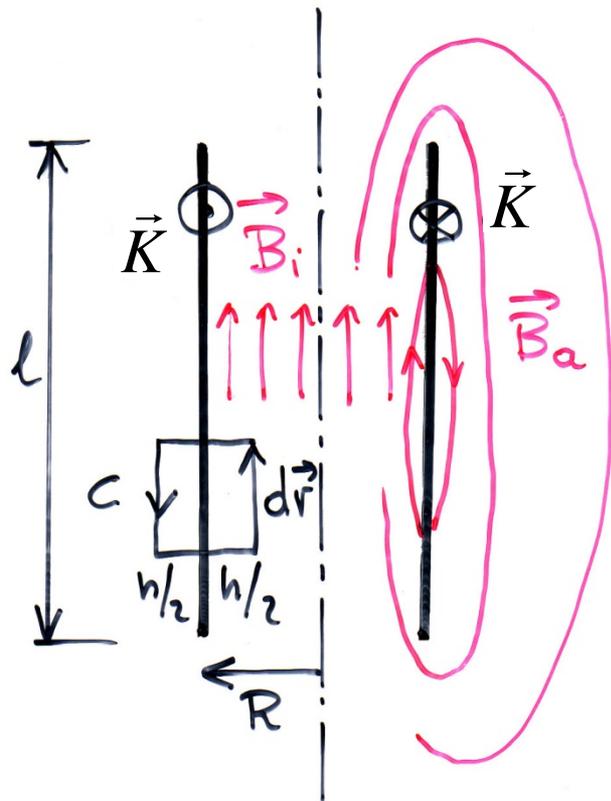
Durchflutungssatz:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = -Hl = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = -Kl$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{B} = \mu_0 K \mathbf{e}_z = \mu_0 IN' \mathbf{e}_z$$

## Beispiel: Endlich lange Zylinderspule



Länge  $l$ ,  $N$  Windungen, Windungsstrom  $I$ :

$$K = \frac{NI}{l}$$

Es sind Randeffekte vorhanden.

Außen ist das Feld  $\mathbf{B}_a$  nicht mehr

Null! Für  $l \gg R$  kann man die

Randeffekte vernachlässigen, d. h.

$B_a \approx 0$  annehmen:  $\Rightarrow \boxed{B_i \approx \mu_0 K}$

### 3.4.5 Das Biot-Savart'sche Gesetz

Ampere'sches Modell des Magnetismus: magnetische Effekte werden durch Ströme verursacht, die Kräfte werden durch die Wirkung der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  auf Ströme erzeugt.

Die Hertz-Heavyside'sche Analogie zwischen elektrischen und magnetischen Feldern postuliert magnetische Ladungen und erklärt die magnetischen Kräfte als die Wirkung von  $\mathbf{H}$  auf eine fiktive magnetische Punktladung  $Q_m$ :

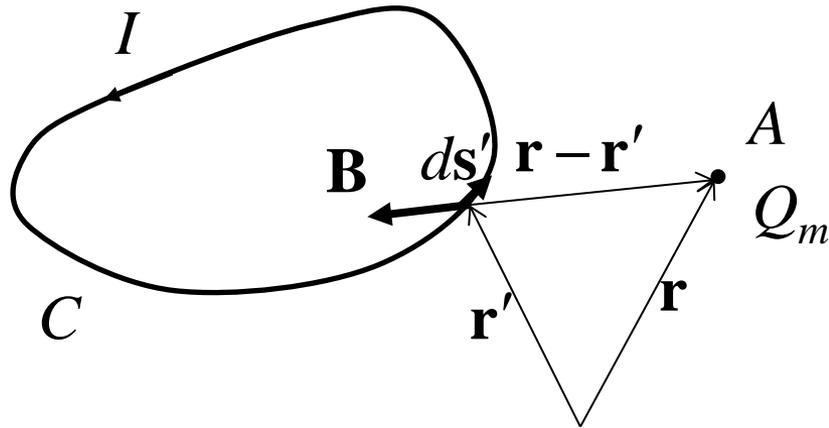
$$\mathbf{F}_m = Q_m \mathbf{H} \quad (\text{analog zu } \mathbf{F}_e = Q\mathbf{E})$$

Die magnetische Flussdichte einer magnetischen Punktladung ist:

$$\mathbf{B} = \frac{Q_m}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r \quad (\text{analog zu } \mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r)$$

Nach dieser Hertz-Heavyside'schen Definition der magnetischen Erregung, könnte  $\mathbf{H}$  magnetische Feldstärke genannt werden (englischer Sprachgebrauch). Dies soll aber auf Deutsch nicht verwendet werden.

Betrachten wir eine Leiterschleife  $C$  mit einem Strom  $I$  und bestimmen wir die magnetische Erregung  $\mathbf{H}$  in einem Aufpunkt  $A$ . Dazu bringen wir eine magnetische Punktladung  $Q_m$  zum Aufpunkt und definieren wir  $\mathbf{H}$  nach der Hertz-Heavyside'schen Analogie als die Kraft auf  $Q_m$  dividiert durch  $Q_m$ . Die Kraft auf die magnetische Punktladung ist gleich die Kraft auf die Leiterschleife mit negativem Vorzeichen.



$$\mathbf{F}_C = -\mathbf{F}_{Q_m} = I \oint_C ds' \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{F}_{Q_m} = I \oint_C ds' \times \frac{Q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_{Q_m}}{Q_m} \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{ds' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Biot-Savart'sches  
Gesetz

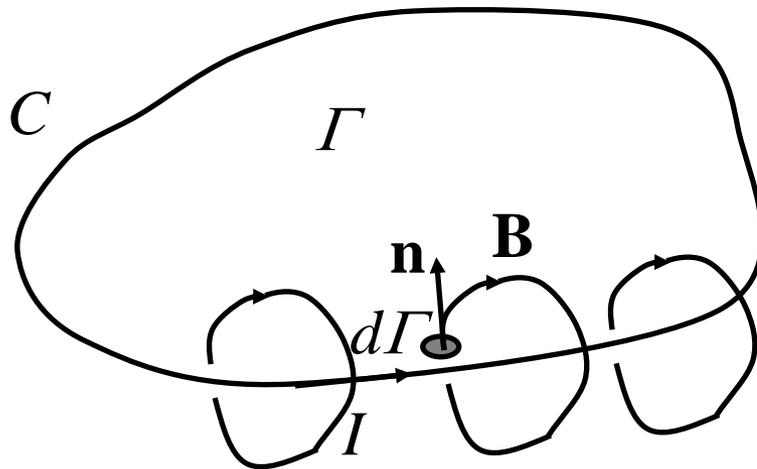
Für räumlich verteilte Ströme ( $I ds' = \mathbf{J} d\Omega'$ ):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\Omega'$$

### 3.5 Induktivität, Gegeninduktivität

*Spule*: Anordnung bestehend aus einer Stromleiterschleife. Der magnetische Fluss durch die Schleife ist dem Strom proportional.

Stromrichtung und Flächenrichtung: Rechtshandregel!



$$\Phi = \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Der Fluss ist für alle Flächen mit der Randkurve  $C$  gleich!

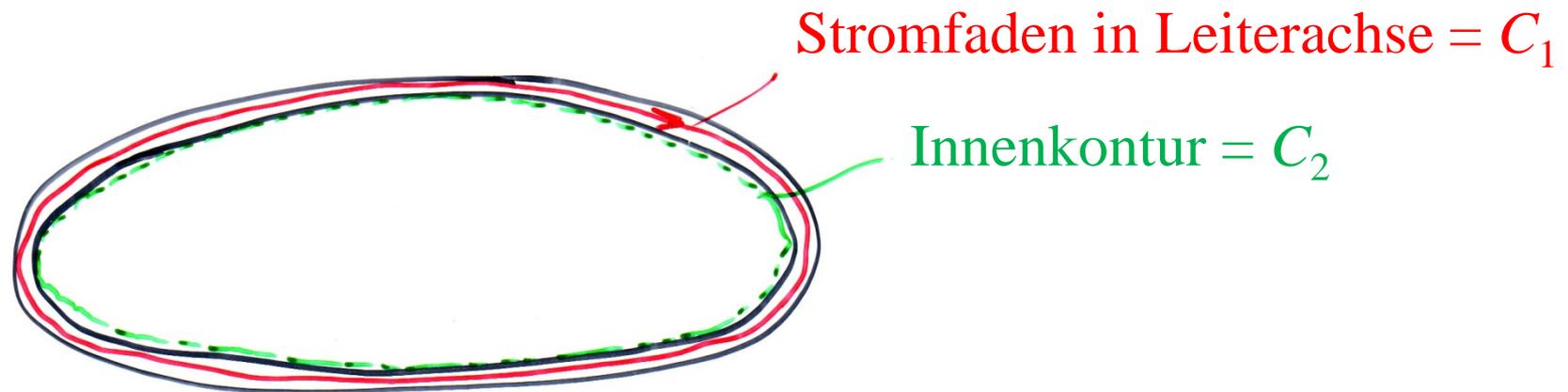
$$\Phi = LI$$

$L > 0$ : Induktivität (Selbstinduktionskoeffizient) hängt nur von der Geometrie ab!

Bei der Berechnung der Induktivität einer fadenförmigen Leiterschleife tritt ein Problem auf, da der Integrand im Flussintegral singulär wird. Das Problem ist, dass in der Nähe eines Stromfadens  $\mathbf{B}$  mit  $1/r$  zunimmt und bei der Flussberechnung das Integral  $\int \frac{dr}{r}$  mit  $r \rightarrow 0$  divergiert.

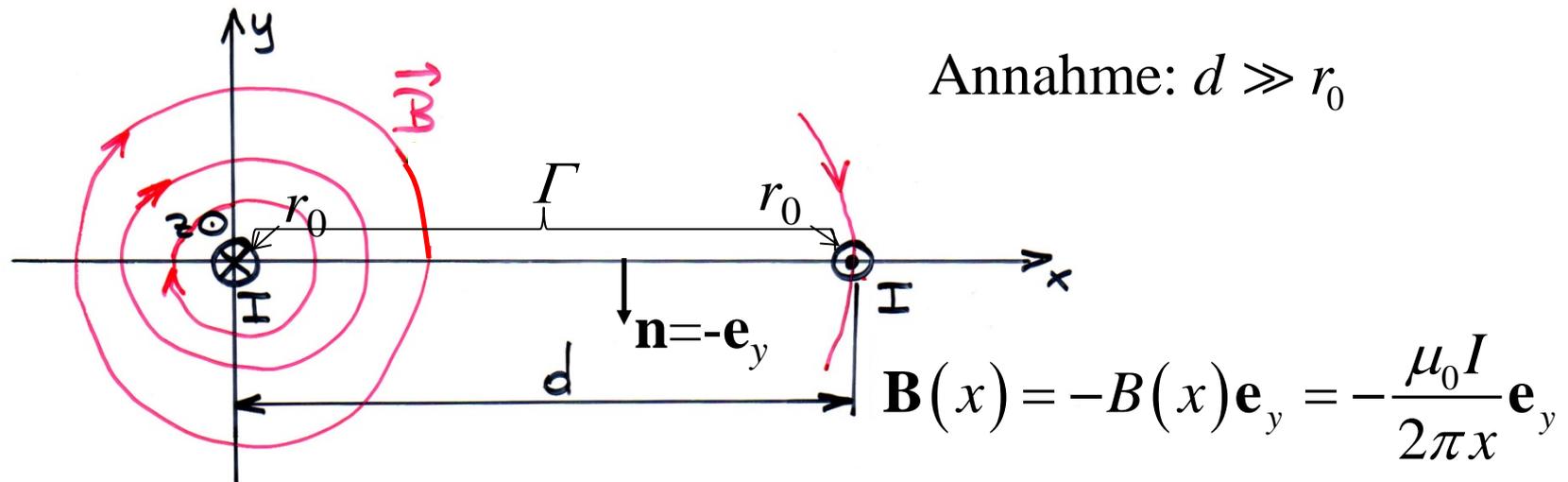
In diesem Fall muss der tatsächliche endliche Querschnitt des Leiters berücksichtigt werden. Die Idealisierung der Leiter in Form von „Stromfäden“, die sich für viele Anwendungen als zweckmäßige herausgestellt hat (z. B. Biot-Savart'sches Gesetz), endet jetzt mit einem unendlich großen Wert. Die Induktivität einer fadenförmigen Stromschleife ist unendlich. Einem unendlich dünnen Draht kann man keinen Strom einprägen.

Eine näherungsweise Lösung des Problems ist, die Abmessung des Leiterquerschnittes als endlich anzunehmen, und den Fluss beispielsweise nur durch die Innenkontur der Schleife zu berechnen:



Bei dieser Näherung haben wir nur den Fluss, der außerhalb der Leiterschleife mit dem gesamten Strom  $I$  verkettet ist, berücksichtigt. Diesen Fluss nennt man auch äußeren Fluss und die damit verbundene Induktivität äußere Induktivität. Der durch das Leiterinnere gehende Fluss steht nicht mehr in Beziehung zum Gesamtstrom  $I$  und die damit zusammenhängende Induktivität wird auch innere Induktivität genannt. Bei den üblichen dünnen Drähten ist dieser Anteil meist vernachlässigbar.

Beispiel: Induktivität pro Länge einer unendlich langen Leiterschleife von parallelen Leitern

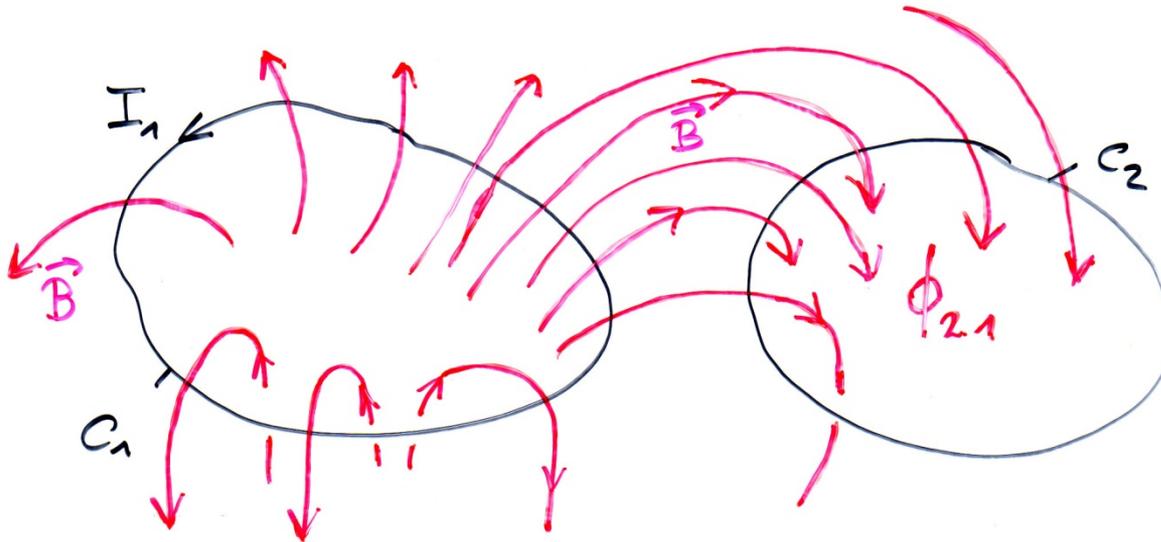


Fluss pro Länge ( $\Phi' = \Phi / l = \Phi'_1 + \Phi'_2 = 2\Phi'_1$ ):

$$\Phi'_1 = \int_{r_0}^{d-r_0} B(x) dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d}{r_0}$$

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\Phi'}{I} = 2 \frac{\Phi'_1}{I} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}$$

Betrachten wir zwei Schleifen  $C_1$  und  $C_2$ . In der Schleife 1 fließt ein Strom  $I_1$ .



Der Fluss  $\Phi_{21}$  durch die Schleife 2 ist durch  $\Phi_{21} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{\Gamma}_2$  gegeben.

Der Fluss  $\Phi_{21}$  ist proportional zum Strom  $I_1$ . Der Proportionalitätsfaktor  $M_{21}$  (oder  $L_{21}$ ) wird auch als Gegeninduktivität bezeichnet:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

Als nächstes ist  $I_1$  Null und  $I_2$  ungleich Null. Der Fluss durch die Schleife 1 ist:

$$\Phi_{12} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{\Gamma}_1$$

$$M_{12} \text{ ist dann durch } M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

Es gilt der Reziprozitätssatz:  $M_{12} = M_{21}$

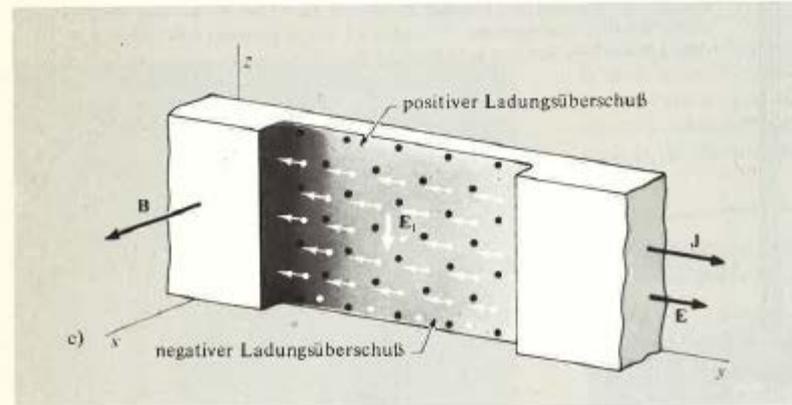
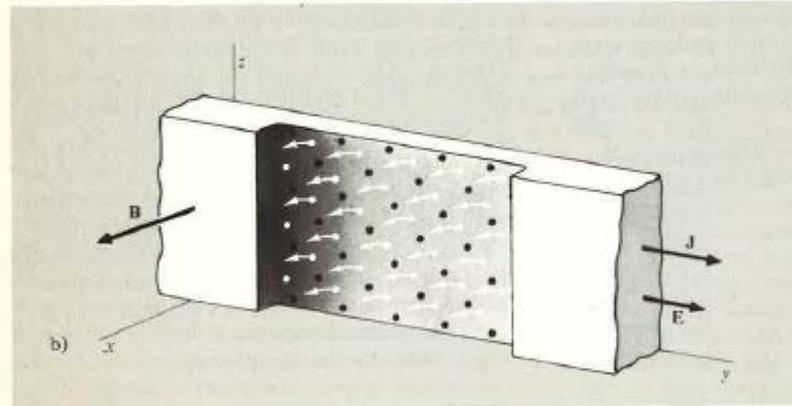
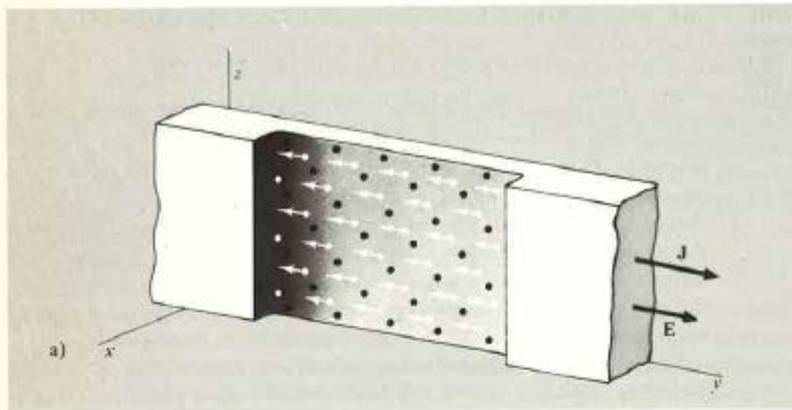
## 3.6 Kräfte im magnetischen Feld

### 3.6.1 *Der Hall-Effekt*

In Stromleitern wirkt die magnetische Kraft auf die Ladungsträger in Bewegung. Wodurch wird sie auf die Leiter übertragen, da sich doch die Elektronen (Leitungselektronen) frei im Leiter bewegen können?

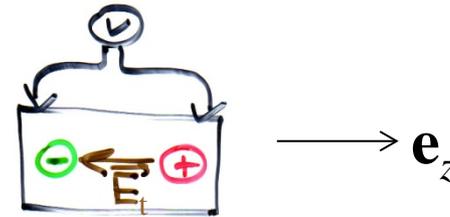
Die magnetische Kraft lenkt die Elektronen ab, welche sich an der Wand anhäufen und einen Druck ausüben.

Es entsteht ein elektrisches Feld, quer zur Stromrichtung (und zur Richtung des Magnetfeldes), welches die magnetische Kraft aufhebt. Dieses elektrische Feld verursacht eine messbare Spannung, die *Hallspannung*.



$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}; \quad \mathbf{F}_e = QE_t$$

$$\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{E}_t = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



Falls die Ladungsträger  
Elektronen sind:  $\mathbf{v} = -v\mathbf{e}_y$

$$\mathbf{E}_t = -v(-\mathbf{e}_y) \times B\mathbf{e}_x = -vB\mathbf{e}_z$$

Falls die Ladungsträger  
positive Ionen wären:  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_y$

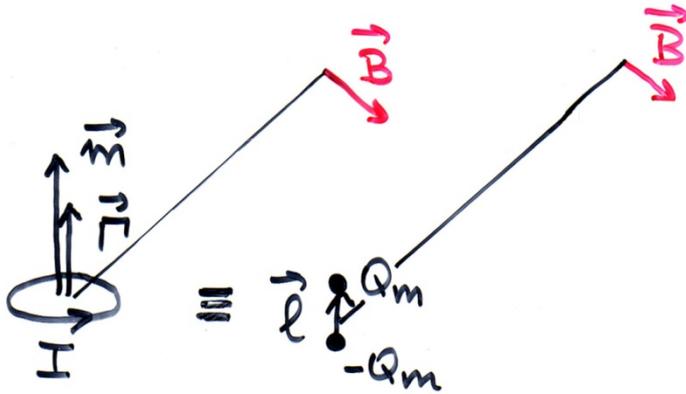
$$\mathbf{E}_t = -v(\mathbf{e}_y) \times B\mathbf{e}_x = vB\mathbf{e}_z$$

Die Polarität der Hallspannung  
hängt vom Vorzeichen der  
Ladungsträger in Bewegung ab.

Da die Hallspannung der Flussdichte proportional ist, kann der Hall-Effekt zur Messung des Magnetfeldes verwendet werden: *Hall-Sensor*. Der Faktor der Proportionalität hängt vom Material ab.

### 3.6.2 Der magnetische Dipol

Äquivalenz einer infinitesimal kleinen Stromschleife mit einem magnetischem Dipol:



Analog zum elektrischen Dipol:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left( -\mathbf{m} + 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}}{r^2} \mathbf{r} \right)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\mu_0} Q_m \mathbf{l}$$

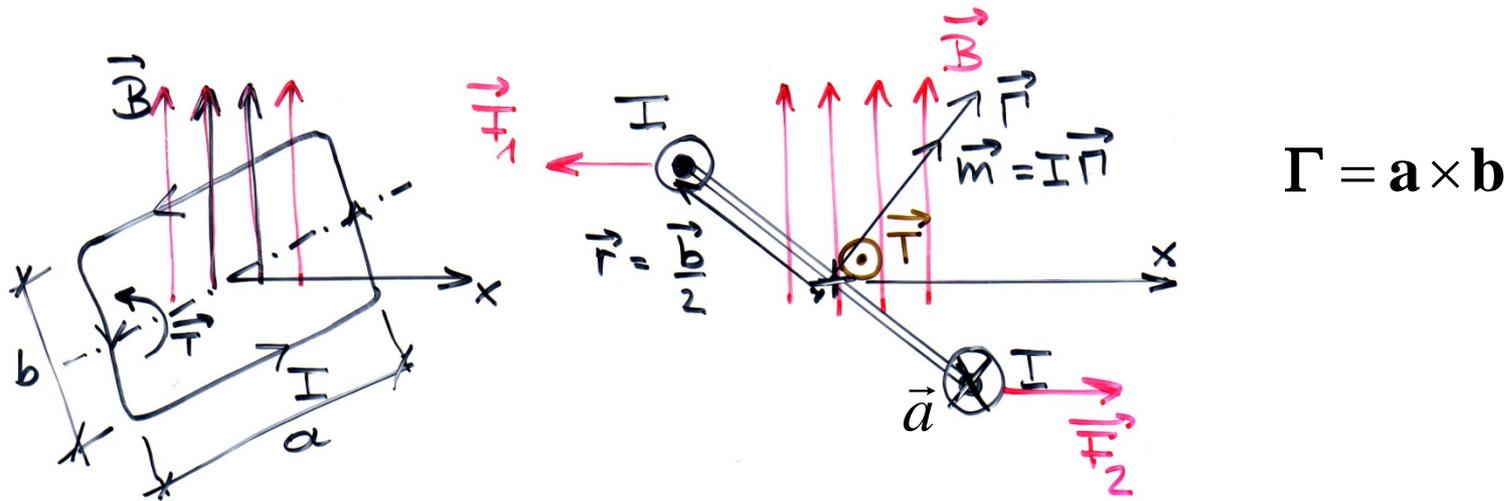
Magnetisches Dipolmoment:

$$\mathbf{m} = I \Gamma$$

Das Stromschleifenmodell ist das physikalisch richtige, da es in der uns bekannten Materie für das Magnetfeld zuständig ist.

### 3.6.3 Kräfte auf einen magnetischen Dipol

Magnetischer Dipol im homogenen magnetischen Feld



$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \frac{\mathbf{b}}{2} \times I(-\mathbf{a} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{b}}{2} \times I(\mathbf{a} \times \mathbf{B}) = \\ &= -I\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) = -I\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{B}) + \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}_0 = -I\mathbf{B} \times (\underbrace{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}_{\Gamma}) + \underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a})}_0 \end{aligned}$$

$\mathbf{T} = I\Gamma \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$  Ist das Feld  $\mathbf{B}$  inhomogen stimmt diese Beziehung noch immer, wenn die Schleife infinitesimal klein wird ( $\Gamma \rightarrow d\Gamma$ )

Im inhomogenen Feld wirkt eine Kraft auf einen in der Richtung des Feldes ausgerichteten Dipol.

Beispiel: elektrischer Dipol im Feld einer Punktladung.

$$d\mathbf{F}_{ges} = Q(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$$

$$d\mathbf{E}_r = \frac{\partial E_r}{\partial r} d\mathbf{r}$$

$$dE_r = d\mathbf{r} \cdot \text{grad}E_r \quad \boxed{dF_{ges} = \mathbf{p} \cdot \text{grad}E_r}$$

Analog zur Elektrostatik gilt wegen  $\mathbf{m} = I\Gamma = Q_m \mathbf{l}$  für die Kraft auf einen magnetischen Dipol (Stromschleife) im inhomogenen magnetischen Feld:

$$dF_x = \mathbf{m} \cdot \text{grad}B_x, \quad dF_y = \mathbf{m} \cdot \text{grad}B_y, \quad dF_z = \mathbf{m} \cdot \text{grad}B_z.$$

### 3.7 Magnetische Felder in Materie

Auch in Magnetfeldern zeigt sich ein Einfluss auf Materie. In inhomogenen Magnetfeldern treten Kräfte auf sich dort befindliche Medien auf, die in drei verschiedene Arten aufgeteilt werden können:

- 1) Es wird eine *Kraft* in Richtung *abnehmendes Magnetfeld* ausgeübt (*Diamagnetische Medien*),
- 2) Die *Kraft* wirkt in Richtung *zunehmendes Magnetfeld* (*Paramagnetische Medien*),
- 3) Eine *starke Kraft* wird in Richtung *zunehmendes Magnetfeld* ausgeübt (*Ferromagnetische Medien*)

Da die Kraft nur im inhomogenen Feld ausgeübt wird, sind analog zum elektrischen Feld, *magnetische Dipole* an den Kraftwirkungen beteiligt.

Nach unseren heutigen Vorstellungen sind Magnetfelder die Folge von elektrischen Strömen (Ampere'sches Modell).

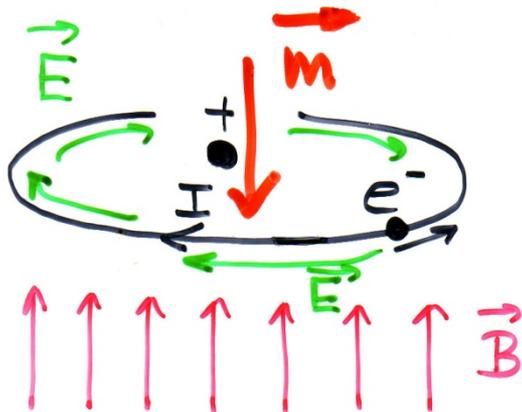
Schon Ampere ist davon ausgegangen, dass die magnetischen Eigenschaften der Materie (Magneteisenstein, Kompassnadeln) durch winzige Kreisströme im Inneren der Materie verursacht werden. Es hat allerdings noch 100 Jahre gedauert, bis seine Vorstellung bestätigt worden ist.

### *3.7.1 Atomare magnetische Dipole*

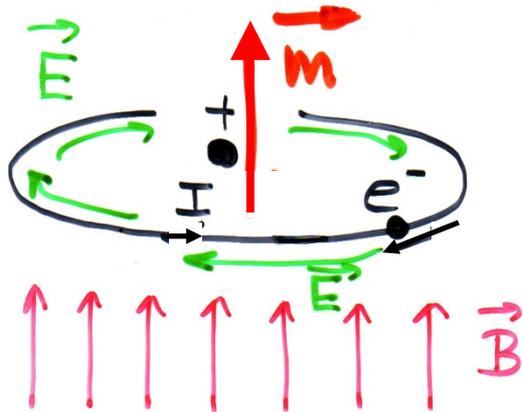
Das magnetische Verhalten der Materie lässt sich auf das Verhalten der Elektronen zurückführen. Zum einen kreisen diese in einem primitiven Atommodell um den Kern und stellen so atomare Kreisströme dar, zum anderen haben Elektronen selbst auch, wegen ihres Spins, ein magnetisches Moment. Ohne die Einbeziehung quantenmechanischer Phänomene können die magnetischen Eigenschaften nur qualitativ beschrieben werden.

## Diamagnetismus

Am einfachsten lässt sich noch das Verhalten der um den Kern kreisenden Elektronen beschreiben. Dieses klassische Modell (das andere Probleme aufwirft) reicht aus, um den Einfluss eines externen Magnetfeldes auf ein um den Atomkern kreisendes Elektron, das somit einen Kreisstrom darstellt, zu untersuchen.



Annahme:  $\vec{B}$  ist dem Dipolmoment entgegengerichtet und nimmt mit der Zeit zu. Es wird ein elektrisches Feld induziert (siehe Kapitel 4), das das Elektron beschleunigt, d. h. der durch das kreisende Elektron dargestellte Kreisstrom  $I$  wird größer, um der Vergrößerung von  $B$  entgegenzuwirken („Lenz'sches Gesetz“). Somit wird das magnetische Dipolmoment  $\vec{m}$  des Elektronenkreisstromes größer. Das nun schneller kreisende Elektron stellt einen größeren Kreisstrom dar und schwächt das Magnetfeld zusätzlich.



Umläuft das Elektron in entgegengesetzter Richtung, wird es durch das induzierte  $\mathbf{E}$  gebremst, der Kreisstrom wird kleiner und somit auch  $\mathbf{m}$ , das in diesem Fall nach oben gerichtet ist.

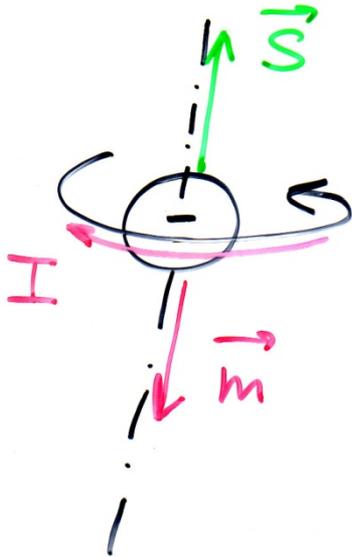
Es zeigt sich also, dass bei einer Erhöhung des externen Feldes bei betrachteten Atomen, deren Elektronenbahnen etwa normal auf  $\mathbf{B}$  stehen und deren Elektronen gegensinnig umlaufen, das gleichgerichtete  $\mathbf{m}$  kleiner und das entgegen gerichtete  $\mathbf{m}$  größer wird. Somit wird der feldschwächende Effekt größer.

Das beschriebene Verhalten wird auch als *Diamagnetismus* bezeichnet. Ohne externes Magnetfeld sind alle Momente  $\mathbf{m}$  statistisch so verteilt, dass kein resultierendes Moment vorhanden ist. Erst bei Anlegen eines äußeren Feldes treten für die etwa normal zu  $\mathbf{B}$  liegenden Kreisbahnen die oben beschriebenen Effekte auf.

Typische diamagnetische Substanzen sind Wasser, Kupfer, Diamant, flüssiger Stickstoff, Kochsalz.

# Paramagnetismus

Neben der Bahndrehbewegung besitzt das Elektron auch einen Eigendrehimpuls der Größe  $\hbar/2$  ( $\hbar = h/2\pi$ ;  $h$  ist die Plank Konstante), Spin genannt. Es sieht so aus, als ob sich das Elektron um seine eigene Achse drehen würde. Das rotierende Elektron stellt einen Kreisstrom dar, dessen magnetisches Moment gegen den Eigendrehimpuls (Spin) gerichtet ist.



Für den Diamagnetismus kann der Bahndrehimpuls des Elektrons vielfache Werte von  $h$  annehmen, der Eigendrehimpuls des Elektrons ist jedoch immer  $\hbar/2$  und somit kann sich auch  $\mathbf{m}$  nicht ändern. In einem äußeren Feld kann sich zwar  $\mathbf{m}$  nicht ändern, es wirkt aber ein Drehmoment auf  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Dieses Drehmoment wirkt so, dass  $\mathbf{m}$  parallel zu  $\mathbf{B}$  gestellt wird. Dieser Effekt wird als *Paramagnetismus* bezeichnet.

Der Paramagnetismus ist der Polarisierung im elektrischen Feld ähnlich. Die Verstärkung des angelegten Magnetfeldes ist jedoch aus zwei Gründen sehr klein. Erstens stört die thermische Bewegung die Ausrichtung der Spinmomente und zweitens können sich nicht alle Momente ausrichten, da sie nicht frei sind. In den meisten Atomen bzw. Molekülen ordnen sich die Elektronen zu Paaren, wobei deren Spin immer antiparallel sein muss. D.h., diese Momente löschen sich aus und es bleibt nur der Diamagnetismus über. Nur wenige Moleküle enthalten eine ungerade Anzahl von Elektronen (z.B. *NO* mit 15 Elektronen). Bestimmte Atome enthalten jedoch auch nicht gepaarte Elektronenspins, die sich in einem äußeren Feld ausrichten können. Die thermische Bewegung versucht jedoch immer, diese Ausrichtung zu stören. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein. Die Effekte des Dia- und Paramagnetismus können, ähnlich wie in der Elektrostatik, durch die Einführung einer relativen Permeabilitätszahl  $\mu_r$  beschrieben werden. Insbesondere kann auch die magnetische Suszeptibilität

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

definiert werden, wobei  $\chi_m$  (bzw.  $\mu_r$ ) in weiten Bereichen von  $\mathbf{B}$  unabhängig (linear) ist.

Für paramagnetische Stoffe (z.B. Aluminium, flüssiger Sauerstoff) liegt  $\mu_r$  bei ca. 1,001 und für diamagnetische Materialien typischerweise bei etwa 0,999. Üblicherweise brauchen daher Dia- und Paramagnetismus nicht berücksichtigt werden.

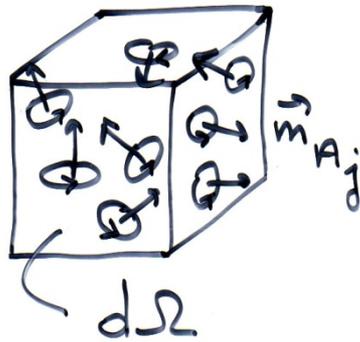
## *Ferromagnetismus*

Ferromagnetismus ist eine extrem starke Form des Paramagnetismus. Da die meisten Spins in einem Atom gepaart vorhanden sind, scheint Ferromagnetismus ein Effekt zu sein, bei dem die wenigen freien Spins sehr stark ausgerichtet sind. Ferromagnetische Materialien (z.B. Eisen, Nickel) zeichnen sich dadurch aus, dass sich die Spins bestimmter Elektronen des z.B. Eisenatoms spontan in dieselbe Richtung stellen, ohne dass ein äußeres Feld vorhanden ist. Es bilden sich in solchen Medien Bezirke mit vielen Milliarden Atomen mit nahezu perfekter Ausrichtung der Spins und somit der magnetische Momente (Weiß'sche Bezirke).

Diese spontane Ausrichtung wird ab einer bestimmten Temperatur zerstört (Curie-Punkt). Diese Curie Temperatur (Pierre Curie) liegt für Eisen bei 770 °C (bei Nickel 358 °C). Die Erklärung für die spontane Ausrichtung ist nur quantenmechanisch möglich und hat, obwohl auch energetisch begründet, nichts mit der magnetischen Wechselwirkung zwischen den einzelnen Dipolmomenten zu tun. Die Zerstörung der spontanen Magnetisierung über dem Curie-Punkt ist thermisch bedingt. Es geht, ähnlich wie beim Schmelzen, ein Zustand hoher Ordnung (Kristall) in einen weniger geordneten Zustand (Flüssigkeit) über. Auch am Curie Punkt erfolgt ein solcher Phasenübergang. In einem unmagnetisierten Eisenstück ist diese spontane Magnetisierung in sehr vielen Bezirken, aber überall mit unterschiedlichen Richtungen vorhanden, so dass im Mittel die Magnetisierung Null ist. Solche Bezirke treten auch in Einkristallen auf, man kann sie unter einem normalen Mikroskop sehen. Sie enthalten Milliarden magnetischer Momente. Die unterschiedliche Magnetisierung der einzelnen Bezirke ist energetisch günstiger als die einheitliche Ausrichtung (dies würde einem starken Permanentmagneten entsprechen). Wird ein äußeres Feld angelegt, werden sich die Bezirke, deren Magnetisierung mehr oder weniger dem äußeren Feld gleichgerichtet ist, auf Kosten von benachbarten Bezirken mit falscher Magnetisierungsrichtung vergrößern. Dies geschieht durch Verschieben der Bezirksgrenzen.

### 3.7.2 Magnetisierung und magnetische Erregung

Wie in der Elektrostatik, führen wir eine makroskopische Mittelung der atomaren magnetischen Dipole in einem makroskopischen Volumenelement  $d\Omega$  durch, wobei wir fordern, dass in  $d\Omega$  eine genügend große Zahl atomarer Dipole vorhanden ist:



$$d\mathbf{m} = \sum_j \mathbf{m}_{A_j} \quad \mathbf{M} = \frac{\sum_j \mathbf{m}_{A_j}}{d\Omega} : \text{Magnetisierung}$$

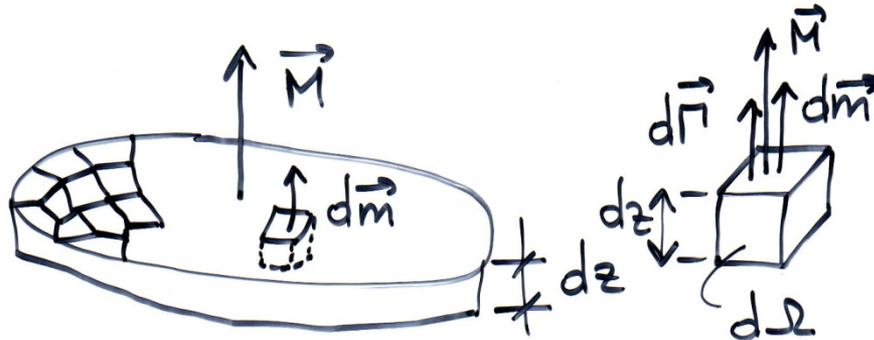
Die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  ist als magnetisches Moment je Volumen definiert:

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M} d\Omega$$

$\mathbf{M}$  und  $\mathbf{H}$  haben die gleiche Einheit:

$$[\mathbf{M}] = \frac{[I\Gamma]}{[\text{Volumen}]} = 1 \frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Betrachten wir ein Stück homogen magnetisierte Materie, von der eine Scheibe normal zur Magnetisierung herausgeschnitten wird. Diese Scheibe unterteilen wir in weitere kleine Stücke  $d\Omega$ :

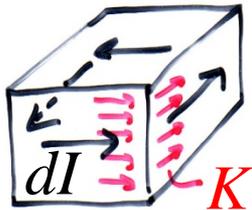


Zusammenhang  
zwischen  $dm$  und  $dI$ :

$$dm = dI d\Gamma = M d\Gamma dz = M dz d\Gamma$$

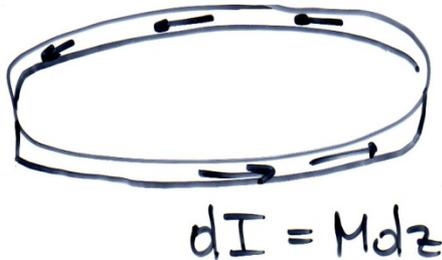


$$dI = M dz = K dz \Rightarrow K = M$$

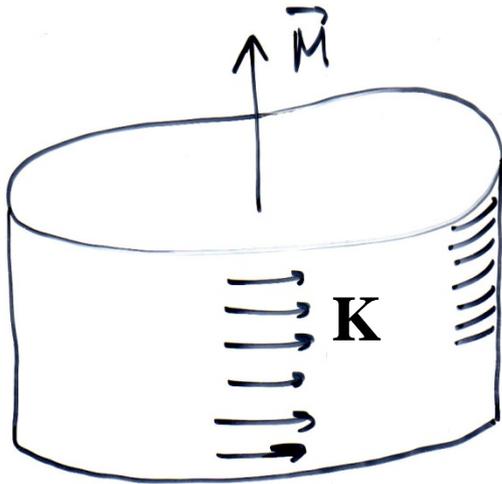


Der Strom  $dI$  fließt als Flächenstrom  $K dz$  um den Mantel von  $d\Omega$

Die Ströme im Inneren der Scheibe heben sich auf, es bleibt nur der Strom auf dem Scheibenrand übrig:

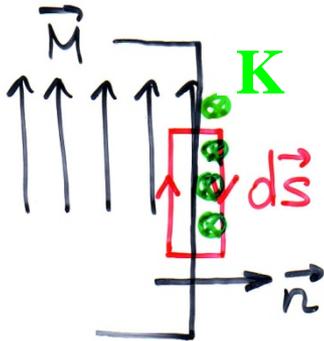


Stapeln wir jetzt diese einzelnen Scheiben der Dicke  $dz$  übereinander, erhalten wir unseren ursprünglichen magnetisierten Block, von dem wir ausgegangen sind. Das Magnetfeld außerhalb dieses magnetisierten Blockes unterscheidet sich nicht vom Feld eines an der Oberfläche fließenden Flächenstromes mit  $K = M$ . Man kann sogar bis an die Oberfläche gehen (nicht auf Molekülabstand!).



An der Mantelfläche des homogen magnetisierten Blockes fließt ein Flächenstrom ( $K = M$ ).

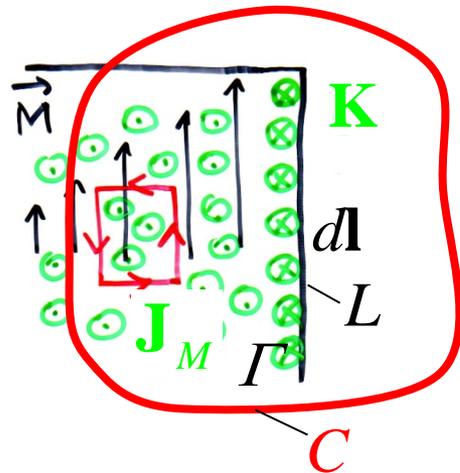
Im Inneren des Blockes muss das gemittelte mikroskopische Feld dem makroskopischen Feld  $\mathbf{B}$  gleichen (ohne Beweis).



$$M ds = K ds$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{M} \times \mathbf{n})$$

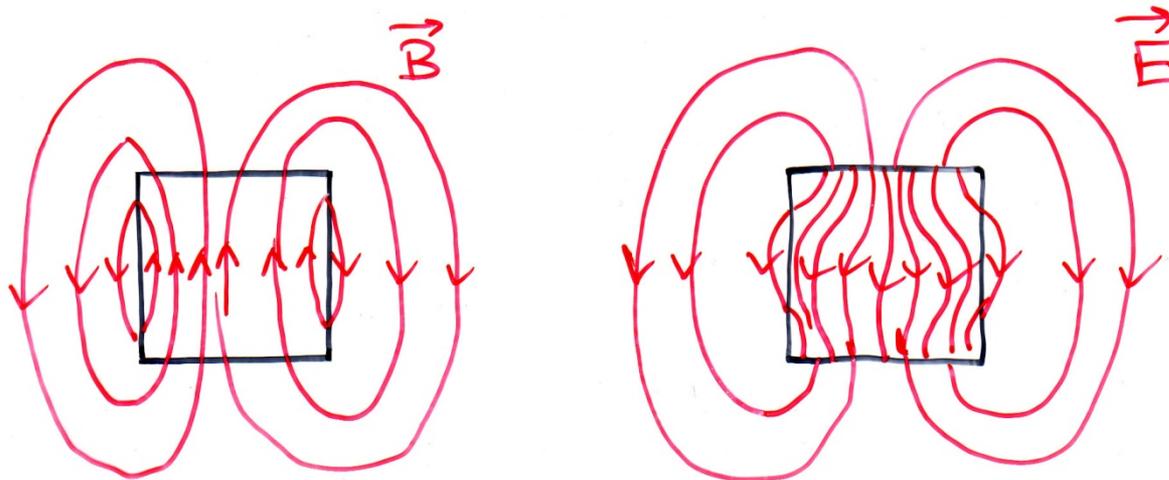
Bei inhomogener Magnetisierung können auch Magnetisierungsströme im Inneren des Mediums (Volumstromdichte  $\mathbf{J}_M$ ) auftreten. Diese Ströme sind im Gegensatz zu den freien Strömen in Leitern *gebundene Ströme*.



Im Allgemeinen sind die Wirbel von  $\mathbf{M}$  die Magnetisierungsströme:

$$\oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \mathbf{J}_M \cdot d\Gamma + \int_L \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}$$

*Homogen magnetisierte Materie* kommt im Gegensatz zu homogen polarisierten Dielektrika in der Praxis häufig vor. Man nennt sie auch *Permanentmagnete* (in der Elektrostatik Elektrete).



Im Außenraum sind die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  eines Elektreten bzw. Permanentmagneten identisch. Innen sind die Verhältnisse vollkommen unterschiedlich.  $\mathbf{E}$  ist an den Stirnflächen wegen der Polarisationsflächenladung  $\sigma_p$  unstetig, während  $\mathbf{B}$  an den Mantelflächen wegen  $\mathbf{K}$  unstetig ist.

Sind auch freie Ströme vorhanden, bilden diese zusammen mit den Magnetisierungsströmen die Wirbel von  $\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$  :

$$\oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\Gamma + \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{J}_M \cdot d\Gamma + \int_{L_M} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l}}_{\oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}}$$

$$\oint_C \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\Gamma$$

Die freien Ströme sind die Wirbel von  $\mathbf{H}$ :  $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\Gamma$

Es gilt daher im Allgemeinen:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{oder} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$$

Die Beziehung zwischen  $\mathbf{M}$  und dem Feld  $\mathbf{H}$  ist häufig linear, d.h. es gilt:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

Die magnetische Suszeptibilität  $\chi_m$  ist für diamagnetische Stoffe negativ, für paramagnetische und ferromagnetische Medien positiv.

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}$$

In linearen Medien sind daher  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  auch proportional.

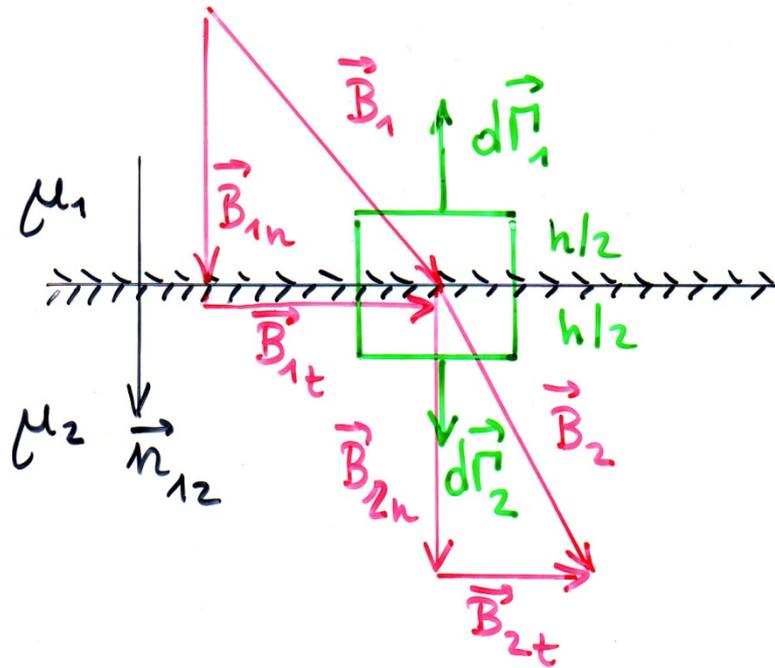
Die relative Permeabilität ist  $\mu_r = 1 + \chi_m$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$\mu = \mu_r \mu_0$ : Permeabilität

### 3.7.3 Grenzflächenbedingungen

Verhalten von  $\mathbf{B}$  auf der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedener Permeabilität:



$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\Gamma = 0$$

$$\frac{h}{2} \rightarrow 0; \quad \Delta\Gamma \rightarrow d\Gamma$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\Gamma = \mathbf{B}_1 \cdot d\Gamma_1 + \mathbf{B}_2 \cdot d\Gamma_2 = 0$$

Mit  $d\Gamma_1 = -\mathbf{n}_{12} d\Gamma$  und  $d\Gamma_2 = \mathbf{n}_{12} d\Gamma$  folgt:  $-B_{1n} + B_{2n} = 0$

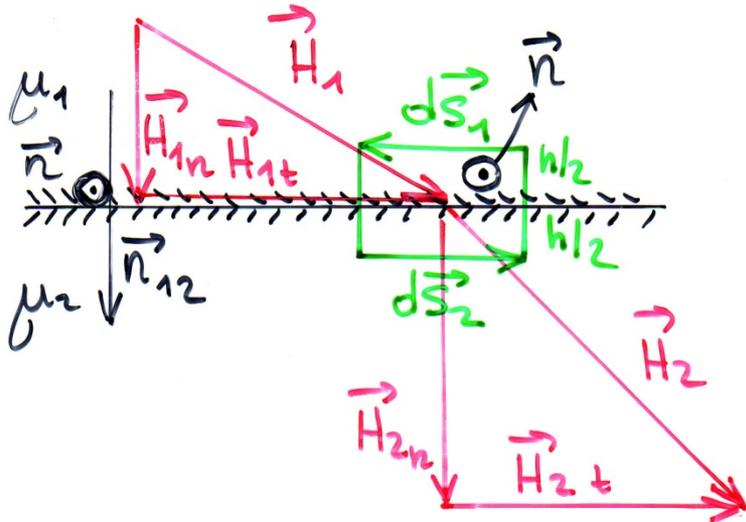
Die Normalkomponente von **B** ist stetig!

$$B_{2n} = B_{1n}$$

Wegen  $\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n}$  gilt  $\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$

Die Normalkomponenten von **H** verhalten sich an der Grenzfläche umgekehrt proportional zum Verhältnis der Permeabilitäten!

# Verhalten von $\mathbf{H}$ auf der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedener Permeabilität



Für  $\mathbf{K} = 0$  gilt:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = 0$$

$$\Rightarrow -H_{1t} ds + H_{2t} ds = 0$$

$$d\mathbf{s}_1 = (-\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{12}) ds$$

$$d\mathbf{s}_2 = (-\mathbf{n} \times \mathbf{n}_{12}) ds$$

$$\mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = \mathbf{H}_1 \cdot (\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{n}) ds = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_{12}) ds = \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{n} H_{1t}) ds = -H_{1t} ds$$

Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{H}$  sind stetig, wenn auf der Grenzfläche keine freien Flächenströme fließen!

$$\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}$$

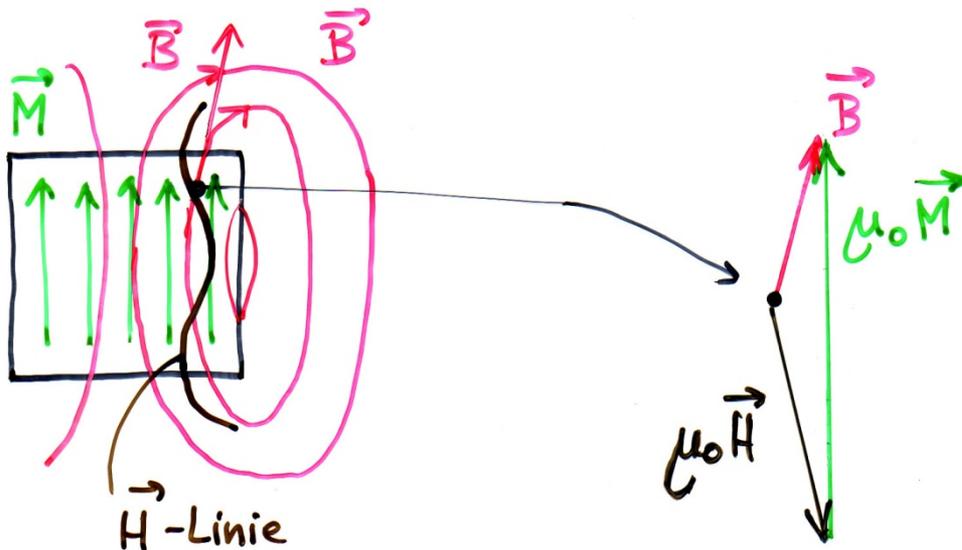
Wegen  $\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$  gilt  $\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

Die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{B}$  verhalten sich an der Grenzfläche direkt proportional zum Verhältnis der Permeabilitäten!

### 3.7.4 Nichtlinearität, Hysterese, die B/H Kennlinie

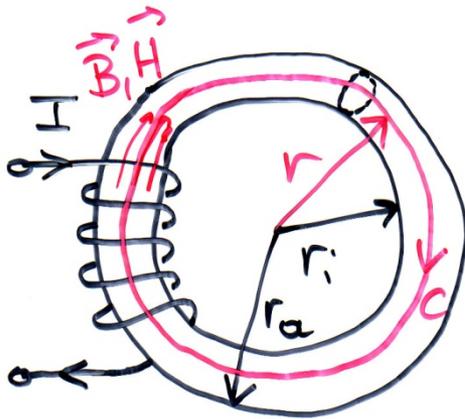
Die Beziehung  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  ist in ferromagnetischen Medien nur eine Näherung (weichmagnetische Materialien). In Permanentmagneten (hartmagnetische Medien) gilt sie überhaupt nicht.

Betrachten wir den Permanentmagneten in einem Punkt im Inneren. Es gilt dort :  $\mu_0\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M}$



Im Inneren des Permanentmagneten ( $\mathbf{M}$  ist fest vorgegeben) haben  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{M}$  nicht einmal die gleiche Richtung!

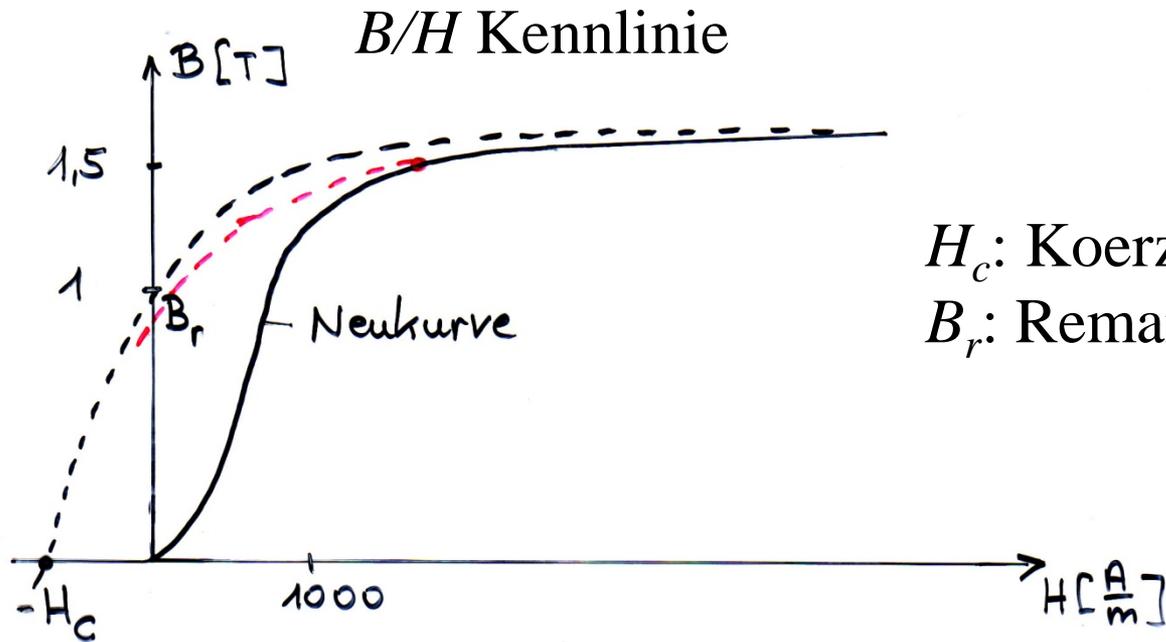
Stecken wir ein Stück ferromagnetisches Material in eine Spule mit  $N$  Windungen und erhöhen den Strom durch diese von Null auf einen bestimmten Endwert, so wird sich ein typischer Zusammenhang zwischen  $\mathbf{B}$  und dem Strom  $I$  (und somit mit  $\mathbf{H}$ ) ergeben. Damit  $\mathbf{B}$  einigermaßen homogen ist, könnte man das Eisen als Torus ausführen:



Durchflutungssatz:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_C H ds = H \oint_C ds = 2\pi r H \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = NI \quad \Rightarrow \quad H = \frac{NI}{2\pi r} \end{aligned}$$

$H$  ist proportional zu  $I$  und zu  $1/r$ . Für  $r_i \approx r_a$ , wird  $\mathbf{H}$  einigermaßen homogen.



$H_c$ : Koerzitiveverregung  
 $B_r$ : Remanenzflussdichte

Erhöht man den Strom  $I$  von Null ausgehend, nimmt  $B$  nichtlinear zu. Zuerst etwas langsamer, dann schneller und dann sehr viel langsamer, bis die Steigung der Kurve dem  $\mu_0$  entspricht (wäre auf der Ordinate statt  $B$  die Magnetisierung  $M$  aufgetragen, würde die Kurve bei der Sättigungsmagnetisierung  $M_s$  horizontal werden). Der erste Teil der Kurve ist vom „Bezirkswachstum“ geprägt, im flachen zweiten Teil „klappen“ die verbliebenen Bezirke mit falsch orientierter Magnetisierung in die Feldrichtung.

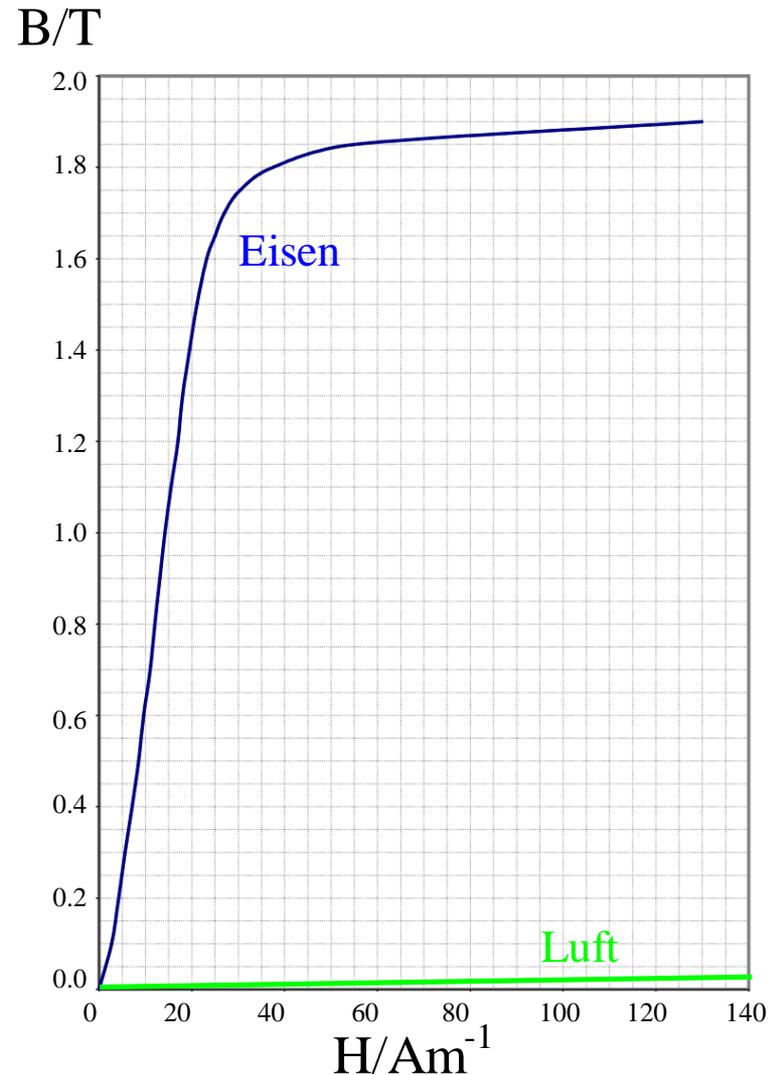
Wird der Spulenstrom wieder verringert, folgt der  $B/H$  Verlauf nicht mehr der Neukurve, sondern der gestrichelt gezeichnete Kurve, wobei bei  $H = 0$  das Remanenzfeld  $B_r$  bleibt. Diese Irreversibilität wird Hysterese genannt. Sie beruht darauf, dass u. a. die „Rückwandlung“ der Bezirksgrenzen nicht mehr vollständig erfolgt (Reibung!). Dieser Effekt ist einerseits unangenehm, da er für die sogenannten Ummagnetisierungsverluste in z.B. Transformatoren verantwortlich ist, andererseits wird er in Permanentmagneten ausgenutzt. Die skizzierte Kennlinie ist eine typische Permanentmagnetkennlinie (Alnico, Aluminium, Nickel, Kobalt Legierung mit  $B_r \approx 1,2$  T). Andere typische Permanentmagnetmaterialien sind Legierungen von Kobalt mit seltenen Erden (Samarium-Kobalt,  $B_r \approx 1,22$  T).

In weichmagnetischen Materialien kann die Hysterese oft vernachlässigt werden, und die  $B/H$ -Kennlinie ist mit guter Näherung eine nichtlineare eins-zu-eins Beziehung. In diesem Fall gilt für „kleine“ Werte von  $B$  (bis ca. 1,5 T)

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$$

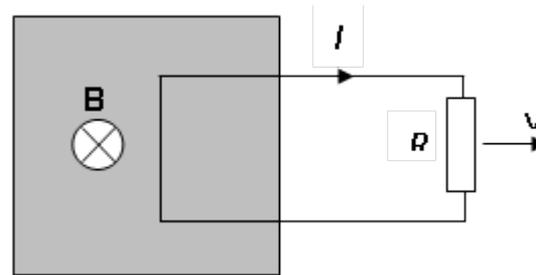
mit  $\mu_r \approx 10^3 - 10^5$ .

Für höhere Flussdichten ist  $\mu$  eine nichtlineare Funktion von  $H$ , bzw.  $B$ .



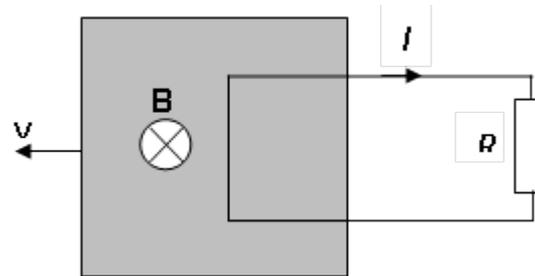
# 4. Elektromagnetische Induktion

Drei charakteristische Experimente Faradays (1831)



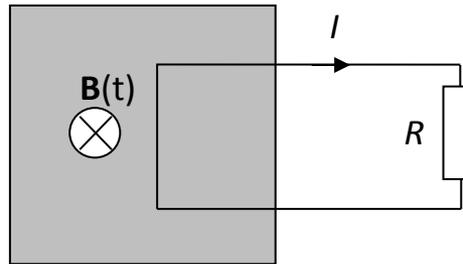
## Experiment 1:

Eine Leiterschleife, abgeschlossen mit einem Widerstand  $R$  (oder auch kurzgeschlossen) wird nach rechts mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  aus einem Bereich mit einem normal zur Zeichenebene gerichteten von einem ruhenden Magneten erzeugten Magnetfeld  $\mathbf{B}$  herausgezogen. Es fließt in der Schleife ein Strom  $I$ .



## Experiment 2:

Die Leiterschleife ruht und es wird der Magnet nach links mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Es fließt in der Schleife ein Strom  $I$ .



### Experiment 3:

Leiterschleife und Magnet sind in Ruhe, aber das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  ist entsprechend zeitabhängig  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ . Es fließt wieder ein Strom  $I$  in der Schleife.

Im ersten Fall bewegt sich die Leiterschleife in einem statischen Magnetfeld, d.h. ein Stromfluss kann nur zufolge der Lorentzkraft auf die in der Schleife mitgeführten Elektronen zustande kommen.

In den Fällen 2 und 3 ist die Leiterschleife in Ruhe, der Strom kann nicht auf die Lorentzkraft zurückgeführt werden, es muss vielmehr ein elektrisches Feld dafür verantwortlich sein. Es war die geniale Idee Faradays, dass dieses elektrische Feld durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes induziert wird (*Faraday'sches Induktionsgesetz*).

Dass der Strom in den Fällen 1 und 2 identisch ist, ist eine Folge der speziellen Relativitätstheorie, da es nur auf die Relativgeschwindigkeit zwischen Magnet und Leiterschleife ankommt.

Spezielle Relativitätstheorie: in Koordinatensystemen, welche sich gegenüber einander mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen, laufen alle physikalischen Vorgänge in identischer Weise ab.

Dies bedeutet, dass das elektrische Feld und das Magnetfeld in verschiedenen Koordinatensystemen nicht übereinstimmen können: im Experiment 1 wirkt ein Magnetfeld auf die sich bewegenden Ladungsträgern im Experiment 2 sind die Ladungsträgern in Ruhe, es kann nur ein elektrisches Feld auf sie wirken.

Zwei Koordinatensysteme:

$S$  : ruhendes System, Laborsystem

$S'$  : bewegt sich mit der konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bzg.  $S$

Transformation der elektrischen und magnetischen Feldern:

Größen in  $S$ :  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , Größen in  $S'$ :  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$ .

Aufteilung in Komponenten parallel ( $\parallel$ ) und senkrecht ( $\perp$ ) zu  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp})$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_{\perp} \right)$$

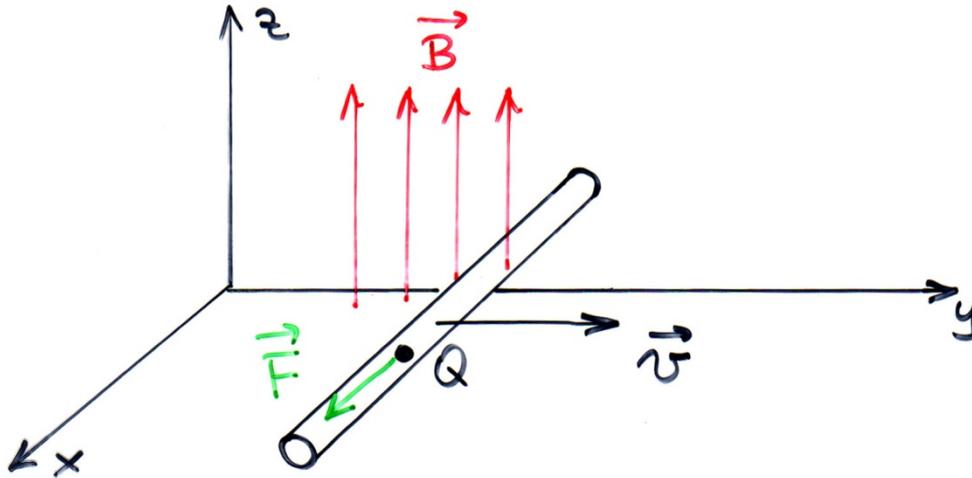
Für  $|\mathbf{v}| \ll c$ :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

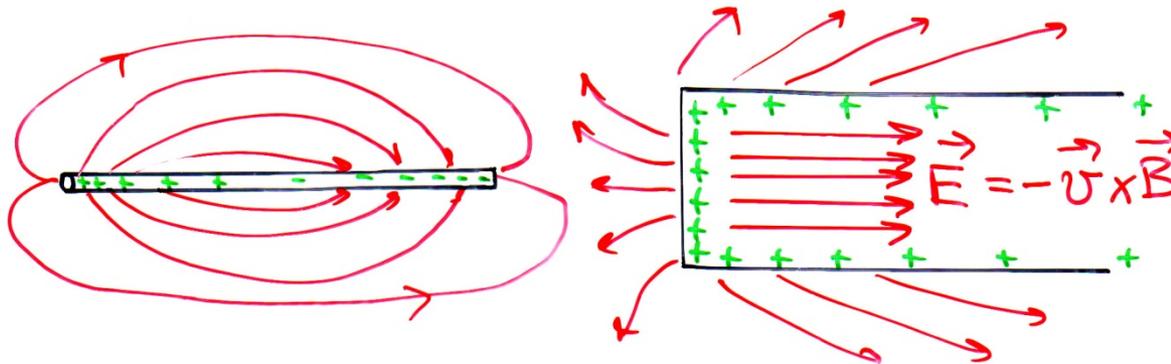
$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}$$

## 4.1 Bewegungsinduktion

### 4.1.1 Bewegung eines stabförmigen Leiters in einem homogenen Magnetfeld



$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



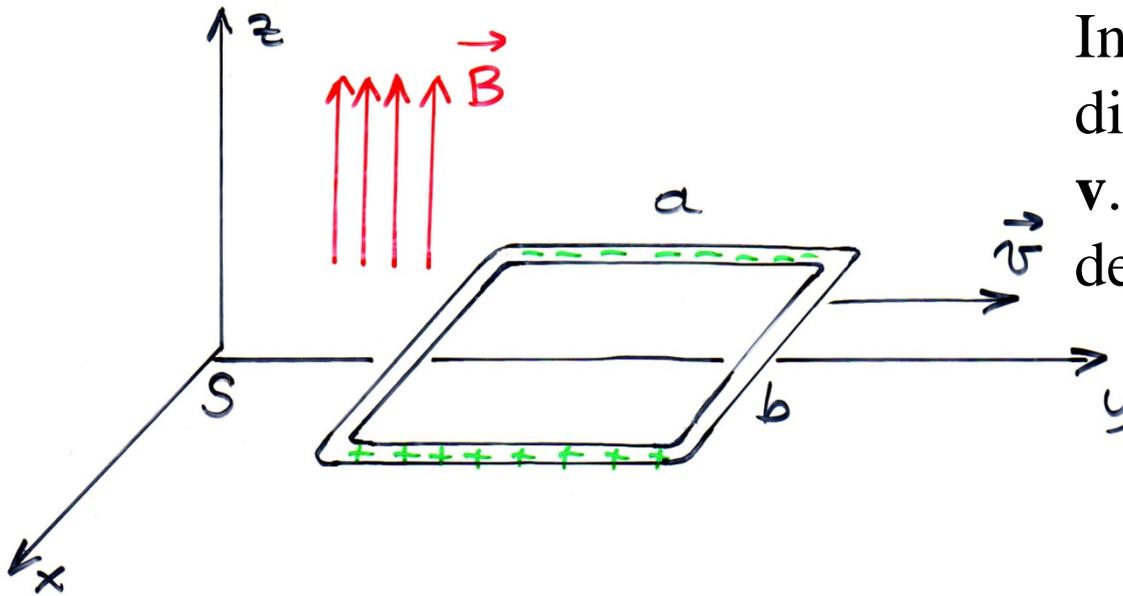
Durch die Bewegung des Leiters im Magnetfeld werden sich zufolge der Lorentzkraft (magnetische Kraft) Elektronen am hinteren Ende des Stabes ansammeln und positive Atomrümpfe am vorderen Ende des Stabes hinterlassen. Es baut sich ein elektrisches Feld auf, bis im stationären Zustand das elektrische Feld im Gleichgewicht mit der magnetischen Kraft steht:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \text{im Leiter gilt: } \mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

In einem mit dem Stab mitbewegten Bezugssystem  $S'$ , stellt der Beobachter ein Magnetfeld  $\mathbf{B}$  und ein homogenes elektrisches Feld  $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  fest (angenommen, dass  $\mathbf{v}$  im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit  $c$  klein ist).

In diesem elektrischen Feld ruht der Stab, es treten keine magnetischen Kräfte auf, auf der Oberfläche des Stabes stellen sich Flächenladungen so ein, dass das Innere des Stabes feldfrei ist (Influenz). Diese Oberflächenladungen erzeugen außerhalb des Stabes ein zusätzliches elektrisches Feld, das, für  $|\mathbf{v}| \ll c$ , gleich wie das in  $S$  beobachtete elektrische Feld aussieht.

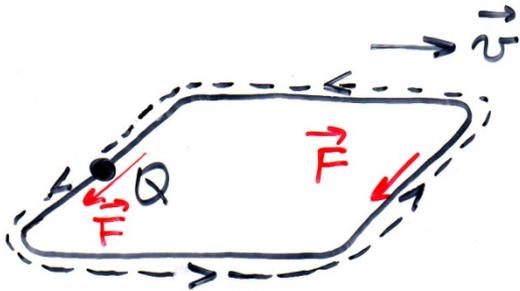
### 4.1.2 Bewegung einer rechteckigen Drahtschleife in einem homogenen Magnetfeld



In  $S$  treibt die Lorentz-Kraft die Ladungsträger quer zur  $\mathbf{v}$ . Es fließt kein Strom in der Schleife.

Im Bezugssystem  $S'$ , in dem die Schleife ruht, stellt der Beobachter die Felder  $\mathbf{B}' \approx \mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}' \approx \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  fest. Die Kraft auf die Ladungen ist hier eine rein elektrische, da die Ladungen in  $S'$  ruhen. Das Leiterinnere ist feldfrei (Influenz).

Die Kraft, welche auf die Ladungsträger wirkt ist konservativ:

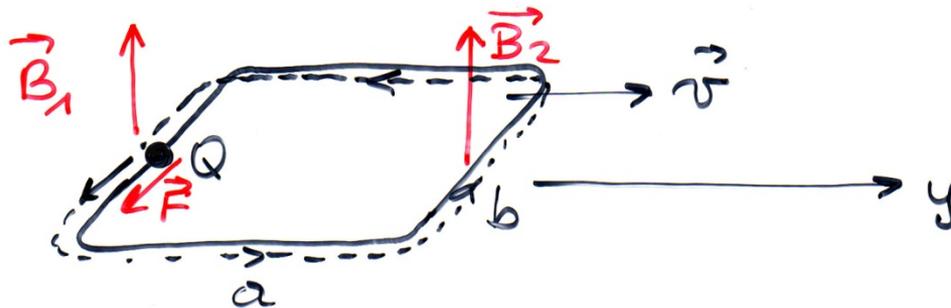


$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Q \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{in } S$$

$$\oint_{C'} \mathbf{F}' \cdot d\mathbf{s}' = Q \oint_{C'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = 0 \quad \text{in } S'.$$

Es gibt keine induzierte Spannung. Der Fluss der Leiterschleife ist in beiden Systemen zeitunabhängig.

### 4.1.3 Bewegung der Leiterschleife in einem inhomogenen Magnetfeld



Im Laborsystem  $S$  bewegt sich die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in  $y$ -Richtung in einem inhomogenen Magnetfeld. Wieder treten nur magnetische Kräfte auf die Elektronen in der Schleife auf.  $\mathbf{B}$  sei nur eine Funktion von  $y$ :  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(y)$

Das Linienintegral  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Q \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = Qv(B_1 - B_2)b$

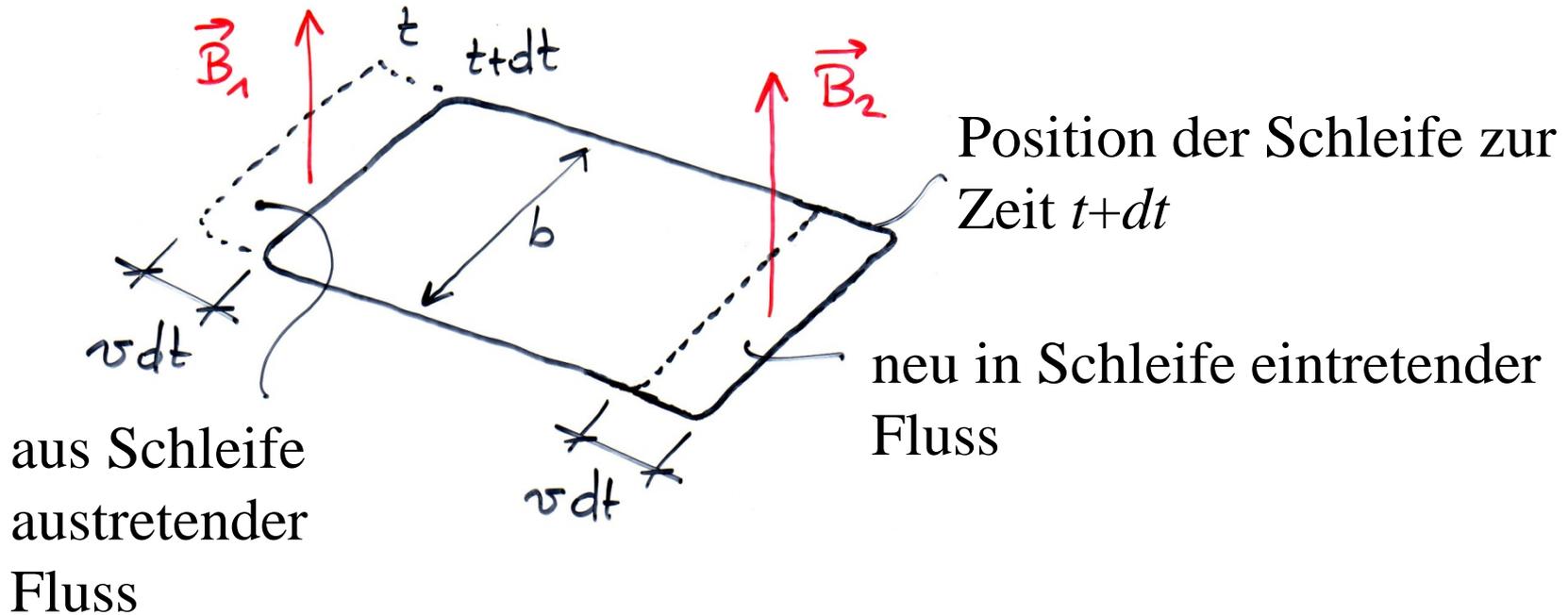
ist die Arbeit, die von der Kraft  $\mathbf{F}$  während eines Umlaufes an der Ladung  $Q$  verrichtet wird. Die Arbeit je Ladung ist die induzierte Spannung  $U_{EMK}$  (*EMK*, elektromotorische Kraft):

$$U_{EMK} = \frac{1}{Q} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = vb(B_1 - B_2)$$

Es wird ein Strom fließen, der durch das Ohm'sche Gesetz gegeben ist:

$$I = \frac{U_{EMK}}{R}$$

#### 4.1.4 Fluss durch die bewegte Schleife



Austretender Fluss:  $-d\Phi_1 = B_1 b v dt$

Eintretender Fluss:  $d\Phi_2 = B_2 b v dt$

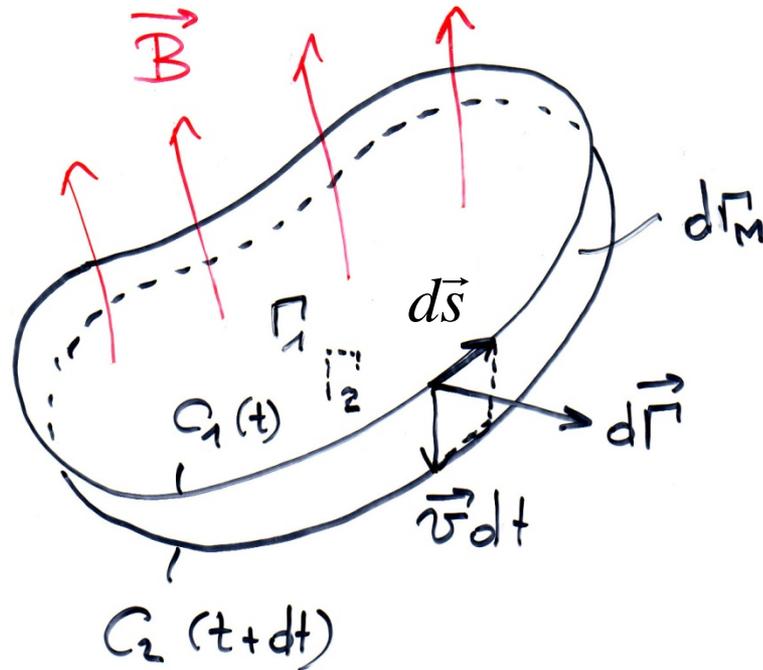
Flussänderung:  $d\Phi = -(B_1 - B_2) b v dt$

$$U_{EMK} = v b (B_1 - B_2)$$

⇓

$$U_{EMK} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Diese Beziehung gilt nicht nur für diese spezielle Schleife, sondern für eine beliebige Anordnung:



Die Schleife  $C_1$  hat sich in der Zeit  $dt$  weiterbewegt und hat nun die Form  $C_2$ .

Die ursprüngliche Fläche  $\Gamma_1$  bildet mit der neuen Fläche  $\Gamma_2$  (mit dem Rand  $C_2$ ) und der Randfläche  $d\Gamma_M$  die Hüllfläche eines Volumens, für dessen Oberfläche wegen des zeitlich unveränderlichen Magnetfeldes gilt:

$$\oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + d\Gamma_M} \mathbf{B} \cdot d\Gamma = 0$$

Der Differenzfluss ist genau der Fluss durch die Randfläche  $d\Gamma_M$ :

$$\Phi(t + dt) = \int_{\Gamma_1 + d\Gamma_M} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \Phi(t) + \int_{d\Gamma_M} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \int_{d\Gamma_M} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{s})$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \oint_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) = - \oint_{C_1} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

Die Kraft  $\mathbf{F}$  auf eine Ladung  $Q$  ist  $\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Somit:

$$U_{EMK} = \oint_C \frac{\mathbf{F}}{Q} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

$$\boxed{U_{EMK} = - \frac{d\Phi}{dt}}$$

## 4.2 Zeitlich veränderliches Magnetfeld: das Faraday'sche Induktionsgesetz

Ändert sich  $\mathbf{B}$  auch zeitlich, ist die totale Ableitung des Flusses noch um das Flächenintegral über die zeitliche Änderung von  $\mathbf{B}$  zu ergänzen:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\Gamma - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Wegen der zeitlichen Änderung von  $\mathbf{B}$  ist nun auch ein elektrisches Feld vorhanden, welches zusätzlich einen Beitrag zur *EMK* leistet:

$$U_{EMK} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}.$$

Somit ergibt sich wiederum die Flussregel:

$$U_{EMK} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{\Gamma} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

*Faraday'sche Induktionsgesetz:*

Die zeitliche Änderung des Magnetfeldes erzeugt ein elektrisches Feld:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

Dies gilt auch, wenn keine Leiterschleife vorhanden ist.

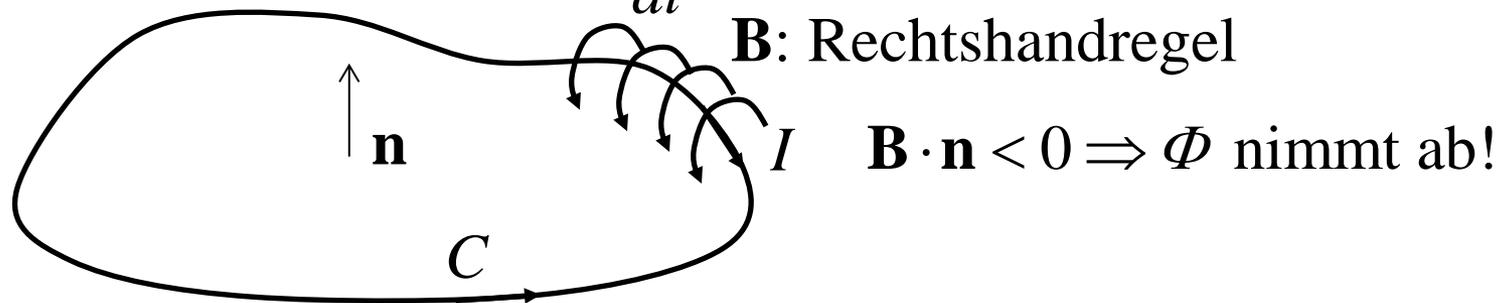
## 4.3 Die Lenz'sche Regel

Ändert sich der Fluss einer Leiterschleife mit einem endlichen Widerstand, induziert die *EMK* einen Strom. Dieser Strom verursacht ein Magnetfeld, welches den Fluss der Schleife ändert. Die *Lenz'sche Regel* sagt, dass die Änderung des Flusses durch den induzierten Strom der induzierenden Änderung des Flusses *entgegenwirkt*.

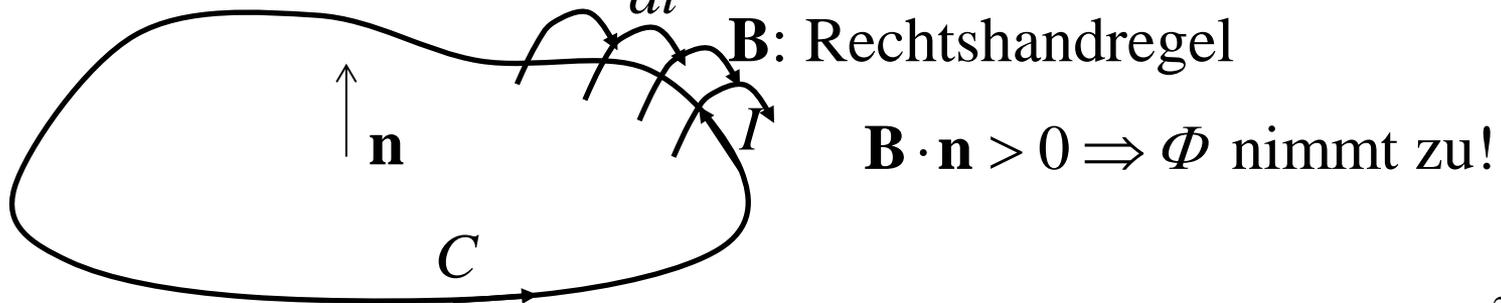
*Beispiel: Ruhende Schleife mit zeitlich veränderlichem Fluss*

$$U_{EMK} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \frac{d\Phi}{dt}$$

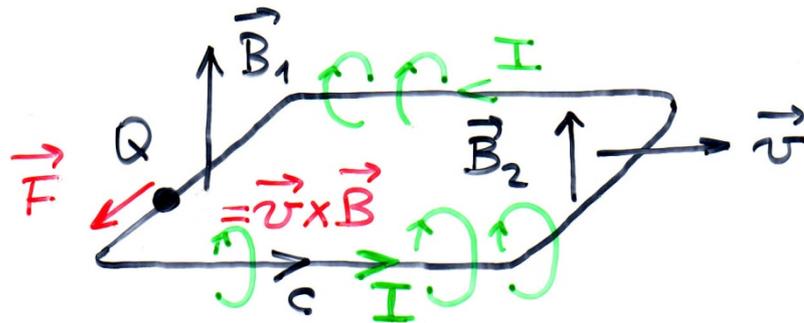
Fall A. Fluss nimmt zu:  $\frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow U_{EMK} < 0$



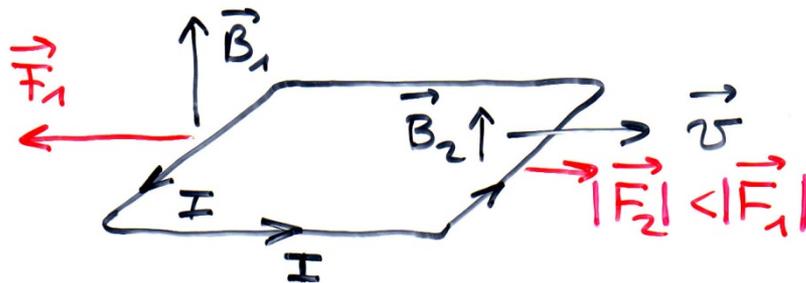
Fall B. Fluss nimmt ab:  $\frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow U_{EMK} > 0$



## Beispiel: Bewegung einer Leiterschleife im inhomogenen Magnetfeld

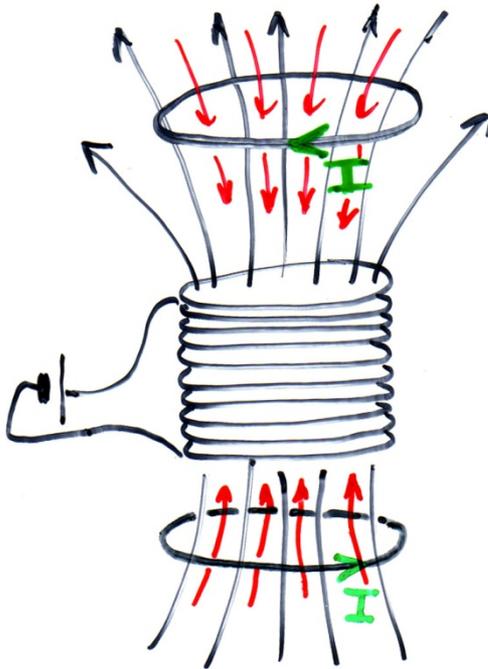


Der Fluss nimmt wegen der Bewegung ab.  
Das Magnetfeld des Stromes wirkt der Flussabnahme entgegen.



Die Kraft auf die Schleife ist nach links gerichtet, für die Bewegung der Schleife mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  nach rechts muss eine Kraft aufgewendet werden.

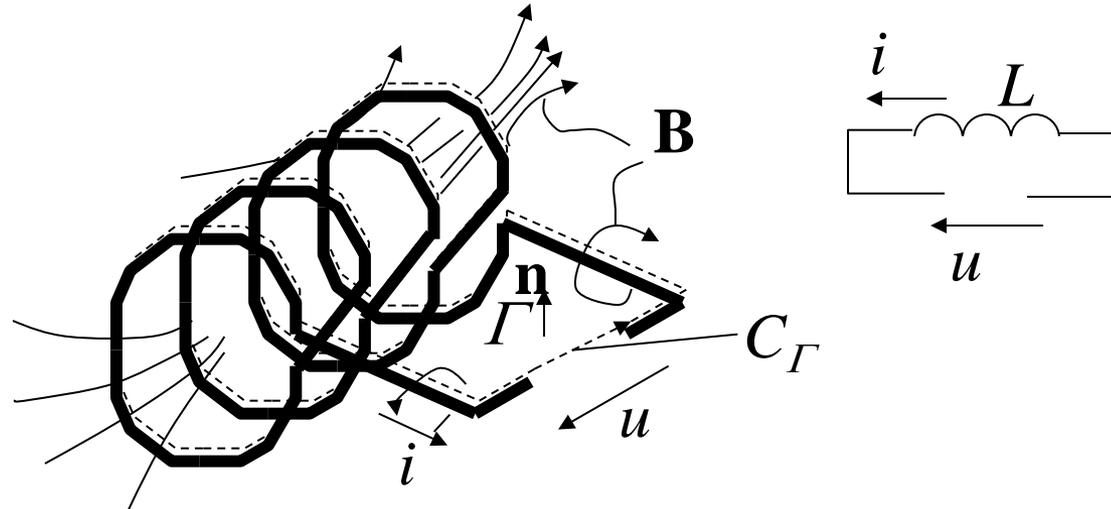
## *Beispiel: Fallender Kupferring im Feld einer Spule*



Der Ring oberhalb der Spule fällt nach unten. Der Fluss durch den Ring nimmt zu. Es wird eine Spannung induziert, die einen Strom  $I$  treibt, der selbst wieder ein Magnetfeld erzeugt, das der Zunahme des Spulenfeldes entgegenwirkt. In diesem Fall ist das Magnetfeld des Ringes dem Spulenfeld entgegen gerichtet.

Der Ring unterhalb der Spule fällt nach unten. Der Fluss durch den Ring nimmt ab. Es wird eine Spannung induziert, die einen Strom  $I$  treibt, der selbst wieder ein Magnetfeld erzeugt, das der Abnahme des Spulenfeldes entgegenwirkt. In diesem Fall unterstützt das Feld des Ringes das Spulenfeld.

# Die Beziehung zwischen der Spannung und dem Strom einer Spule



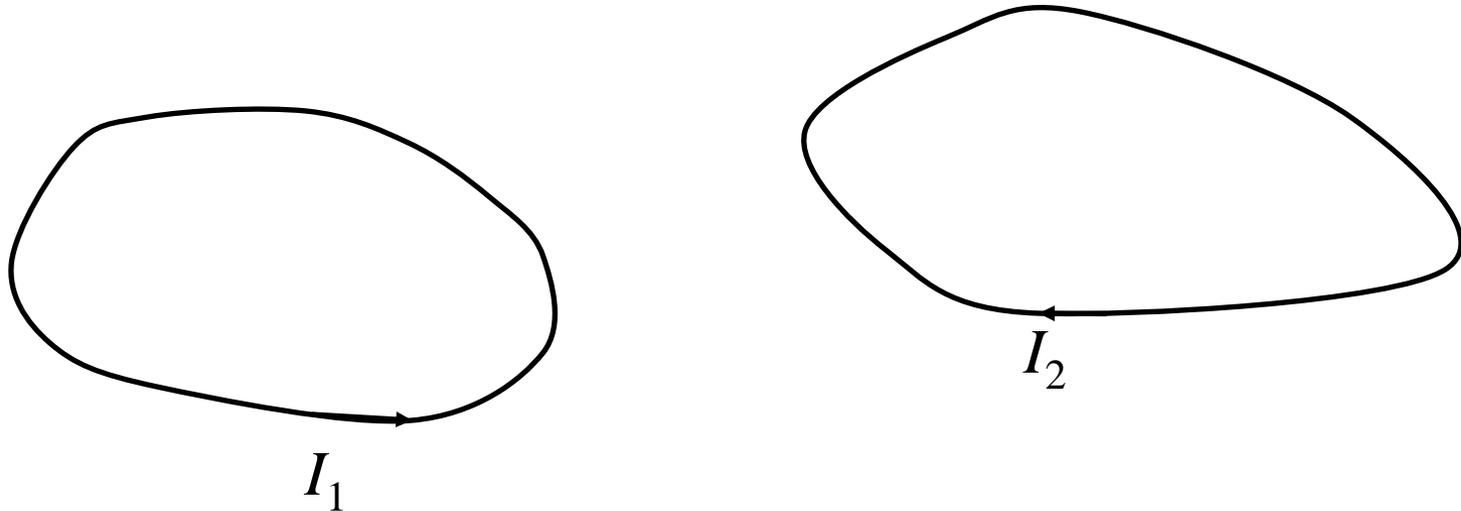
Faraday'sches Induktionsgesetz für die Fläche  $\Gamma$ :

$$\oint_{C_\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -u + \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

$$u = L \frac{di}{dt}$$

## 4.4 Energie im magnetischen Feld

Energie von zwei Leiterschleifen mit den Strömen  $I_1$  und  $I_2$ .



Die Ströme werden von 0 auf die jeweiligen Endwerte  $I_1$ , bzw.  $I_2$  erhöht. Die dabei geleistete Arbeit ist die Energie.  
Annahme: lineare Materialeigenschaften

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \text{ bzw. } \Phi = LI$$

Energie der Schleife 1: der Strom  $i_1$  wird in der Zeit  $dt$  um  $di_1$  erhöht (die andere Schleife bleibt stromlos). Dadurch erhöht sich der Fluss  $\Phi_1$  durch die Schleife um  $d\Phi_1$ :  $d\Phi_1 = L_{11}di_1$ . Es wird eine Spannung

$$u_{11} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{11}\frac{di_1}{dt} \text{ induziert.}$$

Um diese Stromerhöhung  $di_1$  zu realisieren, muss die angelegte Spannung  $-u_{11}$  betragen. Dabei wird in der Zeit  $dt$  eine Arbeit  $dW_1 = -u_{11}dQ_1 = -u_{11}i_1dt = L_{11}i_1di_1$  geleistet.

Die gesamte Arbeit, d.h. der magnetische Energieinhalt der Schleife 1 ist:

$$W_1 = \int_{i_1=0}^{I_1} L_{11}i_1di_1 = \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 = \frac{1}{2}I_1\Phi_1$$

Auf ähnliche Weise wird danach in der Schleife 2 der Strom von Null auf  $I_2$  erhöht. Die dabei von der Quelle zu leistende Arbeit ist:

$$W_2 = \int_{i_2=0}^{I_2} L_{22} i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 = \frac{1}{2} I_2 \Phi_2$$

Wird der Strom in der Schleife 2 in der Zeit  $dt$  um  $di_2$  erhöht, ändert sich auch der Fluss in der Schleife 1 um den Wert  $d\Phi_{12} = L_{12} di_2$  und es wird in der Schleife 1 eine Spannung

$$u_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{di_2}{dt} \text{ induziert.}$$

Diese Spannung muss der Generator der Schleife 1 kompensieren ( $-u_{12}$ ), da sich der Strom  $I_1$  in der Schleife 1 nicht mehr ändern darf. Die Quelle 1 leistet daher die Arbeit  $dW_{12}$ :

$$dW_{12} = -u_{12} dQ_1 = -u_{12} I_1 dt = L_{12} I_1 di_2, \text{ bzw. } W_{12} = \int_{i_2=0}^{I_2} L_{12} I_1 di_2 = L_{12} I_1 I_2$$

Die gesamte von den Quellen geleistete Arbeit, welche als magnetische Energie im System der beiden Schleifen steckt, ist:

$$W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2$$

Wird zuerst die Schleife 2 auf Strom gebracht und danach erst die Schleife 1, ist das Ergebnis:

$$W = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + L_{21} I_2 I_1$$

Allgemein gilt für  $N$  Schleifen wegen der Symmetrie und  $I_1 I_2 = I_2 I_1$ :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N L_{ij} I_i I_j \quad \text{magnetische Energie eines systems von } N \text{ Schleifen}$$

Der Ausdruck  $\Psi_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j$  ist der Fluss (Flussverkettung)

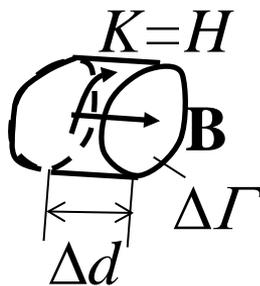
durch die Schleife  $i$  zufolge der Ströme in allen  $N$  Schleifen:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i$$

### 4.4.1 Energieinhalt des magnetischen Feldes

**B** und **H** seien die magnetische Flussdichte und die magnetische Erregung in einem Punkt im Raum. In einem sehr kleinen Volumen  $\Delta\Omega$  um diesen Punkt kann das Feld als homogen betrachtet werden.

Energie einer infinitesimalen Leiterschleife:



$$\Delta W = \frac{1}{2} \underbrace{K \Delta d}_I \underbrace{B \Delta \Gamma}_\Phi = \frac{1}{2} H B \Delta d \Delta \Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \Delta \Omega$$

magnetische Energiedichte  
(eine Feldgröße) wird postuliert als:

$$w_m = \frac{\Delta W}{\Delta \Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

Magnetische Energie in einem Volumen  $\Omega$ :

$$W = \int_{\Omega} w_m d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\Omega$$

Die Energie wird nicht in den Strömen, sondern im magnetischen Feld gespeichert.

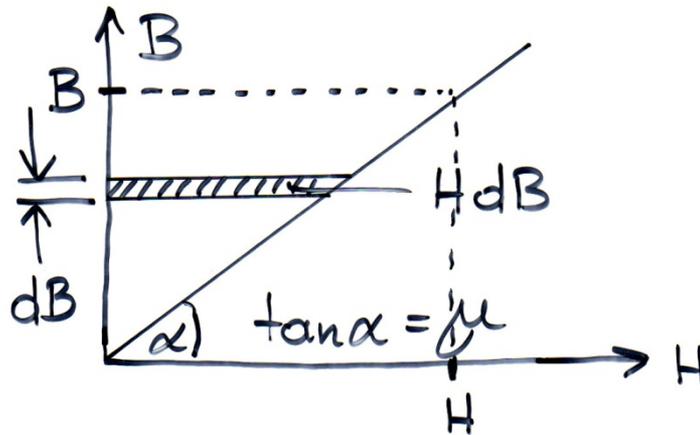
## 4.4.2 Magnetische Energie bei Anwesenheit ferromagnetischer Werkstoffe

Die Energiedichte für Materialien mit einer nichtlinearen Beziehung zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  ist:  $w_m = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ , wobei die Flussdichte von Null bis zum endgültigen Wert  $B$  erhöht wird.

Magnetische Energie:

$$W = \int_{\Omega} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\Omega$$

Ist der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  linear, führt das Integral für  $w_m$  auf die bereits bekannte Beziehung  $w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$

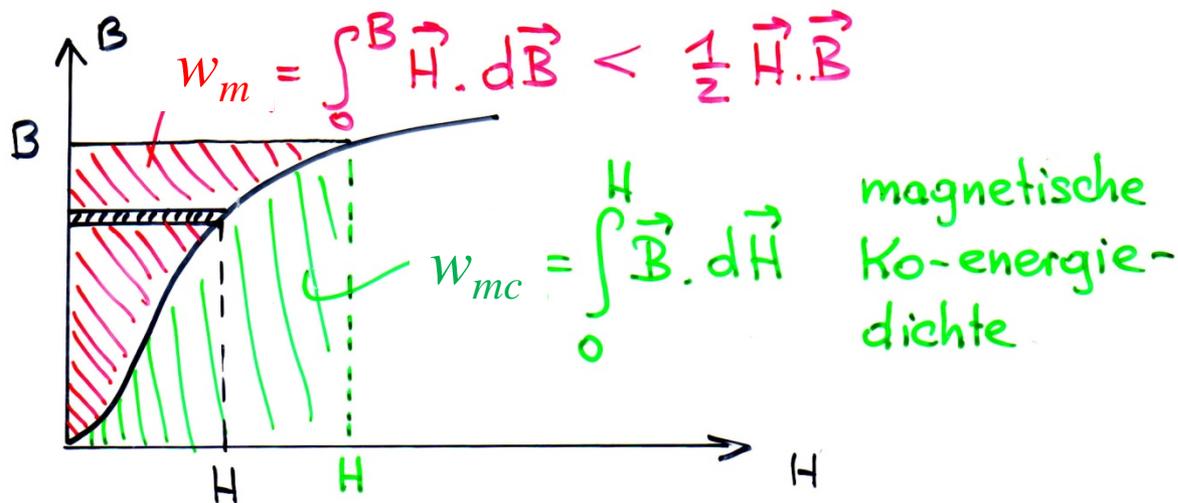


Die magnetische Energiedichte entspricht der oberen Dreiecksfläche:

$$\int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{2} HB$$

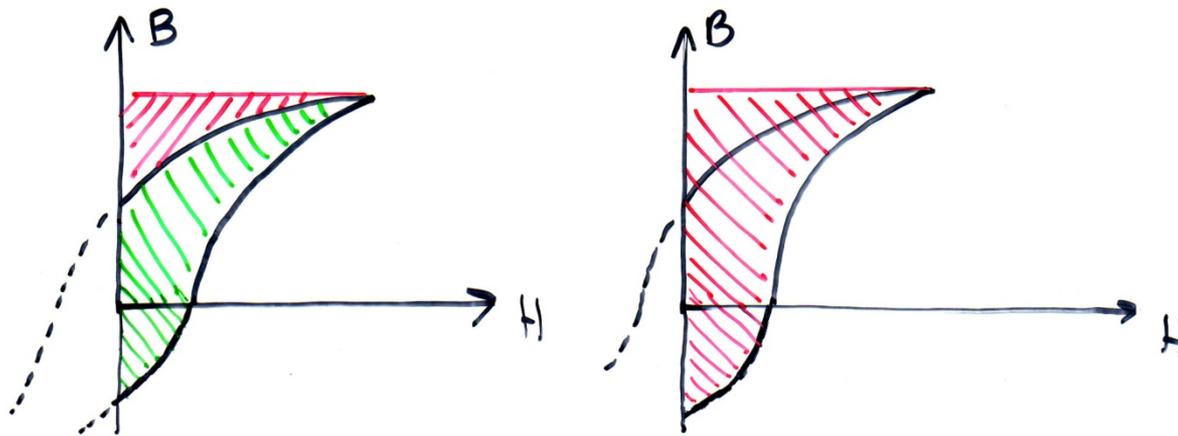
Die untere Dreiecksfläche ist gleich groß wie die obere und wird magnetische *Koenergiedichte* genannt.

Ist der Zusammenhang zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  nichtlinear, ergibt das Integral im Allgemeinen einen kleineren Wert als die Dreiecksfläche (Sättigung) während sich für die Koenergiedichte ein größerer Wert als die Dreiecksfläche ergibt:



Für die Koenergiedichte gilt:  $w_{mc} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - w_m$

Unter Berücksichtigung der Hysterese erhält man bei periodischen Vorgängen während der beispielsweise positiven Halbperiode des Stromes als Differenz der magnetischen Energiedichten die halbe Schleifenfläche.



Die der Schleifenfläche entsprechende Energiedichte über das gesamte Volumen integriert, geht während einer Periode von  $I$  als Verlustenergie (Hysteresisverluste, Wärme) verloren.

### 4.4.3 Virtuelle Verschiebung

Berechnung der Kraft auf stromführende Leiterschleifen aus Energieerhaltungssatz. Die Schleife wird um ein kleines Wegelement  $d\mathbf{r}$  im Feld aller Schleifen verschoben. Für ein energetisch abgeschlossenes System gilt:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + dW = 0$$

bzw.

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dW$$

Dies ist der Fall, wenn durch die Verschiebung keine Spannungen in den Schleifen induziert werden. Dafür muss der Fluss  $\Phi$  durch die Schleifen konstant gehalten werden.

Halten wir jedoch die Ströme in den Schleifen konstant, handelt es sich um ein gekoppeltes System. Die Summe der Energien, die vom einen System aufgenommen werden, ist gleich der Energie, die vom anderen System abgegeben wird. In diesem Fall werden in den Schleifen bei der Verschiebung Spannungen induziert, die von den Quellen kompensiert werden müssen. Die Quellen leisten dabei die Arbeit:

$$dW_Q = \sum_{j=1}^N I_j \frac{d\Phi_j}{dt} dt = \sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j$$

Für dieses gekoppelte System gilt daher:

$$dW_Q = \sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j = dW + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Im *linearen Fall* ist die Energie  $W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \Phi_j$ , d.h.

$$dW = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j$$

$$dW_Q - dW = \sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j = dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Für konstant gehaltene Ströme gilt daher im linearen Fall:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW$$

Im *nichtlinearen Fall* (Anwesenheit von ferromagnetischer Materie) gilt:

$$W_Q - W = \sum_{j=1}^N I_j \Phi_j - \int_{\Omega} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Omega} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} d\Omega = W_{mc}$$

$W_{mc}$  ist die Koenergie und das Prinzip der virtuellen Verschiebung ergibt:

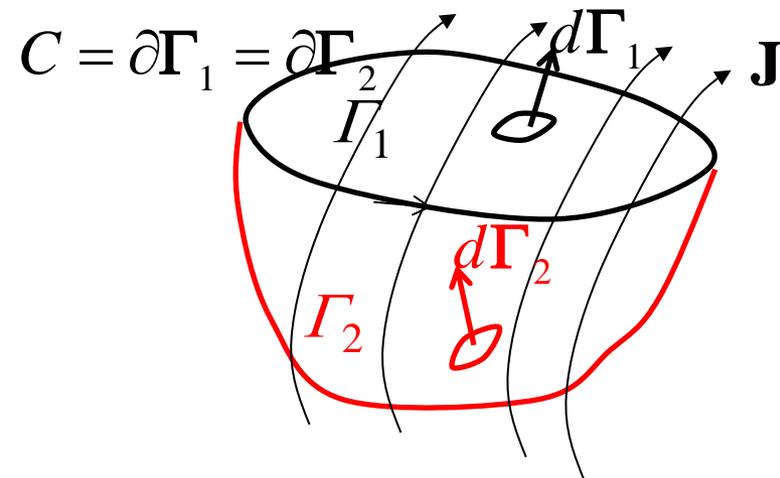
$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW_{mc}$$

# 5. Elektromagnetische Wellen

## 5.1 Zeitlich veränderliches elektrisches Feld: der Verschiebungsstrom

Ändert sich das elektrische Feld zeitlich, gilt für die Quellen der elektrischen Stromdichte das Kontinuitätsgesetz:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega$$

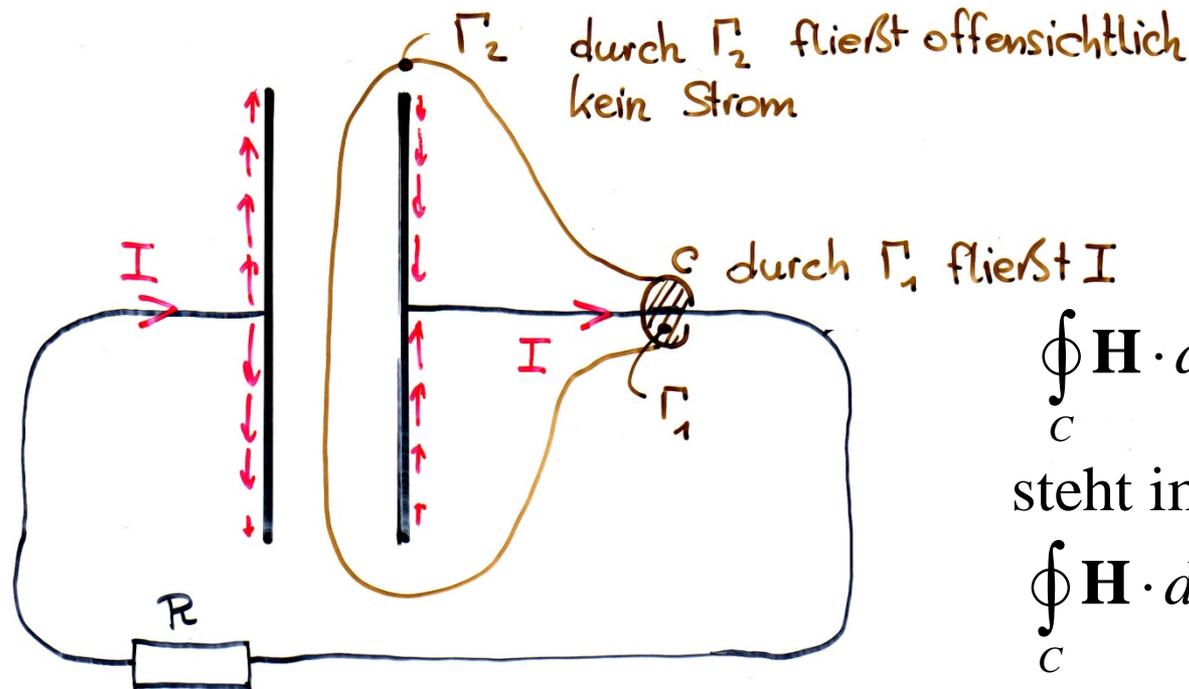


Aus dem Durchflutungssatz

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

folgt aber, dass  $\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = 0$

Der Widerspruch ist bei der Entladung eines Kondensators offensichtlich:



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{J} \cdot d\Gamma = I$$

steht im Widerspruch zu

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{J} \cdot d\Gamma = 0$$

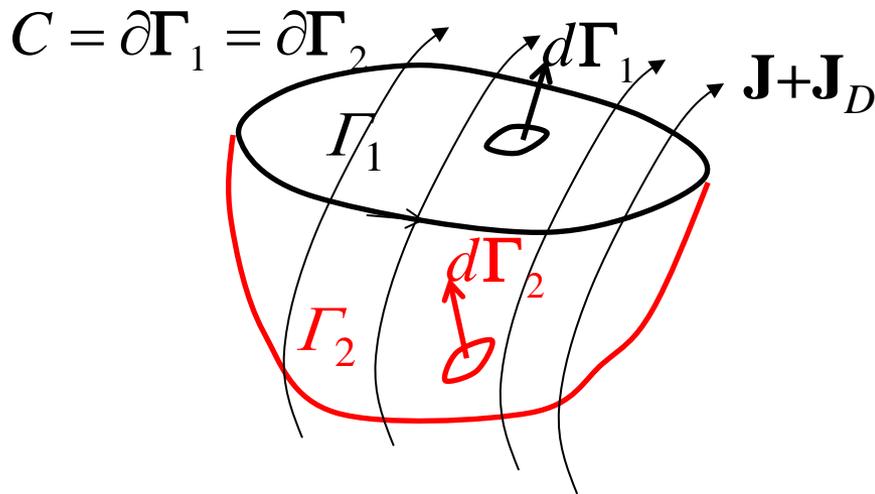
Auch durch  $\Gamma_2$  muss der Strom  $I$  auftreten. Die entsprechende Stromdichte ist die Verschiebungsstromdichte  $\mathbf{J}_D$ :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{J}_D \cdot d\Gamma = I$$

## 5.2 Die Maxwell'sche Ergänzung des Durchflutungssatzes

Der Durchflutungssatz muss daher lauten:

$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \cdot d\mathbf{\Gamma} \text{ für eine beliebige offene Fläche } \Gamma$$



Daraus folgt

$$\int_{\Gamma_1} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Gamma_2} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

D.h., dass für eine beliebige *geschlossene* Fläche  $\Gamma$  gilt:

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} (\mathbf{J} + \mathbf{J}_D) \cdot d\mathbf{\Gamma} = 0$$

Die Quellen der Summe der Leitungsstromdichte und der Verschiebungsstromdichte sind daher Null, d.h. die Quellen der Leitungsstromdichte sind:

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = - \oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

Die Quellen der Leitungsstromdichte sind aus dem Kontinuitätsgesetz:

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\Gamma} = - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

Es gilt daher für die Verschiebungsstromdichte:

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{\Gamma} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

Aus dem Gauß'schen Gesetz hat man

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

D.h.:

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{\Gamma} = \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \oint_{\Gamma=\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

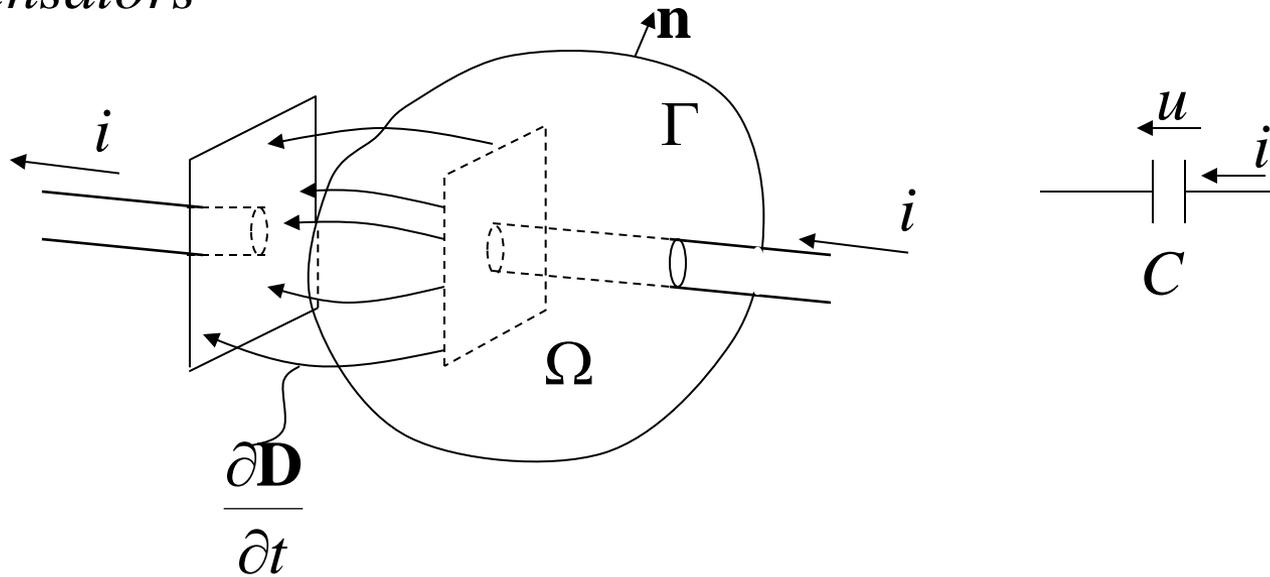
Da dies für eine beliebige geschlossene Fläche gilt, hat man

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Die Maxwell'sche Ergänzung des Durchflutungssatzes ist daher:

$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

# Die Beziehung zwischen der Spannung und dem Strom eines Kondensators

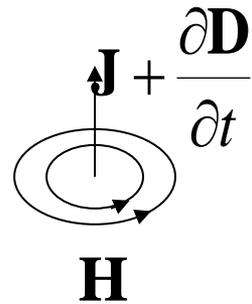


Integration des Kontinuitätsgesetzes über  $\Omega$ :

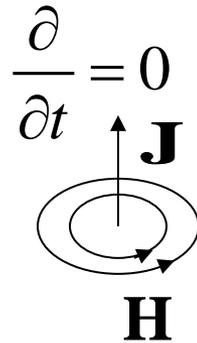
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = -i + \frac{dQ}{dt} = 0.$$

$$i = C \frac{du}{dt}$$

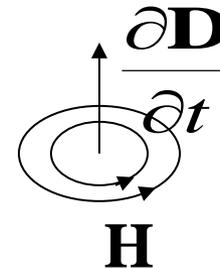
Auch die ein zeitlich verändertes elektrisches Feld verursacht ein Magnetfeld!



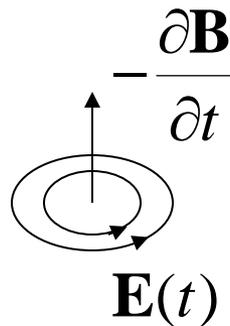
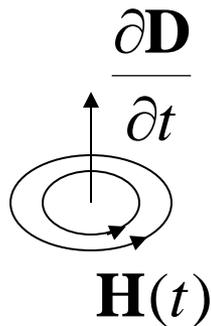
Speziell, falls



aber auch im Vakuum



im Vakuum:

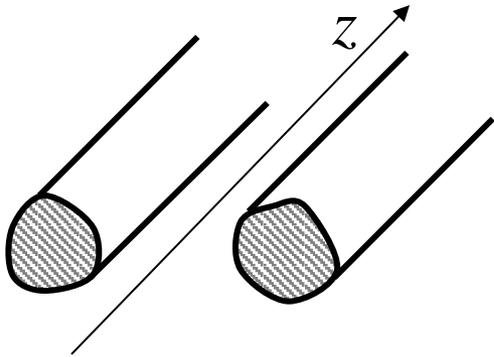


Das zeitveränderliche elektrische und magnetische Feld erzeugen einander gegenseitig:  
**elektromagnetisches Feld,**

**elektromagnetische Wellen**

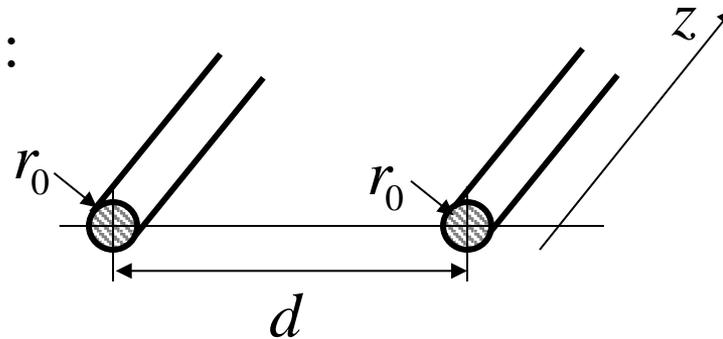
## 5.3 Leitungen

*Leitung*: sehr (unendlich) lange Anordnung von zwei parallelen Leitern mit konstantem Querschnitt:



allgemeine Leitung

z. B.:

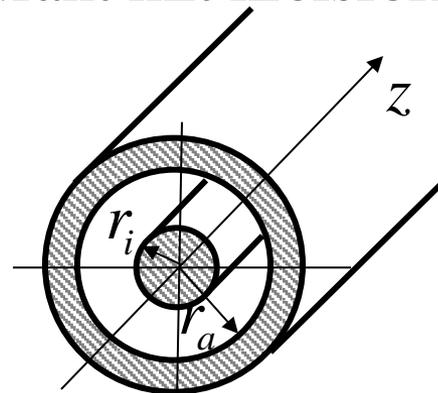


Doppeldraht mit kreisförmigem Querschnitt

Materialeigenschaften:

$\mu, \gamma, \varepsilon$  in der Umgebung,

$\gamma_l$  in den Leitern.



Koaxialkabel

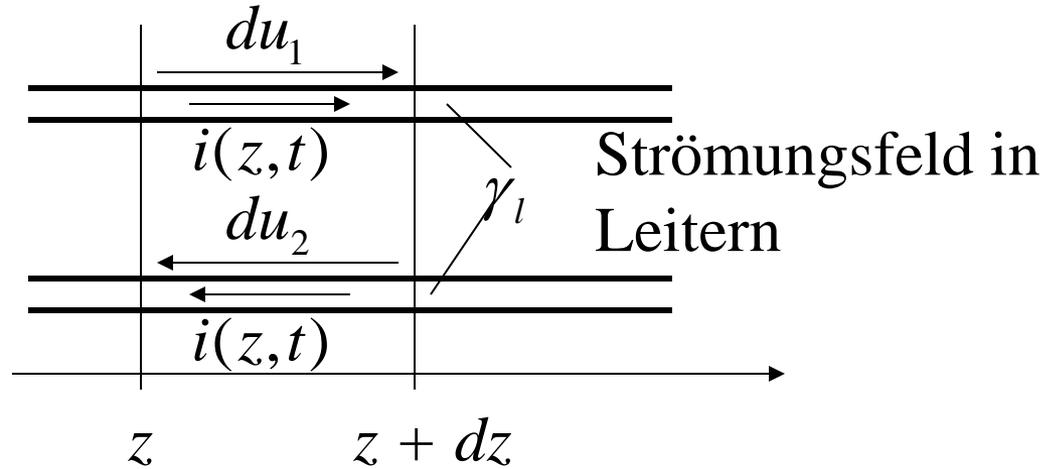
### 5.3.1 Verteilte Netzwerkparameter

Widerstand, Induktivität, Leitwert und Kapazität pro Längeneinheit:  $R'$ ,  $L'$ ,  $G'$ ,  $C'$ . Einheiten:  $\Omega/\text{m}$ ,  $\text{H}/\text{m}$ ,  $\text{S}/\text{m}$ ,  $\text{F}/\text{m}$ .

*Serielle Parameter:*

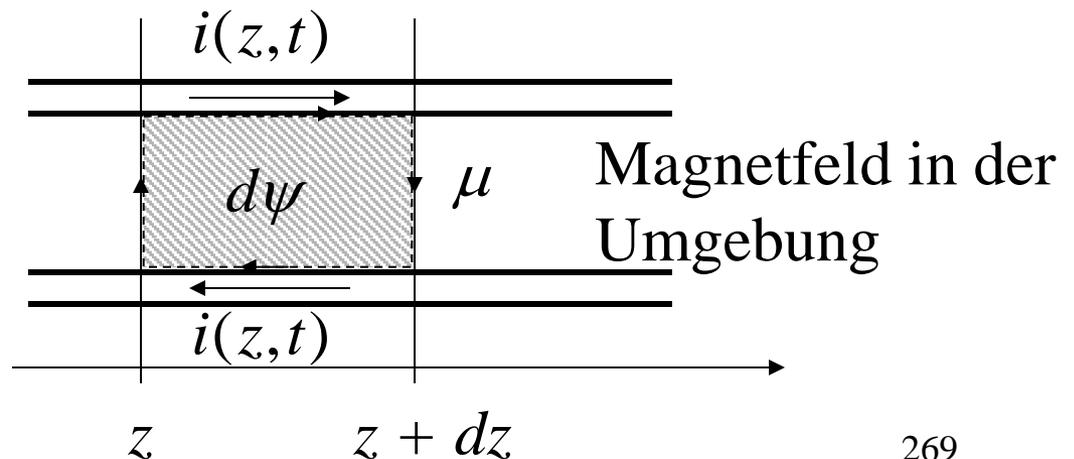
$$du = du_1 + du_2 = iR'dz,$$

$R'$  hängt von der Geometrie und von  $\gamma_l$  ab.



$$d\psi = iL'dz,$$

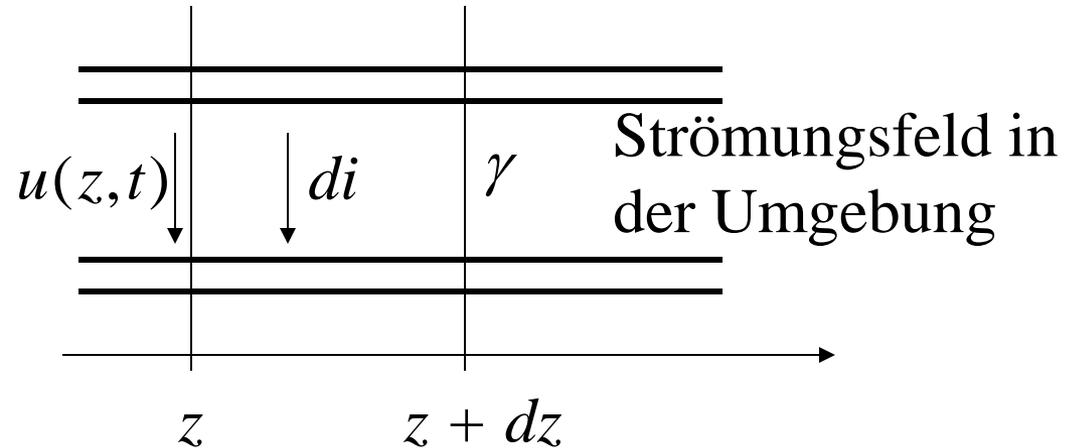
$L'$  hängt von der Geometrie und von  $\mu$  ab.



*Parallele Parameter:*

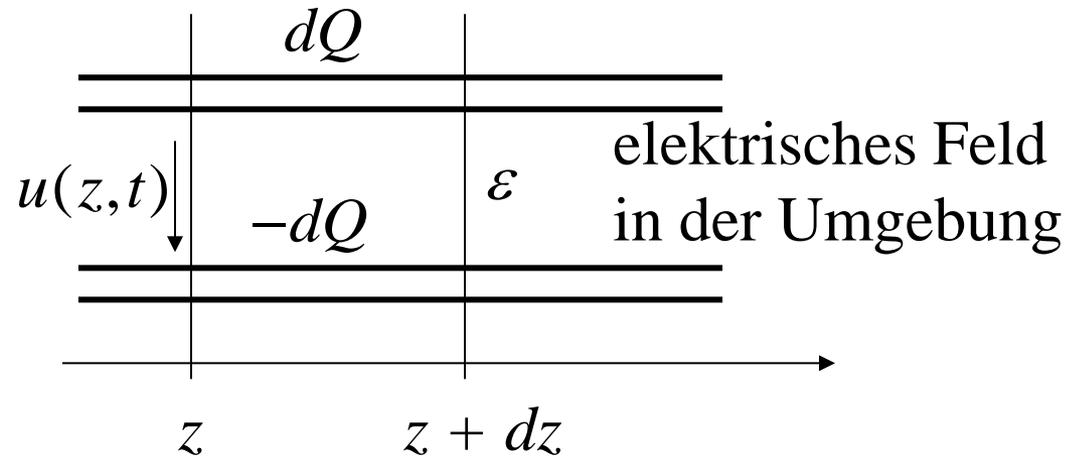
$$di = uG'dz,$$

$G'$  hängt von der  
Geometrie und von  $\gamma$  ab.

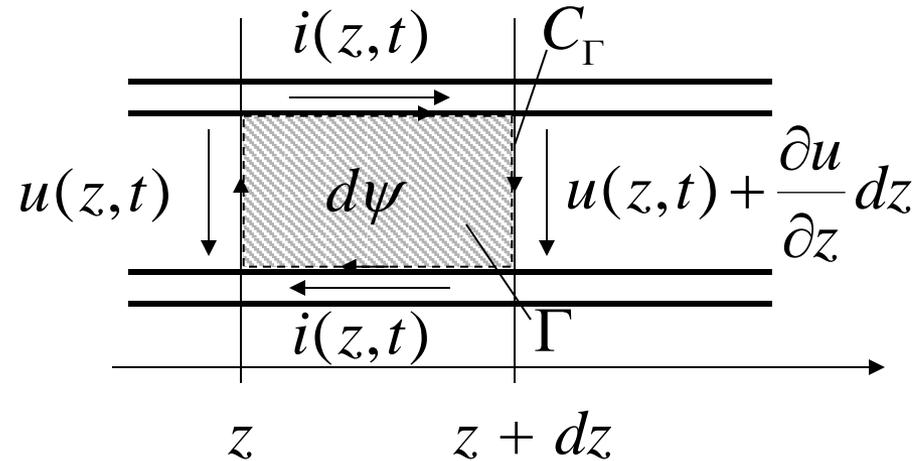


$$dQ = uC'dz,$$

$C'$  hängt von der  
Geometrie und von  $\varepsilon$  ab.



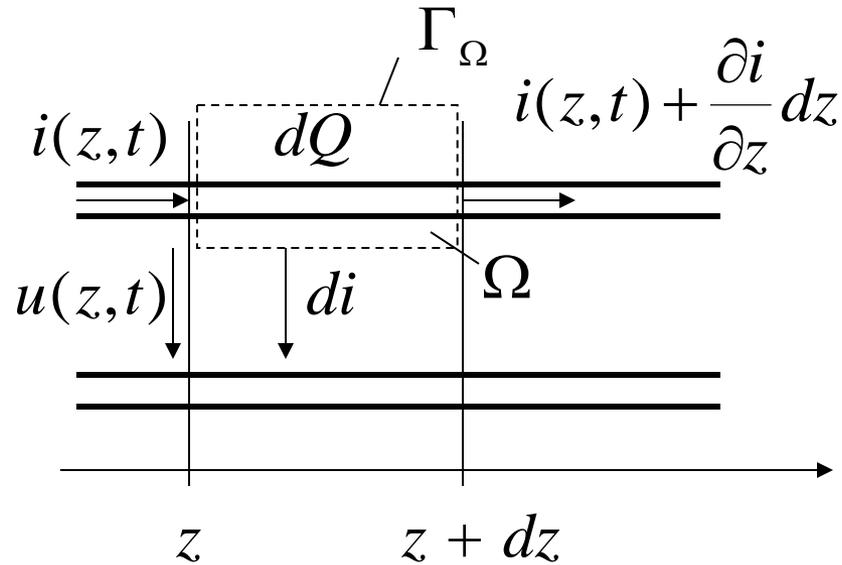
### 5.3.2 Die Leitungsgleichungen



Induktionsgesetz: 
$$\oint_{C_\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma,$$

$$u(z, t) + \frac{\partial u}{\partial z} dz - u(z, t) + iR' dz = -\frac{\partial}{\partial t} (iL') dz,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R'i + L' \frac{\partial i}{\partial t}.$$



Kontinuitätsgesetz: 
$$\oint_{\Gamma_{\Omega}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega,$$

$$i(z, t) + \frac{\partial i}{\partial z} dz - i(z, t) + uG'dz = -\frac{\partial}{\partial t} (uC') dz,$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G'u + C' \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Leitungsgleichungen:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R'i + L'\frac{\partial i}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G'u + C'\frac{\partial u}{\partial t}.$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R'\frac{\partial i}{\partial z} + L'\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = R'\frac{\partial i}{\partial z} + L'\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial i}{\partial z},$$

Telegraphengleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (R'C' + L'G')\frac{\partial u}{\partial t} + R'G'u.$$

Ähnlich für den Strom:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L'C'\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (R'C' + L'G')\frac{\partial i}{\partial t} + R'G'i.$$

### 5.3.3 Lösung der Leitungsgleichungen im Frequenzbereich

Annahme:  $u(z, t) = \hat{U}(z) \cos(\omega t + \varphi_u(z)),$

$$i(z, t) = \hat{I}(z) \cos(\omega t + \varphi_i(z)).$$

Komplexe Amplituden

(komplexe Scheitelwerte):  $U(z) = \hat{U}(z) e^{j\varphi_u(z)},$

$$I(z) = \hat{I}(z) e^{j\varphi_i(z)}.$$

Leitungsgleichungen im Frequenzbereich:

$$-\frac{dU(z)}{dz} = (R' + j\omega L')I(z),$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = (G' + j\omega C')U(z).$$

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} = -(R' + j\omega L') \frac{dI(z)}{dz} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')U(z).$$

$$p^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C'),$$

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} = p^2U(z).$$

$p = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$ : *Ausbreitungskoeffizient.*

$$p = \alpha + j\beta, \quad \alpha = \operatorname{Re}(p) \geq 0, \quad \beta = \operatorname{Im}(p) \geq 0.$$

$$U(z) = U^+ e^{-pz} + U^- e^{pz}.$$

$$I(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{dU(z)}{dz} = \frac{p}{R' + j\omega L'} U^+ e^{-pz} - \frac{p}{R' + j\omega L'} U^- e^{pz},$$

$$Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{p} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} : \text{ Wellenimpedanz.}$$

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-pz} - \frac{U^-}{Z_0} e^{pz}.$$

$$U^+(z) = U^+ e^{-pz} = U^+ e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

beschreibt eine sich in der positiven  $z$ -Richtung ausbreitende, gedämpfte Welle:

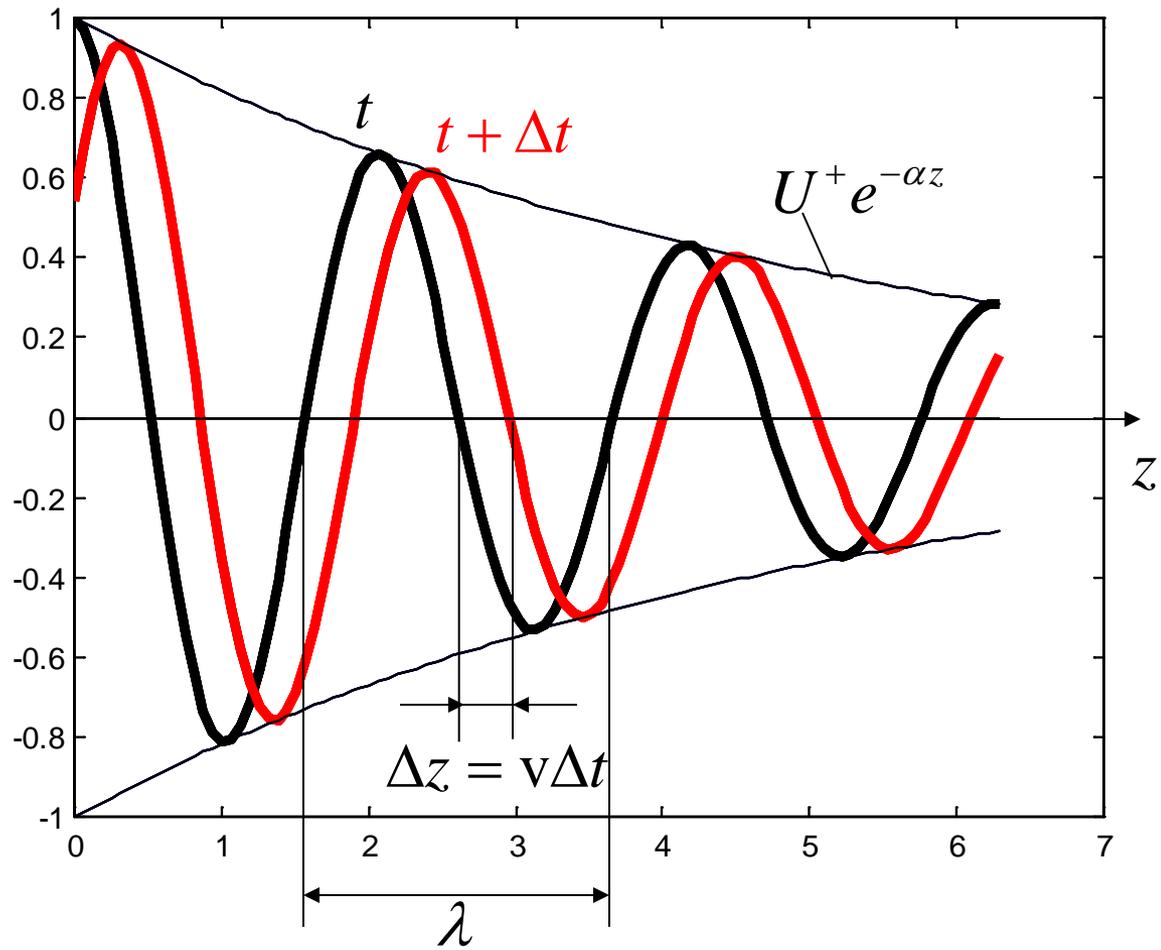
$$u^+(z, t) = U^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).$$

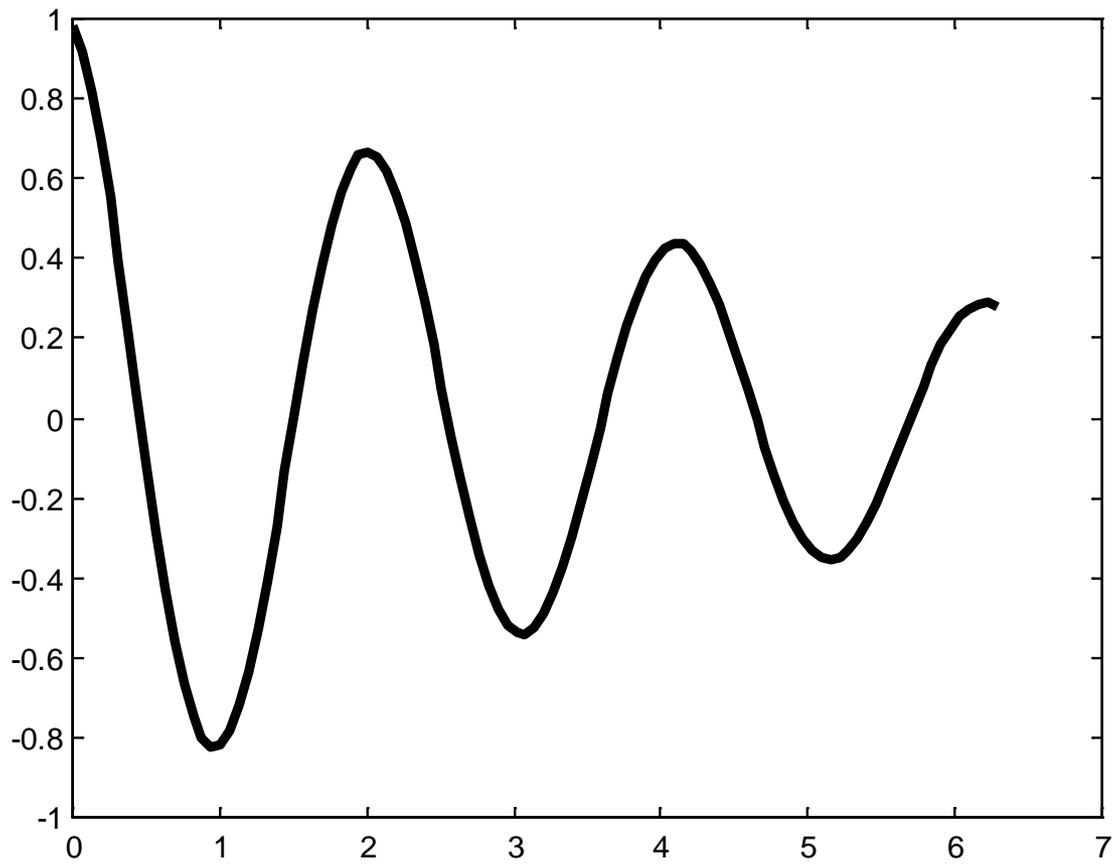
Die Phase der Spannung kann im Zeitpunkt  $t$  an der Stelle  $z$  gleich sein, wie im Zeitpunkt  $t + \Delta t$  an der Stelle  $z + \Delta z$ :

$$\omega t - \beta z = \omega(t + \Delta t) - \beta(z + \Delta z) \Rightarrow \omega \Delta t = \beta \Delta z.$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = v = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{Phasengeschwindigkeit.}$$

$$\text{Wellenlänge } \lambda: \quad \beta \lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$





Ähnlich beschreibt

$$U^-(z) = U^- e^{pz} = U^- e^{(\alpha + j\beta)z}$$

eine sich in der negativen  $z$ -Richtung ausbreitende, gedämpfte Welle:

$$u^-(z, t) = U^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z).$$

Bedingung für die gleiche Phase im Zeitpunkt  $t$  an der Stelle  $z$  und im Zeitpunkt  $t + \Delta t$  an der Stelle  $z + \Delta z$ :

$$\omega t + \beta z = \omega(t + \Delta t) + \beta(z + \Delta z) \Rightarrow \omega \Delta t = -\beta \Delta z, \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} = v = -\frac{\omega}{\beta}.$$

$\alpha$ : Dämpfungsfaktor,  $\beta$ : Phasenfaktor.

Allgemeine Lösung:  $U(z) = U^+ e^{-pz} + U^- e^{pz}$ ,

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-pz} - \frac{U^-}{Z_0} e^{pz}.$$

Die Wellenimpedanz  $Z_0$  ist das Verhältnis zwischen den komplexen Amplituden der sich in der positiven Richtung ausbreitenden Spannungs- und Stromwellen.

Für die sich in der negativen Richtung ausbreitenden Wellen ist dieses Verhältnis  $-Z_0$ .

### 5.3.4 Ideale Leitung

$$R' = 0, G' = 0.$$

$$p = \sqrt{(j\omega L')(j\omega C')} = j\omega\sqrt{L'C'} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{L'C'}.$$

Keine Dämpfung!

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}.$$

Die Wellenimpedanz ist reell!

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}. \quad \text{Im Allgemeinen gilt } L'C' = \mu\varepsilon.$$

$$\text{Im Vakuum: } v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = c : \text{ Lichtgeschwindigkeit!}$$

Ideale Leitung bei allgemeiner Zeitabhängigkeit:

Leitungsgleichungen:  $-\frac{\partial u}{\partial z} = L' \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = C' \frac{\partial u}{\partial t}.$

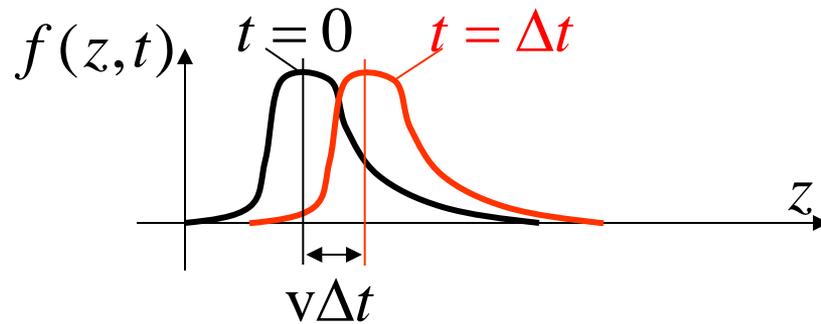
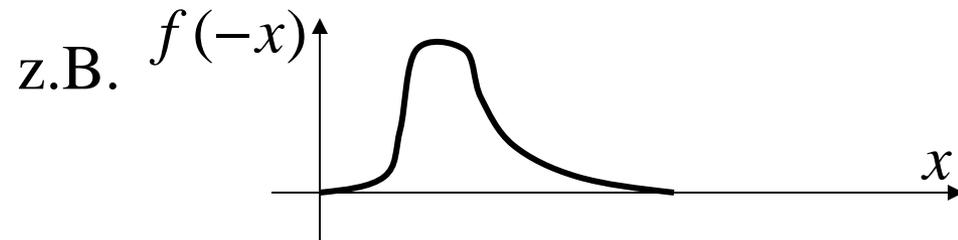
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}: \text{skalare 1D Wellengleichung.}$$

Alle Funktionen der Form  $f(z, t) = f\left(t \mp \frac{z}{v}\right)$  sind Lösungen der 1D Wellengleichung ( $v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ ):

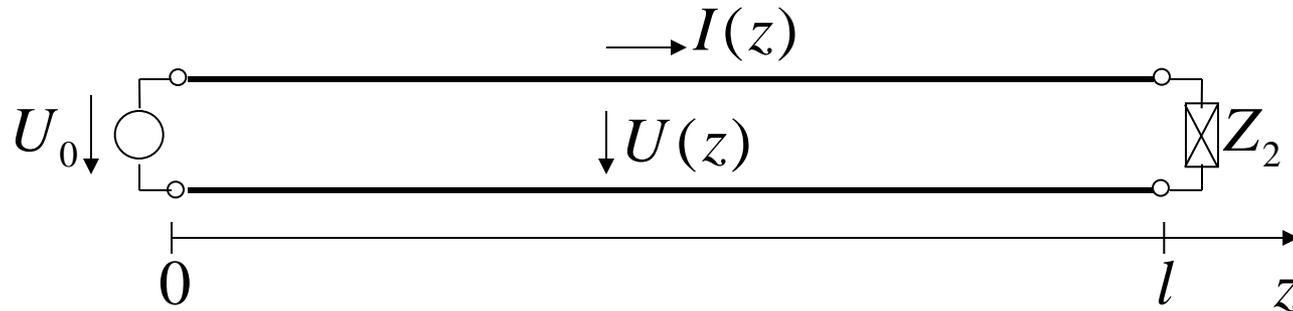
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} f''\left(t \mp \frac{z}{v}\right), \quad L'C' \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = L'C' f''\left(t \mp \frac{z}{v}\right) = \frac{1}{v^2} f''\left(t \mp \frac{z}{v}\right).$$

**q. e. d.**

$f\left(t - \frac{z}{v}\right)$  beschreibt eine sich in der positiven  $z$ -Richtung mit einer Geschwindigkeit  $v$  ausbreitende Welle:



### 5.3.5 Abschluss von Leitungen



$$U(0) = U_0, \quad U(l) = Z_2 I(l).$$

$$U(l) = U^+ e^{-pl} + U^- e^{pl}, \quad I(l) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-pl} - \frac{U^-}{Z_0} e^{pl}.$$

$$Z_2 = Z_0 \frac{U^+ e^{-pl} + U^- e^{pl}}{U^+ e^{-pl} - U^- e^{pl}} = Z_0 \frac{1 + \frac{U^- e^{pl}}{U^+ e^{-pl}}}{1 - \frac{U^- e^{pl}}{U^+ e^{-pl}}}.$$

$$r_2 = \frac{U^- e^{pl}}{U^+ e^{-pl}} = \frac{U^-}{U^+} e^{2pl} : \text{Reflexionskoeffizient.}$$

$$Z_2 = Z_0 \frac{1+r_2}{1-r_2}, \quad r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}.$$

$$U(z) = U^+ e^{-pl} (e^{p(l-z)} + r_2 e^{-p(l-z)}),$$

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-pl} (e^{p(l-z)} - r_2 e^{-p(l-z)}).$$

einfallende Wellen

reflektierte Wellen

Am Anfang der Leitung:  $U(0) = U_0 = U^+ (1 + r_2 e^{-2pl})$ ,

$$U^+ = \frac{U_0}{1 + r_2 e^{-2pl}}, \quad U^- = U^+ r_2 e^{-2pl}. \quad r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}.$$

*Anpassung:*

Wenn  $Z_2 = Z_0 : r_2 = 0$ . Keine Reflexion:

$$U(z) = U^+ e^{-pz}, \quad I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-pz}. \quad \frac{U(z)}{I(z)} = Z_0.$$

*Kurzschluss:*

Wenn  $Z_2 = 0 : r_2 = -1$ .

Mit der Bezeichnung  $x = l - z$ :

$$U(x) = U^+ e^{-pl} (e^{px} - e^{-px}), \quad I(x) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-pl} (e^{px} + e^{-px}).$$

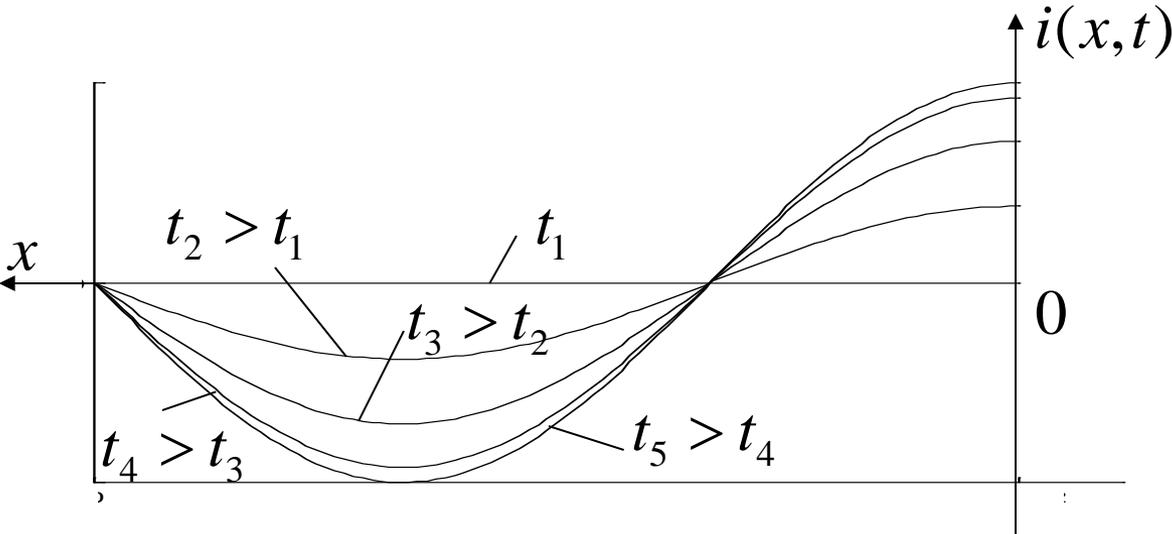
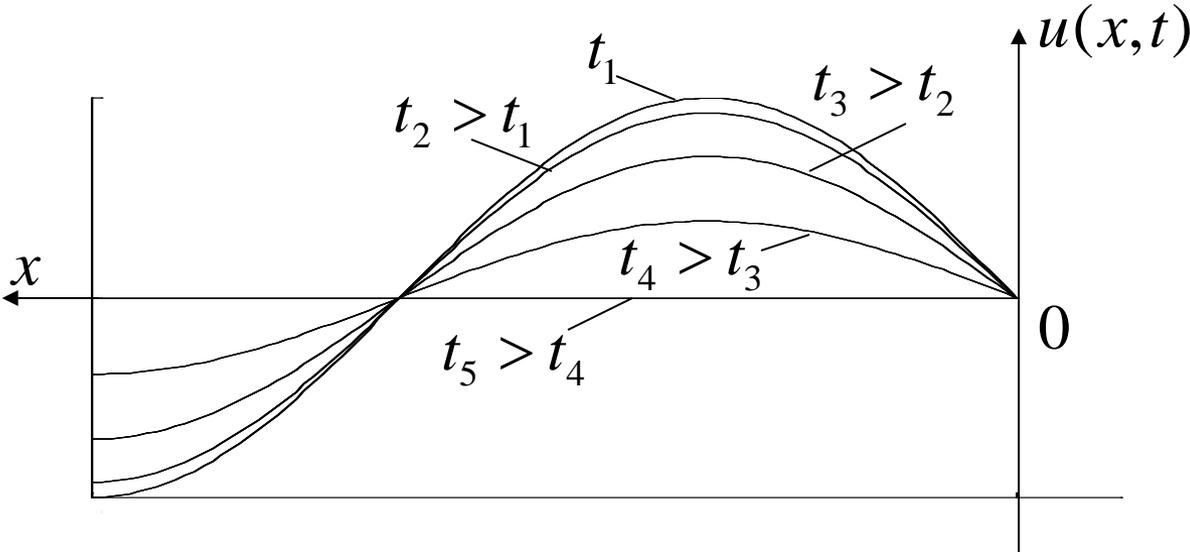
Spezialfall: ideale Leitung ( $\alpha = 0, p = j\beta$ )

$$U(x) = U^+ e^{-j\beta l} (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) = 2jU^+ e^{-j\beta l} \sin \beta x,$$

$$I(x) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-j\beta l} (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) = 2 \frac{U^+}{Z_0} e^{-j\beta l} \cos \beta x.$$

**Stehende Wellen.**

# Spannung und Strom beim Kurzschluss.



*Leerlauf:*

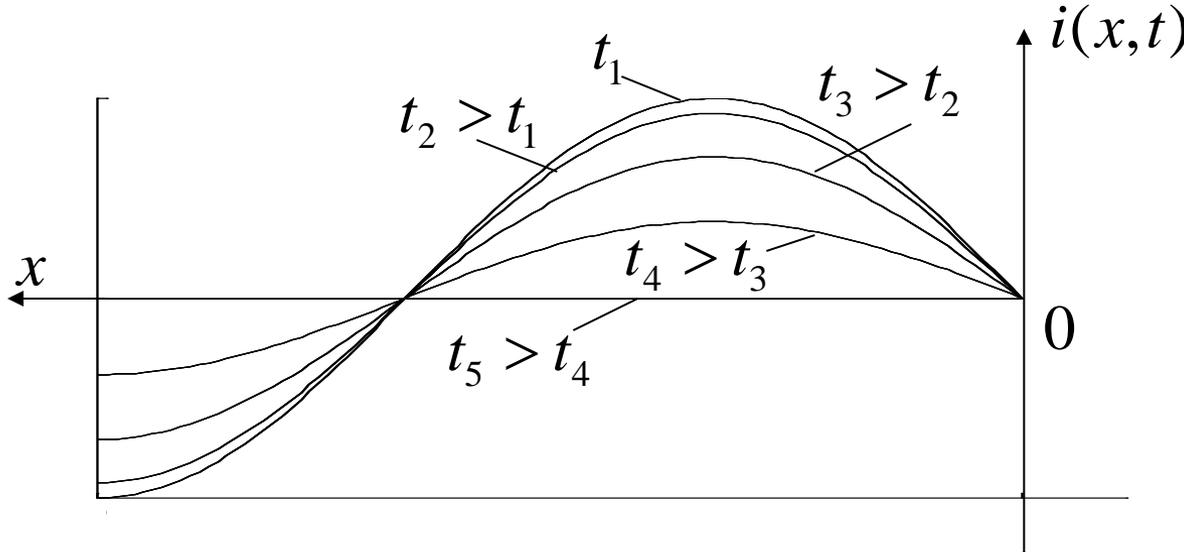
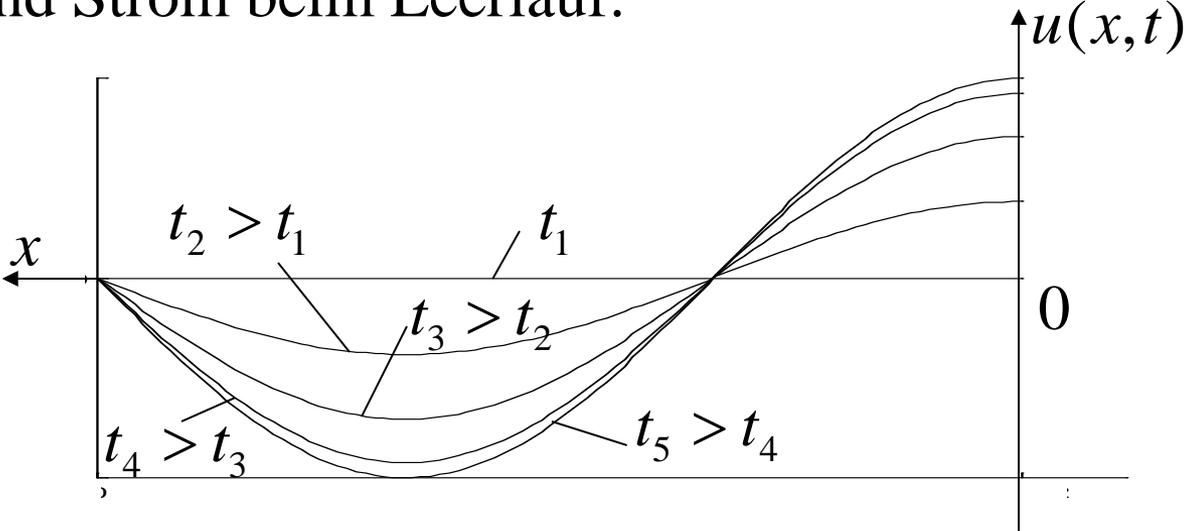
Wenn  $Z_2 \rightarrow \infty : r_2 = 1$ .

Für ideale Leitungen:

$$U(x) = U^+ e^{-j\beta l} (e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) = 2U^+ e^{-j\beta l} \cos \beta x,$$

$$I(x) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-j\beta l} (e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) = 2j \frac{U^+}{Z_0} e^{-j\beta l} \sin \beta x.$$

# Spannung und Strom beim Leerlauf:

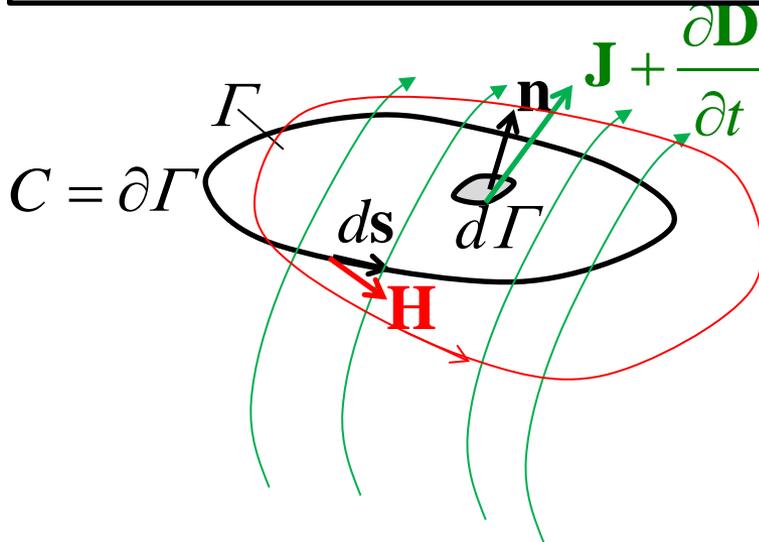


# 6. Die Maxwell'schen Gleichungen

## 6.1 Die integrale Form der Maxwell'schen Gleichungen

*Die 1. Maxwell'sche Gleichung*

$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$



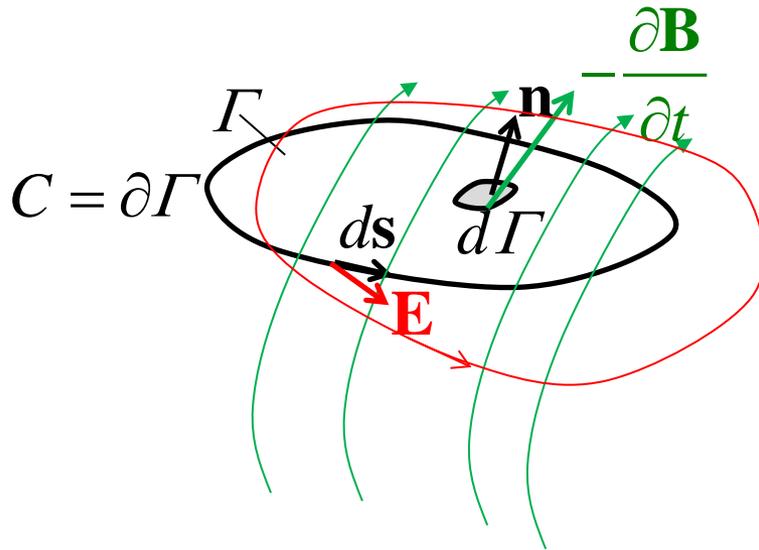
für alle Flächen  $\Gamma$

Der Ampere'sche Durchflutungssatz mit der Maxwell'schen Ergänzung: *die Wirbel der magnetischen Erregung sind die Leitungs- und Verschiebungsströme*

## Die 2. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

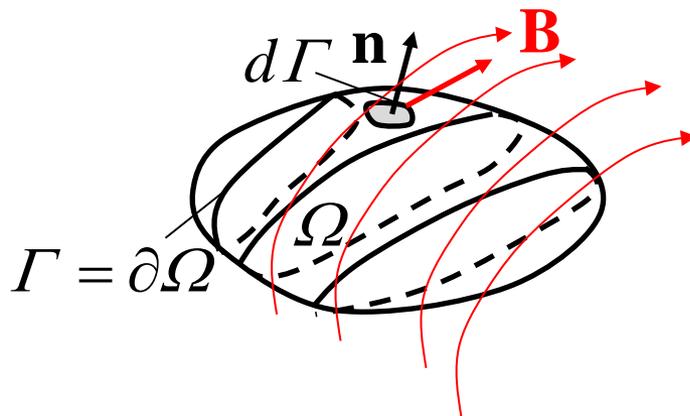
für alle Flächen  $\Gamma$



Das Faraday'sche Induktionsgesetz: *der Wirbel der elektrischen Feldstärke ist die zeitliche Ableitung des magnetischen Flusses*

### Die 3. Maxwell'sche Gleichung

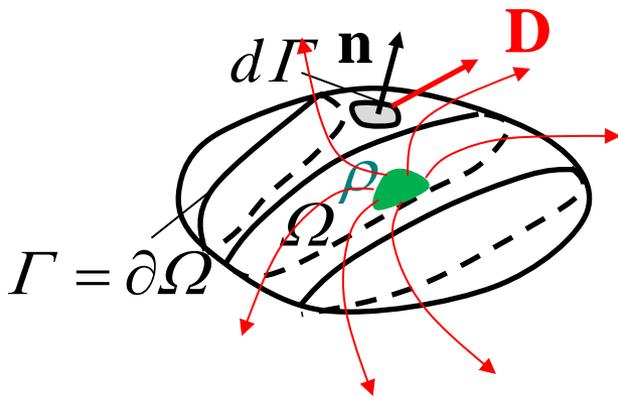
$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \text{ für alle Volumen } \Omega$$



*Quellenfreiheit der  
magnetischen Flussdichte*

## Die 4. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad \text{für alle Volumen } \Omega$$



Gauß'scher Satz: *Die Quellen der elektrischen Flussdichte sind die Ladungen*

## 6.2 Vektoranalysis

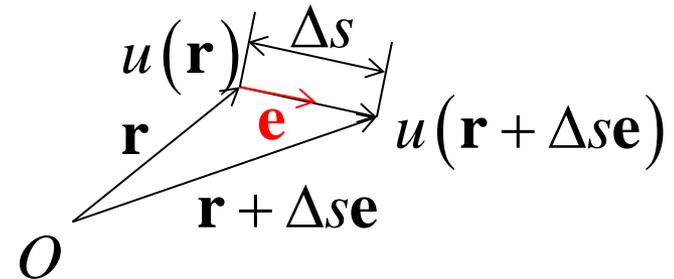
Die integralen Maxwell'schen Gleichungen gelten für beliebige Flächen, bzw. Volumen. Mit Hilfe der Vektoranalysis können Sie als Beziehungen für die Feldgrößen in beliebigen Punkten als (partielle) Differentialgleichungen geschrieben werden.

## 6.2.1 Gradient eines Skalarfeldes

Die Änderung einer Skalar-Vektorfunktion  $u(\mathbf{r})$  (Ortsvektor  $\mathbf{r}$  als unabhängige Variable) wird durch eine Vektorfunktion, den *Gradienten*:  $\boxed{\text{gradu}(\mathbf{r})}$  beschrieben.

In einer beliebigen Richtung (Einheitsvektor  $\mathbf{e}$ ), beschreibt der Differentialquotient

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{e}) - u(\mathbf{r})}{\Delta s}$$



die Änderung von  $u$ . Für den Gradienten gilt:

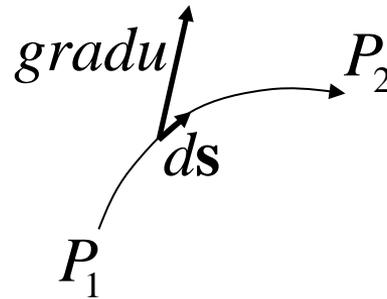
$$\mathbf{e} \cdot \text{gradu}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{e}) - u(\mathbf{r})}{\Delta s}$$

Die Richtung des Gradienten ist die Richtung der schnellsten Änderung von  $u$ .

Der Gradient ist senkrecht auf die Flächen  $u = \text{konst.}$

Das Linienintegral des Gradienten hängt nur von den Werten der Funktion  $u$  im Anfangs- und Endpunkt der Linie ab:

$$\int_{P_1}^{P_2} \text{gradu} \cdot ds = u(P_2) - u(P_1)$$



Daher:

$$\oint_C \text{gradu} \cdot ds = 0 \text{ für alle geschlossenen Linien}$$

*Beispiel:*

Die elektrostatische Feldstärke  $\mathbf{E}$  hat die Eigenschaften:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ und } \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V(P_1) - V(P_2)$$

Es gilt daher:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V \quad \text{falls} \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

## 6.2.2 Divergenz eines Vektorfeldes, der Gauß'sche Integralsatz

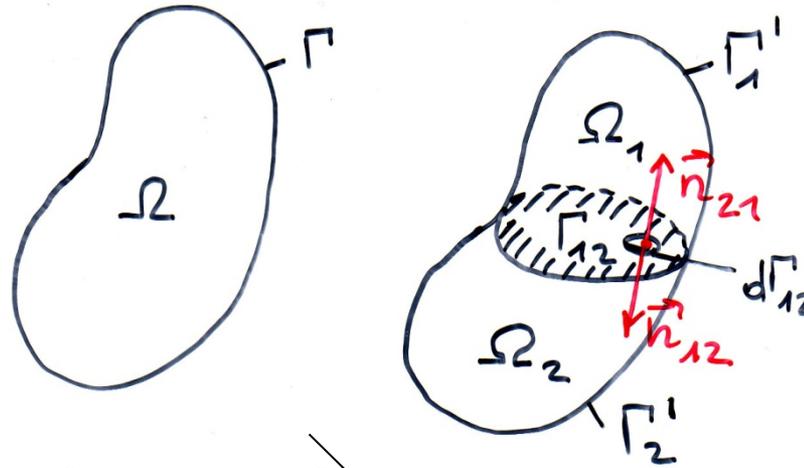
Die Quellen einer Vektor-Vektorfunktion  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  (Ortsvektor  $\mathbf{r}$  als unabhängige Variable) werden durch eine Skalarfunktion, die *Divergenz*  $\boxed{\text{div}\mathbf{v}(\mathbf{r})}$  beschrieben. Für die Divergenz gilt in einem Punkt  $\mathbf{r}$ :

$$\text{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{\Omega \rightarrow 0 \\ \mathbf{r} \in \Omega}} \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\Gamma = \partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Der Fluss von  $\mathbf{v}$  durch die Randfläche  $\Gamma$  eines Volumens  $\Omega$ :

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Zerlegt man  $\Omega$  in zwei Teilgebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ :



$$\Gamma = \Gamma'_1 + \Gamma'_2$$

$$\Gamma_1 = \Gamma'_1 + \Gamma_{12}$$

$$\Gamma_2 = \Gamma'_2 + \Gamma_{12}$$

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot d\Gamma + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma'_1} \mathbf{v} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{12} d\Gamma + \int_{\Gamma'_2} \mathbf{v} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_{12}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{21} d\Gamma$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\Gamma = \oint_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot d\Gamma + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot d\Gamma$$

Für eine  $N$ -fache Unterteilung des Volumens  $\Omega$  gilt:

$$\sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Gamma}_i = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Gamma}$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \sum_{i=1}^N \underbrace{|\Omega_i|}_{\rightarrow \int d\Omega} \underbrace{\frac{\oint_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Gamma}}{|\Omega_i|}}_{\rightarrow \text{div}\mathbf{v}}$$

Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$ :  $\sum_{i=1}^N |\Omega_i| \rightarrow \int_{\Omega} d\Omega$  und  $\frac{\oint_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Gamma}}{|\Omega_i|} \rightarrow \text{div}\mathbf{v}$

Damit ergibt sich der Gauß'sche Integralsatz:

$$\boxed{\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Gamma} = \int_{\Omega} \text{div}\mathbf{v} d\Omega \quad \text{für alle Volumen } \Omega}$$

*Beispiel:*

Die elektrische Flussdichte hat die Eigenschaft:

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega \text{ für alle Volumen } \Omega$$

Aus dem Gauß'schen Satz folgt:

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{D} d\Omega \text{ und daher}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{D} d\Omega = \int_{\Omega} \rho d\Omega \text{ für alle Volumen } \Omega$$

Es gilt daher:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$$

### 6.2.3 Rotation eines Vektorfeldes, der Stokes'sche Satz

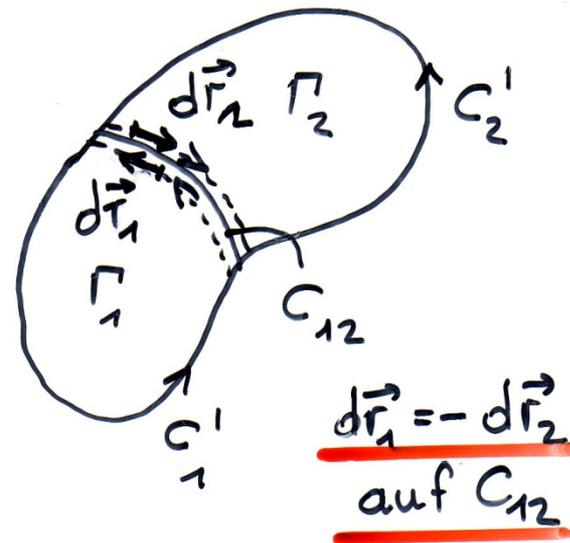
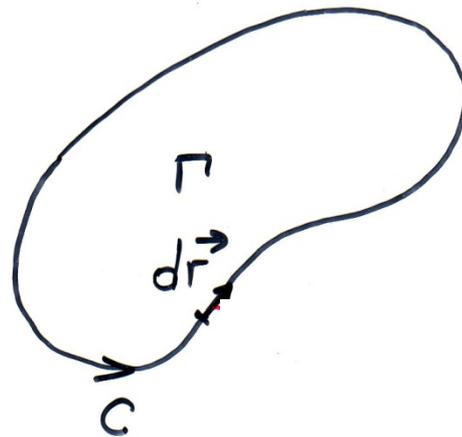
Die Wirbel einer Vektor-Vektorfunktion  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  (Ortsvektor  $\mathbf{r}$  als unabhängige Variable) werden durch eine Vektorfunktion, die *Rotation*  $\boxed{\text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})}$  beschrieben. Für die Rotation in einer Richtung (Einheitsvektor  $\mathbf{e}$ ) gilt in einem Punkt  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{e}$  ist der Normalvektor der Fläche  $\Gamma$  in diesem Punkt):

$$\mathbf{e} \cdot \text{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{\Gamma \rightarrow 0 \\ \mathbf{r} \in \Gamma}} \frac{1}{|\Gamma|} \oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

Das Linienintegral von  $\mathbf{v}$  über einen geschlossenen Weg

(Randkurve  $C$  einer Fläche  $\Gamma$ ):  $\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$

Zerlegt man  $\Gamma$  in zwei Teilflächen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ :



$$C = C'_1 + C'_2$$

$$C_1 = C'_1 + C_{12} ; \quad C_2 = C'_2 + C_{12}$$

$$\oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_1 + \oint_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_2 = \int_{C'_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{C_{12}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{C'_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{C_{12}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_2 = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

*(Note: In the original image, the terms  $\int_{C_{12}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_1$  and  $\int_{C_{12}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_2$  are crossed out with a diagonal line, and the term  $\int_{C_{12}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}_2$  is replaced by  $\int_{C_{12}} \mathbf{v} \cdot (-d\mathbf{r}_1)$  to show cancellation.)*

Für eine  $N$ -fache Unterteilung der Fläche  $\Gamma$  gilt:

$$\sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}_i = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \underbrace{|\Gamma_i|}_{\rightarrow \int d\Gamma} \frac{\oint_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}}{\underbrace{|\Gamma_i|}_{\rightarrow \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v}}}$$

Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$ :  $\sum_{i=1}^N |\Gamma_i| \rightarrow \int_{\Gamma} d\Gamma$  und  $\frac{\oint_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}}{|\Gamma_i|} \rightarrow \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v}$

Damit ergibt sich der Stokes'sche Satz:

$$\boxed{\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{für alle Flächen } \Gamma}$$

*Beispiel:*

Die elektrostatische Feldstärke hat die Eigenschaft:

$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ für alle Flächen } \Gamma$$

Aus dem Stokes'schen Satz folgt:

$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \text{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \text{ und daher}$$

$$\int_{\Gamma} \text{rot}\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \text{ für alle Flächen } \Gamma$$

Es gilt daher:  $\text{rot}\mathbf{E} = 0$  falls  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Die Aussage  $\mathbf{E} = -\text{grad}V$  falls  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  ist äquivalent:

$$\text{rotgrad}u = 0 \text{ für alle Skalarfunktionen } u$$

## 6.2.4 Gradient, Divergenz und Rotation in orthogonalen Koordinatensystemen, der Nabla-Operator

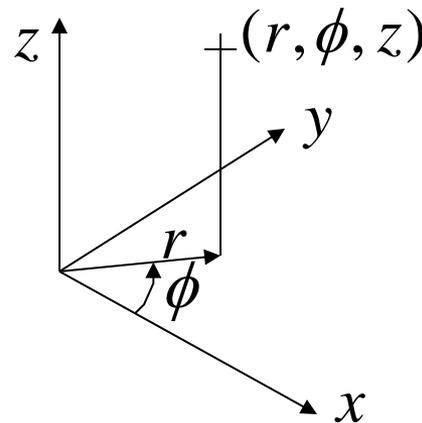
Allgemeine orthogonale Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$

Kartesische Koordinaten:  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ .

Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = r, x_2 = \phi, x_3 = z.$$

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$$

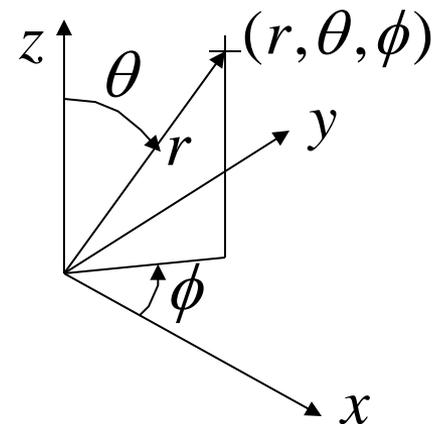


Kugelkoordinaten:

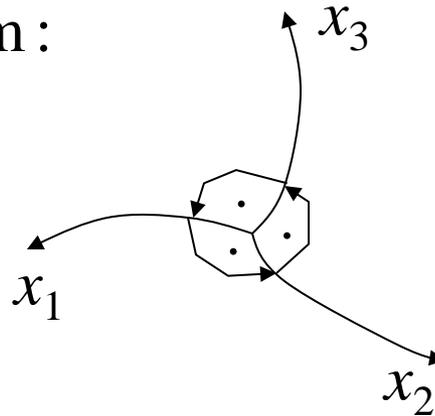
$$x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \phi.$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta$$



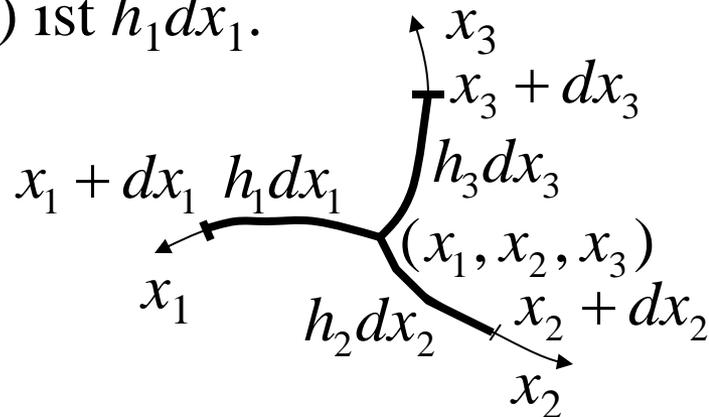
$x_1, x_2, x_3$  bilden ein Rechtssystem :



Im Allgemeinen bedeuten  $x_1$ ,  
 $x_2$  und  $x_3$  keine Längen.

Der differenzielle Abstand  $ds_1$  zwischen den Punkten  
 $(x_1, x_2, x_3)$  und  $(x_1+dx_1, x_2, x_3)$  ist  $h_1 dx_1$ .

Allgemein:  $ds_i = h_i dx_i$



$h_1, h_2, h_3$ : metrische Koeffizienten
--

*Metrische Koeffizienten in verschiedenen Koordinatensystemen:*

Kartesisches Koordinatensystem:  $ds_1 = dx, ds_2 = dy, ds_3 = dz,$

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

$$h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1.$$

Zylinderkoordinatensystem:

$$ds_1 = dr, ds_2 = rd\phi, ds_3 = dz,$$

$$x_1 = r, x_2 = \phi, x_3 = z$$

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1.$$

Kugelkoordinatensystem:

$$ds_1 = dr, ds_2 = rd\theta, ds_3 = r \sin \theta d\phi,$$

$$x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \phi$$

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta.$$

*Gradient im allgemeinen, orthogonalen Koordinatensystem:*

$u(x_1, x_2, x_3)$  sei eine Skalarfunktion.

$$(\text{gradu})_1 = \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - u(x_1, x_2, x_3)}{\Delta s_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$\text{gradu}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$$

$$\text{gradu}(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\text{gradu}(r, \phi, z) = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\text{gradu}(r, \theta, \phi) = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

*Divergenz im allgemeinen, orthogonalen Koordinatensystem:*

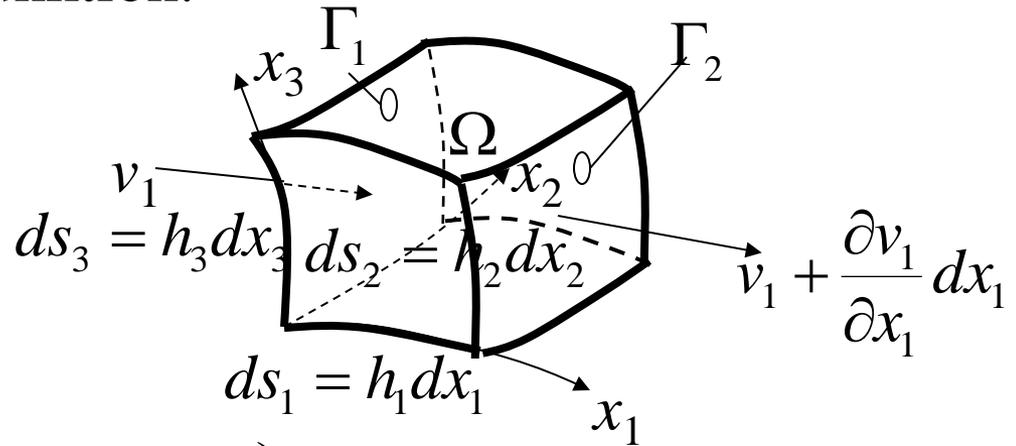
$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$  sei eine Vektorfunktion.

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -v_1 h_2 h_3 dx_2 dx_3$$

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \left( v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 \right) \left( h_2 h_3 + \frac{\partial h_2 h_3}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 =$$

$$= v_1 h_2 h_3 dx_2 dx_3 + \frac{\partial (v_1 h_2 h_3)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \cancel{O(dx_1 dx_1 dx_2 dx_3)}$$



$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \left[ \frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(v_2 h_1 h_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

$$|\Omega| = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (v_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (v_3 h_1 h_2) \right]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(x, y, z) = \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(r, \phi, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

*Rotation im allgemeinen, orthogonalen Koordinatensystem:*

$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$  sei eine Vektorfunktion.

$$(\text{rot } \mathbf{v})_1 = \lim_{\Gamma_1 \rightarrow 0} \frac{1}{|\Gamma_1|} \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

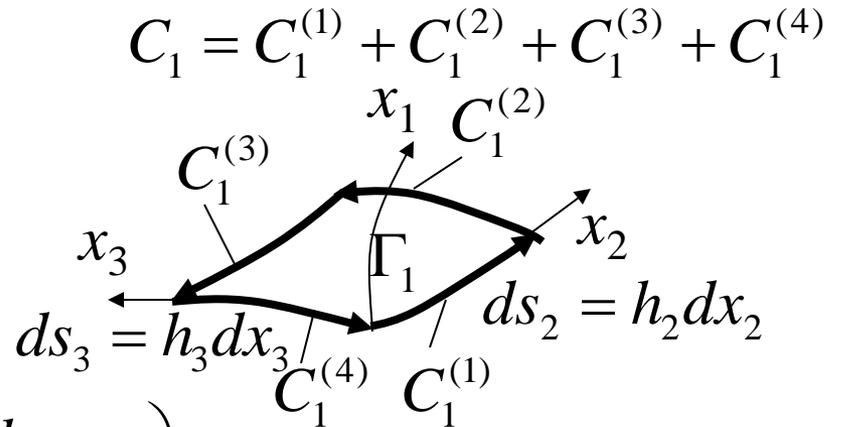
$$\int_{C_1^{(1)}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = v_2 h_2 dx_2$$

$$\int_{C_1^{(3)}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \left( v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \left( h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_2 =$$

$$= -v_2 h_2 dx_2 - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial x_3} dx_2 dx_3 + O(dx_2 dx_3 dx_3)$$

$$\int_{C_1^{(1)} + C_1^{(3)}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial x_3} dx_2 dx_3$$

$$\int_{C_1^{(2)} + C_1^{(4)}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial x_2} dx_2 dx_3$$



$$\oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial x_2} dx_2 dx_3 - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial x_3} dx_2 dx_3 \quad |\Gamma_1| = ds_2 ds_3 = h_2 h_3 dx_2 dx_3$$

$$(\text{rot} \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3))_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (v_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (v_2 h_2) \right]$$

$$\text{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \mathbf{e}_1 & \frac{1}{h_3 h_1} \mathbf{e}_2 & \frac{1}{h_1 h_2} \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}$$

z. B.: Kartesische Koordinaten:

$$\text{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Der Nabla-Operator ( $\nabla$ -Operator) :

In kartesischen Koordinaten:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Gradient, Divergenz und Rotation mit  $\nabla$  :

$$\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z = \textit{gradu}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \textit{div} \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathit{rot} \mathbf{v}$$

Produktregeln:

$$\begin{aligned} \mathit{grad}(uv) &= \nabla(uv) = \nabla(u_c v) + \nabla(uv_c) = u\nabla v + v\nabla u = \\ &= u\mathit{grad}v + v\mathit{grad}u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{div}(u\mathbf{v}) &= \nabla \cdot (u\mathbf{v}) = \nabla \cdot (u_c \mathbf{v}) + \nabla \cdot (u\mathbf{v}_c) = u\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla u = \\ &= u\mathit{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathit{grad}u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{rot}(u\mathbf{v}) &= \nabla \times (u\mathbf{v}) = \nabla \times (u_c \mathbf{v}) + \nabla \times (u\mathbf{v}_c) = u\nabla \times \mathbf{v} + \nabla u \times \mathbf{v} = \\ &= u\mathit{rot} \mathbf{v} + \mathit{grad}u \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

*Beispiel: Beweis der Äquivalenz der zwei Ausdrücke für die elektrische Energie:*

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} \rho V d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\Omega$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{VD}) = V \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{grad} V \cdot \mathbf{D} = V \rho - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho V d\Omega = \int_{\Omega_\rho} \rho V d\Omega = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\Omega + \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(\mathbf{VD}) d\Omega$$

$$\text{Gauß'scher Satz: } \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}(\mathbf{VD}) d\Omega = \oint_{\partial \mathbb{R}^3} \mathbf{VD} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma \rightarrow \infty} \mathbf{VD} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Das Potential jeder im Endlichen liegenden Ladungsverteilung geht im Unendlichen mit  $1/r$  gegen Null, während die elektrische Flussdichte mit  $1/r^2$  gegen Null geht.

Daher geht das Produkt  $V\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}$  mit  $1/r^3$  gegen Null, die Integrationsoberfläche aber nur mit  $r^2$  gegen unendlich. Damit gilt:

$$\oint_{\Gamma \rightarrow \infty} V\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}d\Gamma = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho V d\Omega = \int_{\Omega_\rho} \rho V d\Omega = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}d\Omega$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} \rho V d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}d\Omega$$

**q. e. d.**

## 6.3 Die differentielle Form der Maxwell'schen Gleichungen

*Die 1. Maxwell'sche Gleichung*

$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{für alle Flächen } \Gamma$$

Stokes'scher Satz: 
$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \text{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Daher: 
$$\int_{\Gamma} \text{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Da dies für beliebige Flächen gilt:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

## Die 2. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{für alle Flächen } \Gamma$$

Stokes'scher Satz: 
$$\oint_{C=\partial\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Daher: 
$$\int_{\Gamma} \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} d\Gamma$$

Da dies für beliebige Flächen gilt:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

### Die 3. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \text{ für alle Volumen } \Omega$$

Gauß'scher Satz: 
$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{B} d\Omega$$

Daher: 
$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{B} d\Omega = 0$$

Da dies für beliebige Volumen gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

## Die 4. Maxwell'sche Gleichung

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega \text{ für alle Volumen } \Omega$$

Gauß'scher Satz: 
$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{D} d\Omega$$

Daher: 
$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{D} d\Omega = \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

Da dies für beliebige Volumen gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

Zusammenfassung:

$$I. \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$II. \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$III. \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$IV. \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}.$$

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \left( = \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right),$$

$$p = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma}. \quad W = \int_{\Omega} w d\Omega, \quad P = \int_{\Omega} p d\Omega.$$