

**Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung  
Grundlagen der Elektrotechnik (ET)  
Teil 1 437.207 VO 1,5 SSt.**

Renhart Werner

3. Oktober 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das elektrische Feld</b>	<b>1</b>
1.1	Die elektrische Ladung . . . . .	1
1.2	Wirkung elektrischer Ladungen . . . . .	2
1.3	Arbeit, Potential und Spannung . . . . .	4
1.4	Materie im elektrischen Feld . . . . .	7
1.5	Energie im elektrostatischen Feld . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Gleichförmig bewegte Ladungen</b>	<b>17</b>
2.1	Der elektrische Strom . . . . .	17
2.2	Das Ohmsche Gesetz . . . . .	20
2.3	Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes . . . . .	24
2.4	Analogie zwischen elektrostatischem Feld und Strömungsfeld . . . . .	25
2.5	Die Leistung im stationären Strömungsfeld . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Gleichstromschaltungen</b>	<b>28</b>
3.1	Der einfache elektrische Stromkreis . . . . .	28
3.2	Zweipole . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Analyse linearer Gleichstromnetzwerke</b>	<b>44</b>
4.1	Äquivalenz von Quellen . . . . .	45
4.2	Zusammenschaltung von Quellen . . . . .	45
4.3	Ersatzquellenverfahren . . . . .	47
4.4	Überlagerungsprinzip, Superpositionsprinzip . . . . .	48
4.5	Das elektrische Netzwerk als Graph . . . . .	49
4.6	Die Zweigstromanalyse . . . . .	52
4.7	Das Knotenspannungsverfahren . . . . .	54
4.8	Maschenstromverfahren . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Ungleichförmig bewegte Ladungen</b>	<b>61</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	61
5.2	Periodische Wechselgrößen . . . . .	61
5.3	Kennwerte sinusförmiger Größen . . . . .	62
5.4	Darstellungsformen zeitharmonischer Wechselgrößen . . . . .	66

# 1 Das elektrische Feld

## 1.1 Die elektrische Ladung

Lange Zeit galten Atome als die kleinsten, nicht weiter teilbaren Bausteine der Materie (atomos heißt unteilbar). Die Griechen Leukipp und Demokrit beschrieben dies schon etwa 500 vor Christus in ihren Schulen. Sie machten Beobachtungen über Anziehungen von einem Stück Fell, welches mit Bernstein (griechisch: elektron) in Berührung kam. Damit haben sie den Begriff Elektrizität geprägt. Erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts erkannten die Physiker, daß das Atom nicht unteilbar ist (Rutherford, 1871-1937). Das Atom besteht nunmehr aus einem Atomkern um den in bestimmten Abständen Elektronen kreisen. Der Atomkern besteht aus Neutronen und Protonen. Die Wirkung eines Atoms nach außen hin ist neutral. Entzieht man einem Atom beispielsweise ein Elektron, so kann eine Wirkung beobachtet werden, die man als elektrisch bezeichnet. Aus einer Vielzahl von in der Natur vorkommenden Kraftfeldern (z.B. Gravitationsfeld) befaßt sich die Elektrotechnik intensiv mit einem Kraftfeld, welches als elektrisches Feld bezeichnet wird. Ein Körper im elektrischen Feld reagiert zufolge einer elektrischen Ladung. Die elektrische Ladung  $Q$  beschreibt den elektrischen Zustand eines Körpers. Sie hat die aus den SI-Einheiten abgeleitete Einheit [As] oder auch Coulomb [C] genannt und wird in einem Vielfachen der sogenannten Elementarladung  $e$  ausgedrückt.

$$\text{Elementarladung } e = 1,602189210^{-19}C$$

Es ist dies eine Naturkonstante. Es gibt nun Körper, die per Definition positiv geladen sind und solche die negative Ladung aufweisen. Beispielsweise gilt :

ein Elektron ist negativ geladen, d.h.  $Q = -e$

ein Proton ist positiv geladen, d.h.  $Q = e$

ein Neutron ist ungeladen, d.h.  $Q = 0$

Der willkürlichen Definition der Vorzeichen liegt zugrunde, daß ein Elektronenüberschuß mit minus, ein Elektronenmangel mit plus bezeichnet wird.

## 1.2 Wirkung elektrischer Ladungen

Man erkannte aus zahlreichen Versuchen (z.B. Bernsteinversuch der Griechen), daß elektrisch geladene Körper aufeinander eine Kraft ausüben. Charles Augustin Coulomb (1736-1806, französischer Ingenieur und Physiker) gelang es, für diese Kraftwirkung eine, dem Gravitationsgesetz ähnliche Gesetzmäßigkeit aufzustellen(1785):

Zwei Körper wirken entlang ihrer Verbindungslinie mit einer Kraft, die proportional dem Produkt ihrer elektrischen Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Abstandes ist.

In mathematischer Schreibweise lautet das Coulombsche Kraftgesetz :

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{e}_{12} \quad (1.1)$$

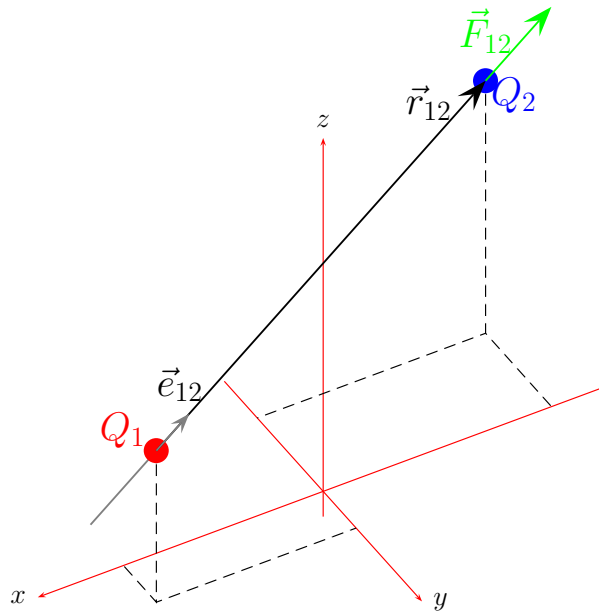


Abbildung 1.1: Kräfte zweier geladener Körper, in diesem Fall: Abstoßung zweier gleichnamig geladener Körper.

Die Proportionalitätskonstante in (1.1) entspricht dabei:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987 \cdot 10^9 \left[ \frac{Nm^2}{C^2} \right] \quad (1.2)$$

$\epsilon_0$  wird darin als elektrische Feldkonstante bezeichnet. Die physikalische Bedeutung dieser Größe wird später noch besprochen. Es ist nun zweckmäßig, den Begriff der elektrischen Feldstärke einzuführen. Dazu denke man sich den Körper mit der elektrischen

Ladung  $Q_1$  festgehalten. Mit der zweiten elektrischen Ladung  $Q_2$  (Probeladung) untersuchen wir die Wirkung des ersten Körpers im Raum. Bezieht man die gemessene Kraft  $\vec{F}$  auf die Ladung  $Q_2$  des Probekörpers, erhält man die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  :

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}}{Q_2} \left[ \frac{kgm}{s^2} \frac{1}{As} = \frac{N}{As} = \frac{Ws}{m} \frac{1}{As} = \frac{VAs}{m} \frac{1}{As} = \frac{V}{m} \right] \quad (1.3)$$

bzw.

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r. \quad (1.4)$$

Dem entsprechend existiert um einen geladenen Körper ein elektrisches Feld, dessen Größe proportional der elektrischen Ladung ist und mit dem Quadrat des Abstandes vom geladenen Körper abnimmt. Die Richtung des Feldes entspricht der radialen Richtung  $\vec{e}_r$ , vom Mittelpunkt der Ladung laufend. Die Gesamtheit aller Feldstärkevektoren  $\vec{E}$  bezeichnet man als das elektrische Feld.

Wird ein Körper mit der Ladung  $Q$  in ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  gebracht, so erfährt dieser die Kraft

$$\vec{F} = Q\vec{E}, \quad (1.5)$$

wobei  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke am Ort des Körpers mit der Ladung  $Q$  angibt. Bei diesen Betrachtungen muß vorausgesetzt werden, daß die räumlichen Ausdehnung des geladenen Körpers und dessen Ladung so gering sind, daß die ursprünglich vorherrschende Feldverteilung nicht gestört wird (Punktladungen). Sind mehrere Punktladungen vorhanden, so erzeugt jede für sich ein elektrisches Feld. Da der Zusammenhang zwischen  $\vec{E}$  und  $Q$  linear ist (Gl. 1.4), ergibt die Überlagerung der Felder aller Ladungen das Gesamtfeld. Beispielsweise ergibt die Gesamtfeldstärke für drei unterschiedliche Ladungen  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  in einem beliebigen Punkt im Raum :

Die Gesamtfeldstärke  $\vec{E}$  im Punkt P errechnet sich dabei zu

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{r_{iP}^2} \vec{e}_{iP}. \quad (1.6)$$

### 1.2.1 Feldlinien und Feldlinienbilder

Um den optischen Eindruck über das Feldverhalten im gesamten Raum zu erhalten, müßte man in sehr vielen Punkten die Feldstärkevektoren in Betrag und Richtung darstellen. Übersichtlicher ist es, das Verhalten mit Hilfe sogenannter Feldlinien wiederzugeben. Man erhält eine Feldlinie, wenn man von einem gegebenen Punkt aus ein kleines

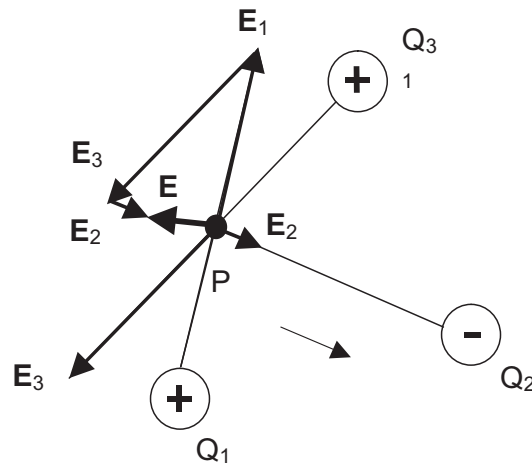


Abbildung 1.2: Überlagerung der elektrischen Feldstärken mehrerer Punktladungen in einem beliebigen Aufpunkt P.

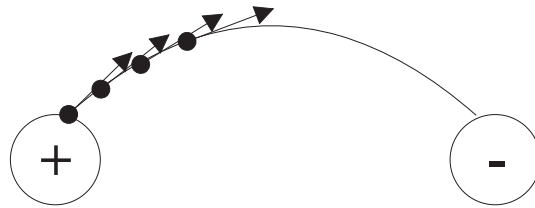


Abbildung 1.3: Konstruktion einer elektrischen Feldlinie.

Stück in Richtung des Feldstärkevektors geht, die Richtung des Feldstärkevektors bestimmt, wieder ein kleines Stück weiterschreitet, und so fort. Aus dieser Darstellung ist sehr gut der qualitative Verlauf des elektrischen Feldes zu erkennen. Diese Darstellung gibt indirekt auch über den Betrag der elektrischen Feldstärke Auskunft. Er ist um so höher, je dichter beisammen die Feldlinien liegen. Alle Feldlinien haben einen Anfangs- und einen Endpunkt. Entsprechend einer willkürlichen Festlegung beginnen sie in den positiven Ladungen und enden in den negativen.

Die positiven Ladungen werden als Quellen, die negativen Ladungen als Senken des elektrischen Feldes bezeichnet.

### 1.3 Arbeit, Potential und Spannung

Befindet sich im elektrischen Feld  $\vec{E}$  eine elektrische Ladung  $Q$ , so wirkt auf diese eine Kraft  $\vec{F}$  gemäß Gl. 1.1. Soll nun diese Ladung  $Q$  bewegt werden, so muß dazu Arbeit verrichtet werden. Bei einer Verschiebung der Ladung in Gegenrichtung zum elektrischen

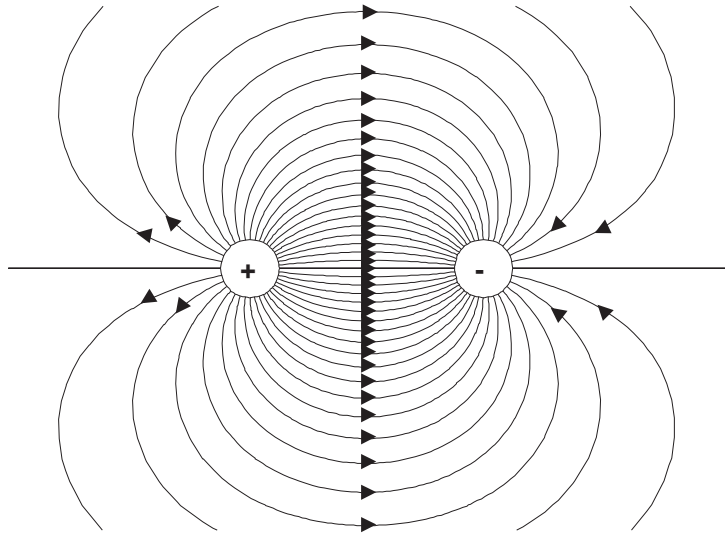


Abbildung 1.4: Feldlinienbild zweier punktförmiger Ladungen.

Feld  $\vec{E}$  ist eine Energiezufuhr von außen erforderlich. D.h. es ist eine mechanische Kraft erforderliche, welche der Kraftwirkung des elektrischen Feldes entgegenwirkt. Erfolgt hingegen die Verschiebung in Richtung der elektrischen Feldstärke, so verrichtet das Feld die notwendige Arbeit. Die Arbeit  $W$  ist definiert als das Produkt der längs des Weges wirkenden Kraft und dem zurückgelegten Weg. Im Allgemeinen muß die Richtung der Kraft nicht mit der Richtung des Weges übereinstimmen, sodaß die vektorielle Projektion für die notwendige Arbeit maßgeblich ist. Für ein differentielles Wegelement  $d\vec{s}$  gilt allgemein:

$$dW = \vec{F}_{mech} \cdot d\vec{s} = -\vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad [Nm = J] \quad \dots \quad \text{Joule} \quad (1.7)$$

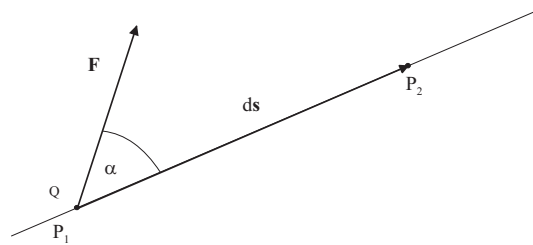


Abbildung 1.5: Arbeit im elektrischen Feld.

$$|dW| = |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos \alpha \quad (1.8)$$

Die erforderliche Arbeit  $W_{12}$  zur Verschiebung der Ladung  $Q$  von  $P_1$  nach  $P_2$  (im elektrischen Feld) ergibt sich aus dem Wegintegral :

$$W_{12} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.9)$$

Bewegt man nun die Ladung  $Q$  von  $P_2$  nach  $P_1$  zurück, so ändert sich lediglich die Richtung des Wegelementes zu  $-d\vec{s}$ , und die Arbeit  $W_{21}$  ergibt sich zu:

$$W_{21} = - \int_{P_2}^{P_1} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.10)$$

Entfernt man folglich eine Ladung  $Q$  im elektrischen Feld von einem Punkt  $P_1$  und bringt diese Ladung anschließend wieder in diesen Punkt zurück, wird keine Gesamtarbeit  $W$  verrichtet:

$$W = W_{12} + W_{21} = 0 \quad (1.11)$$

Die Größe der Arbeiten  $W_{12}$  und  $W_{21}$  sind auch von der Wahl des Weges zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  unabhängig:

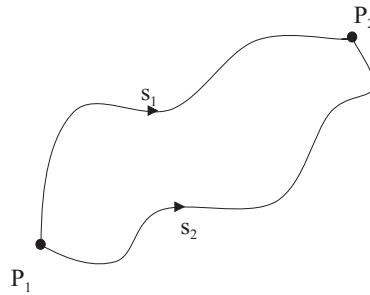


Abbildung 1.6: Bestimmung der verrichteten Arbeit entlang unterschiedlicher Wege.

Dieses Ergebnis läßt sich auch folgendermaßen interpretieren. Das Linienintegral über die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  im elektrostatischen Feld entlang eines geschlossenenen Weges ist **Null**.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (1.12)$$

Ein Feld mit dieser Eigenschaft bezeichnet man allgemein als **wirbelfrei**. Bedingt durch diese Wegunabhängigkeit des Integrales wird die Arbeit  $W$  nur vom Anfangs- und vom Endpunkt bestimmt. Man ordnet daher diesen Punkten eine charakteristische Größe,



das **elektrostatische Potential**  $\Phi$  zu. Es wird definiert:

$$W_{el} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = Q \int_{P_1}^{P_2} [-\vec{E} \cdot d\vec{s}] = Q[\Phi(P_2) - \Phi(P_1)]. \quad (1.13)$$

Diese Definition erlaubt es, zum Potential  $\Phi(P)$  einen beliebigen, konstanten Wert zu addieren, ohne daß sich der Wert des Linienintegrals (Gl. 1.13) ändert. Das elektrostatische Potential ist eine **skalare** Größe.

Für die Differenz der Potentiale in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  kann

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = U_{12} \quad \left[ \frac{V}{m} m = V \right] \quad \dots Volt \quad (1.14)$$

geschrieben werden. Die Größe  $U_{12}$  bezeichnet man als **elektrische Spannung** zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ .

## 1.4 Materie im elektrischen Feld

Bisher erfolgten alle Betrachtungen für luftleeren Raum, d.h. weder elektrisch leitfähige noch isolierende Körper waren vorhanden. Bei Vorhandensein derartiger Körper müssen die entsprechenden Materialeigenschaften mitberücksichtigt werden. Bringt man nun ein Material, zB. einen Metalldraht oder PVC in des elektrische Feld ein, so wird sich das elektrische Feld im Inneren derselben unterschiedlich einstellen. Um dies nun beschreiben zu können, ist es zweckmäßig, neben der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$ , eine weitere Feldgröße, nämlich **die elektrische Verschiebung**  $\vec{D}$ , einzuführen. Sie ist als Proportionalität zur elektrischen Feldstärke folgend definiert:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \left[ \frac{C^2}{Nm^2} \frac{V}{m} = \frac{(As)^2}{VAsm} \frac{V}{m} = \frac{As}{m^2} \right]. \quad (1.15)$$

Die Einheit der elektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  entspricht einer Ladung pro Fläche (Gl. 1.15). Auf die *Proportionalitätskonstante*  $\epsilon$  wird bei der Beschreibung isolierender Stoffe näher eingegangen.

Zunächst werden elektrisch leitfähige Körper und hernach nichtleitende Körper in ein elektrisches Feld eingebracht und die jeweiligen Auswirkungen und Phänomene untersucht.

### 1.4.1 Leitfähige Körper - Influenz

Ein leitfähiger Körper, zB. ein Stück Kupferdraht, zeichnet sich dadurch aus, dass die um die Atomkerne kreisenden Elektronen unter sehr geringem energetischen Aufwand für einen Ladungstransport (=Strom) zur Verfügung stehen. Die Elektronen sind hoch beweglich.

Bringt man nun einen Leiter, -er ist elektrisch neutral- in ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  ein, so wird auf die Elektronen jeweils die Kraft  $\vec{F} = Q\vec{E}$  wirken. Aufgrund ihrer hohen Beweglichkeit werden sich diese Elektronen bewegen. Diese Bewegungen erfolgen so lange, bis die Elektronen **keine** Feldstärke mehr verspüren, dh. wenn die Bedingung  $\vec{E} = \vec{0}$  erfüllt ist. Damit ist auch die Kraft  $\vec{F}$  auf die Ladungen Null. Diesen Vorgang nennt man die **elektrische Verschiebung oder Influenz**

Alle Ladungen des Leiters sind nunmehr flächenhaft an der Oberfläche des Leiters verteilt (vgl. Abb. 1.7).

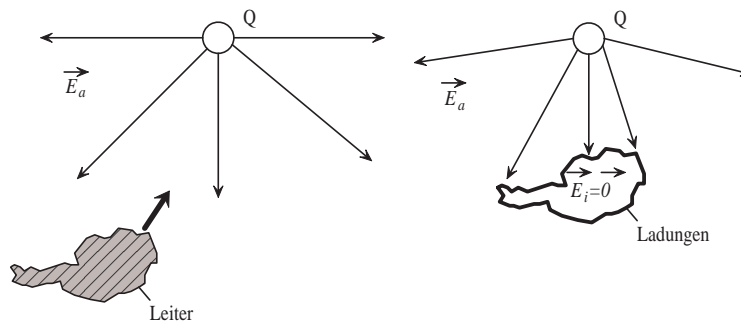


Abbildung 1.7: Ladungsverteilung und elektrisches Feld in einem elektrisch leitfähigen Körper.

Somit ist das Innere des Leiters feld- und ladungsfrei. Man könnte sich dieses Gebiet durch einen Isolator oder durch leeren Raum ersetzt denken, an dessen äußerer Begrenzung die Ladungen sitzen. Die folgenden wesentlichen Aussagen können nun getroffen werden:

1. Elektrische Felder werden durch leitfähige Körper abgeschirmt.
2. Die elektrischen Feldlinien münden auf leitfähigen Körpern stets senkrecht ein.
3. Da das Innere eines Leiters feld- und ladungsfrei ist, muß die Leiteroberfläche eine Fläche konstanten Potentials darstellen (Äquipotentialfläche).

Aus der Einheit der elektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  [As/m<sup>2</sup>] ersieht man, daß aus dessen Integration über eine Fläche eine elektrische Ladung  $Q$  resultieren muß.

Tatsächlich ergibt ein **geschlossenes** Oberflächenintegral von  $\vec{D}$  über ein beliebiges Gebiet die darin enthaltene Gesamtladung:

$$\oint_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma} = Q. \quad (1.16)$$

Diese Beziehung bezeichnet man als das **Gaußsche Gesetz**. Wird das Integral nicht über eine geschlossene Fläche, sondern nur über eine beliebige Fläche  $\Gamma$  ausgeführt, so ergibt dies den elektrischen Fluß  $\Psi_{el}$ :

$$\Psi_{el} = \int_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma}. \quad (1.17)$$

War der leitende Körper vor dem Einbringen in das Fremdfeld  $\vec{E}_f$  ungeladen, so ist er es dann auch wieder. Das geschlossene Oberflächenintegral über den eingebrachten Leiter ergibt Null, da eine gleich große Anzahl von positiven und negativen Ladungen influenziert wurde. In jedem Fall liegen die Influenzladungen umgekehrten Vorzeichens zu den influenzierenden Ladungen näher diesen influenzierenden Ladungen. Aufgrund der höheren Feldstärken im näheren Bereich werden sich influenzierende und influenzierte Leiter immer anziehen. Zur Feststellung der elektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  kann der Effekt der Influenz herangezogen werden.

## 1.4.2 Nichtleiter oder Isolatoren - Polarisation

Anders als beim leitenden Körper kann ein Isolator von einem elektrischen Feld durchsetzt werden. Man bezeichnet derartige Stoffe oft als **Dielektrika** (dia heißt durch). Die Elektronen eines isolierenden Materials, zB. PVC oder Glas, sind nur beschränkt beweglich. Sie können sich nicht solange bewegen, bis völlige Feldfreiheit vorherrscht. Es wird ein elektrisches Feld im Inneren verbleiben. Ein Maß für die Verschiebbarkeit von Ladungen wird nun mit der Dielektrizitätszahl  $\epsilon$  ausgedrückt.

Ähnlich dem Falle eines Leiters im elektrischen Feld kann man auch bei einem Isolator die Ladungen an der Oberfläche vermuten. Die Dichte der Ladungen an der Oberfläche wird jedoch vergleichsweise klein sein, da ja im Inneren ein Feld  $\vec{E}_i$  verbleibt. Man nennt diese Ladungen **Polarisationsladungen** mit der Dichte  $\sigma_{pol}$ . Als Polarisation bezeichnet man die makroskopisch feststellbare Ladungsverschiebung in dielektrischen Stoffen.

Im atomaren Verband können sich in einem Isolator die Ladungsschwerpunkte nur sehr begrenzt verschieben. Dies ist so lange möglich, bis sich zwischen der trennenden Kraft des äußeren elektrischen Feldes und der Anziehungskraft der Polarisationsladungen ein Gleichgewichtszustand einstellt. Auf die unterschiedlichen Arten der Polarisation (**Elektronenpolarisation, Molekül-Polarisation und Orientierungspolarisation**) wird hier nicht näher eingegangen.

Die Abschwächung der elektrischen Feldstärke in einem dielektrischen Stoff gegenüber luftleeren Raum kann durch den formalen Zusammenhang

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}, \tag{1.18}$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[ \frac{As}{Vm} = \frac{F}{m} \right] \dots \textit{Farad pro Meter}. \tag{1.19}$$

über  $\epsilon$  bzw.  $\epsilon_r$  erfaßt werden.  $\epsilon_r$  bezeichnet man als **relative** und  $\epsilon$  als **absolute** Dielektrizitätskonstante des entsprechenden Stoffes. Gl. 1.18 besagt, daß eine Erhöhung der relativen Dielektrizitätszahl eines Mediums eine Erniedrigung des elektrischen Feldes in diesem Medium zur Folge hat.

### 1.4.3 Unterschiedliche dielektrische Stoffe

In der nachfolgenden Tabelle 1.1 sind die Dielektrizitätszahlen einiger Stoffe aufgelistet.

Stoff	$\epsilon_r$			Stoff	$\epsilon_r$
Luft	1,00059			Quarz	3,8 bis 5
Petroleum	2,0			Glas	5 bis 7
Polyäthylen	3,2			Keramik	9,5 bis 100
Polystyrol	2,6			Diamant	16,5
Gummi	2,5 bis 3,5			Nitrobenzol	36,0
Bernstein	2,8			destil. Wasser	81,0

Tabelle 1.1: relative Dielektrizitätszahlen.

Es gibt in der Natur einige Stoffe, die in den unterschiedlichen Achsenrichtungen verschiedene Dielektrizitätseigenschaften aufweisen. Zur Beschreibung des Feldverhaltens derartiger Stoffe müssen die Materialeigenschaften entsprechend durch eine Matrix berücksichtigt werden, z.B. durch:

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}. \tag{1.20}$$

$\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und  $\epsilon_z$  sind darin die relativen Dielektrizitätszahlen für die indizierten Achsenrichtungen.

### 1.4.4 Die Kapazität

Man betrachte die einfache Anordnung zweier paralleler, in einem Abstand  $d$  angeordneter Platten (Abb. 1.8). Auf einen der Leiter bringt man eine positive Ladungsmenge  $+Q$  auf, auf den anderen gleich viele Ladungen umgekehrten Vorzeichens. In der Praxis erfolgt dies mit einer Spannungsquelle, deren Klemmen über leitende Verbindungen mit den zwei Platten verbunden sind.

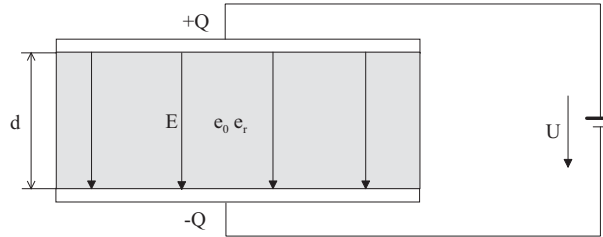


Abbildung 1.8: Zwei parallele Platten mit Batterie als Spannungsquelle

Es werden hierbei auf dem einen Leiter Ladungen der einen Art, auf dem anderen diejenigen umgekehrten Vorzeichens verschoben (influenziert). Bei einer gegebenen Spannung können diese Platten nur eine ganz bestimmte Anzahl von Ladungen aufnehmen. Ein Maß dafür ist die **Kapazität**  $C$  (Aufnahmefähigkeit). Aus Versuchen erkannte man, daß  $C$  umso größer ist, je größer die Fläche  $A$  der Leiter ist, je größer die Dielektrizitätszahl  $\epsilon$  des dazwischenliegenden Mediums ist und sie wächst mit kleiner werdendem Abstand  $d$  der beiden Platten zueinander. Für die Ladungsmenge auf einer Platte gilt:

$$Q = \frac{\epsilon A}{d} U = C U. \quad (1.21)$$

Für eine allgemeine Anordnung zweier Leiter, entsprechend Abb. 1.9 folgt:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}} \left[ \frac{As}{V} = \text{Farad} \right] \quad (1.22)$$

Zur Veranschaulichung betrachte man eine Plattenanordnung mit einer Fläche von  $A=1 \text{ cm}^2$  in einem Abstand von  $d=1 \text{ mm}$  zueinander plaziert. An diese Platten wird eine Spannung von  $U=1 \text{ V}$  gelegt. Das Medium zwischen den Platten sei Luft ( $\epsilon_r = 1$ ). Es ergibt sich die Kapazität :

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{1,0 \cdot 10^{-4}}{1,0 \cdot 10^{-3}} = 8,854 \cdot 10^{-13} \text{ F} \quad (1.23)$$

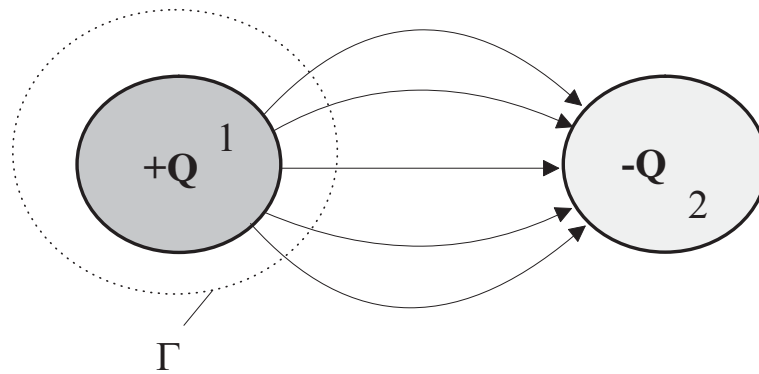


Abbildung 1.9: Kapazität zwischen zwei leitenden Körpern

Bei einer Spannung von 1 V folgt die Ladungsmenge je Platte, nach Gl. 1.21 zu

$$Q = CU = 8,854 \cdot 10^{-13} \text{ As} . \quad (1.24)$$

Dividiert man diese Ladungsmenge durch die Elementarladung  $e$ , so erhält man die Anzahl der auf der Platte pro Quadratcentimeter befindlichen Ladungen. Hier sind dies  $5,52615 \cdot 10^6$  Elektronen.

Voneinander isoliert angeordnete Leiter, zwischen denen sich ein elektrisches Feld einstellen kann, nennt man **Kondensatoren**. Ihr Einsatzgebiet in der Elektrotechnik erstreckt sich über praktisch alle Teilgebiete, von der Elektronik über die Nachrichtentechnik bis zur Hochspannungs- und Anlagentechnik. Dementsprechend gibt es eine Vielzahl von Bauarten und Ausführungen von Kondensatoren.

### Parallelschaltung von Kondensatoren

Das Schaltsymbol eines Kondensators wird durch zwei etwas dickere, parallele Striche, welche die Platten eines Kondensators stilisieren, und den elektrischen Verbindungen zu diesen Platten dargestellt (Abb. 1.10).



Abbildung 1.10: Schaltsymbol eines Kondensators

Durch das Verbinden jeweils einer Platte von zwei oder mehr Kondensatoren in nachfolgender Weise werden die verbundenen Platten auf gleiches Potential gebracht.

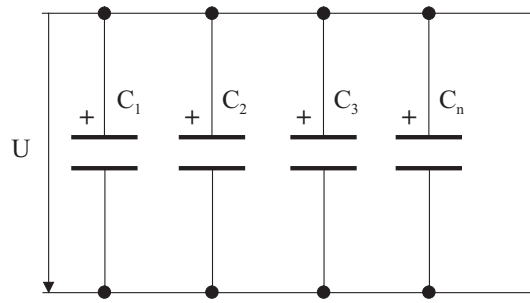


Abbildung 1.11: Parallelschaltung von Kondensatoren

Damit liegt an allen Kondensatoren dieselbe Spannung  $U$ . Die Gesamtkapazität ist die Summe aller verschobenen Ladungen bezogen auf die Spannung  $U$ :

$$C_{ges} = \frac{Q_{ges}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n}{U} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \quad (1.25)$$

**Werden Kapazitäten parallel geschaltet, so ergibt sich die Gesamtkapazität aus der Summe aller Teilkapazitäten.**

$$C_{ges} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{U} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (1.26)$$

Da an allen Teilkapazitäten dieselbe Spannung  $U$  liegt, folgt

$$Q_i = C_i U \quad \implies \quad Q_1 : Q_2 : Q_3 : \dots : Q_n = C_1 : C_2 : C_3 : \dots : C_n. \quad (1.27)$$

Die zugeführte elektrische Ladungsmenge  $Q_{ges}$  verteilt sich auf die Kondensatoren im Verhältnis ihrer Kapazitäten.

### Reihenschaltung von Kondensatoren

Schaltet man mehrere Kondensatoren derart, daß zwischen dem Ende des einen und dem Beginn des nächsten eine leitende Verbindung besteht, so erhält man eine Serien- oder Reihenschaltung von Kondensatoren (Abb. 1.12).

Schließt man dieses Gebilde an den beiden äußersten Anschlüssen mit einer Spannungsquelle (z.B. Batterie) zusammen, so werden sich zunächst an den beiden äußersten Platten Ladungen verschieben. Durch das entstehende elektrische Feld werden infolge Influenz auch Ladungen auf den dazwischenliegenden Platten verschoben. An allen Platten muß sich dieselbe Ladungsmenge  $+Q$  bzw.  $-Q$  einstellen. Es gilt:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}, \quad \dots \quad U_n = \frac{Q}{C_n}. \quad (1.28)$$

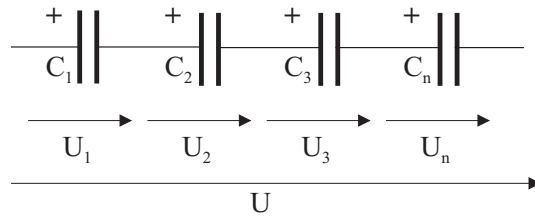


Abbildung 1.12: Reihenschaltung von Kondensatoren

Die gesamte angelegte Spannung verteilt sich auf die Kondensatoren gemäß :

$$U = \int_{s_i} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \quad (1.29)$$

Die Gesamtkapazität erhält man wiederum aus dem Quotienten  $\frac{Q}{U}$  zu:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (1.30)$$

Als häufig auftretenden Sonderfall sei hier die Seireinschaltung zweier Kondensatoren angeführt:

$$C = \left( \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \right) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1.31)$$

**Durch die Serienschaltung von Kondensatoren wird die Gesamtkapazität verkleinert.**

### 1.4.5 Beispiel aus der Praxis

Man betrachte die in Abb. 1.13 dargestellte Anordnung einer Hochspannungs-Freileitung.

Die drei Leitungen des Energieübertragungssystemes haben unterschiedliches Potential. Damit ist eine typisch kapazitive Anordnung gegeben. Die Kapazitäten, sie sind in der mittleren Abbildung dargestellt, beeinflussen nachhaltig das elektrische Verhalten eines Energieübertragungsnetzwerkes. Bei Doppel- und Mehrfachsystemen, wie sie bei 380kV-Trassen eingesetzt werden, sind die Verhältnisse noch komplexer (rechte Abbildung).



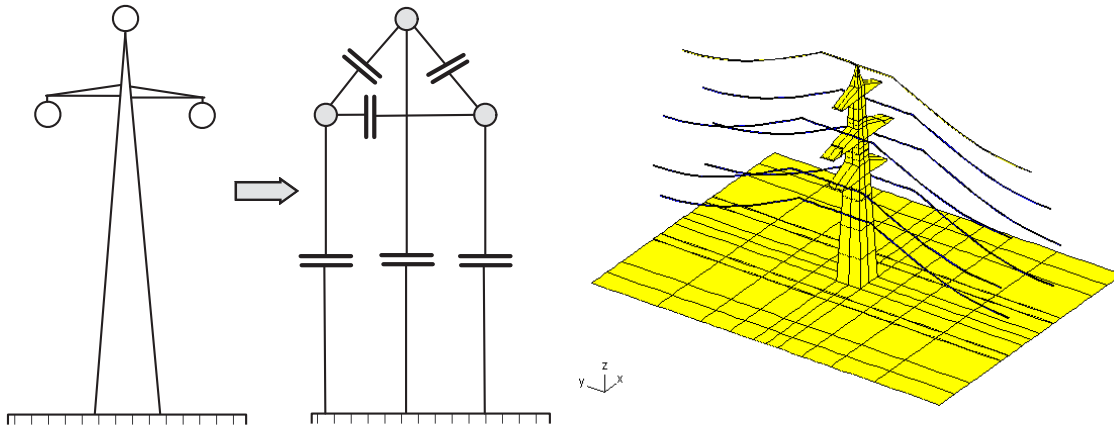


Abbildung 1.13: Kapazitäten an einer Hochspannungsleitung.

## 1.5 Energie im elektrostatischen Feld

Bisher wurde davon gesprochen, daß sich ungleichnamige Ladungen anziehen (Coulombsches Kraftgesetz). Zur Trennung von Ladungen muß hingegen mechanische Arbeit verrichtet werden. Beim Bernstein-Versuch war die mechanische Tätigkeit das Reiben des Fells an Bernstein. Dem Energieerhaltungsprinzip entsprechend muß sich diese Arbeit in irgend einer Form wiederfinden. In unserem Falle ist dies die **elektrische Feldenergie**. Sie ist im Raum, in welchem sich das elektrische Feld erstreckt, gespeichert. Man beobachte nun folgenden Versuch.

Zwei Körper, Leiter 1 und Leiter 2 haben die elektrischen Potentiale  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  (Abb. 1.14).

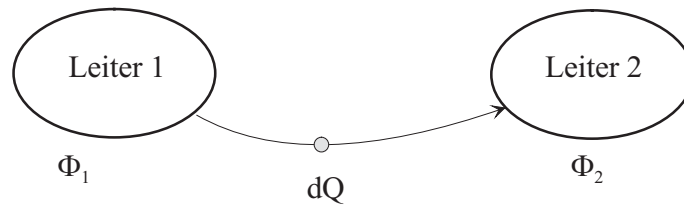


Abbildung 1.14: Verrichtung mechanischer Arbeit und Speicherung elektrischer Energie.

Wird nun eine differentielle elektrische Ladung  $dQ$  entgegen der elektrischen Feldkräfte von Leiter 1 nach Leiter 2 gebracht, so muß mechanische Arbeit  $-dW_{mech}$  aufgebracht werden (negatives Vorzeichen bedeutet verbrauchte Energie):

$$dW_{el} = -dW_{mech} = dQ(\Phi_2 - \Phi_1) = dQ U_{21} = dQ U. \quad (1.32)$$

Allgemein ist die Ladung proportional der Spannung ( $Q = C U$ , Gl. 1.21). Bei diesem Versuch bleibt die Kapazität  $C$  der Anordnung unverändert. Somit muß für die infinitesimale transportierte Ladung  $dQ$  gelten:

$$dQ = C dU, \tag{1.33}$$

sodaß mit 1.32

$$W_{el} = \int_0^Q U dQ = C \int_0^U U dU = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C} \tag{1.34}$$

folgt und man folgende allgemeine Aussage ableiten kann:

**Die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie entspricht dem halben Produkt aus der Kapazität und dem Quadrat der angelegten elektrischen Spannung.**

## 2 Gleichförmig bewegte Ladungen

### 2.1 Der elektrische Strom

Bisher wurden elektrische Feldverteilungen behandelt, welche sich aufgrund ruhender Ladungen ergeben haben. Es wurde bei der Influenz zwar von Ladungsverschiebungen gesprochen, jedoch wurden nur die Endzustände, d.h. alle Ladungen befanden sich wieder in einer stabilen, ruhenden und ortsfesten Lage, betrachtet. Dieses Kapitel befaßt sich mit bewegten Ladungen. **Die Gesamtheit bewegter elektrischer Ladungen wird als elektrischer Strom bezeichnet.**

#### 2.1.1 Die elektrische Stromstärke

Man betrachte dazu einen -durch welche Mechanismen auch immer- geladenen Kondensator, auf dessen einer Platte ein Elektronenüberschuß (negative geladene Platte) auf der anderen ein Elektronenmangel (positiv geladene Platte) vorliegt (Abb. 2.1).

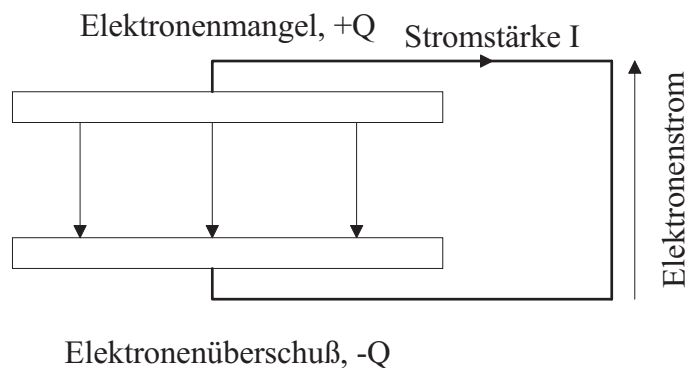


Abbildung 2.1: Feldabbau an einem Kondensator.

Soll sich nun die zwischen den Platten eingestellte elektrische Feldstärke abbauen, so muß ein Ladungsausgleich stattfinden. Die überschüssigen Elektronen der einen Platte müssen zur Platte mit Elektronenmangel fließen. Damit dies möglich ist, muß zwischen den Platten eine leitende Verbindung hergestellt werden. In Metallen sind Ladungen frei beweglich. Entsprechend eines, wie in Abb. 2.1 dargestellten Leiters wird dieser

Ladungsausgleich möglich. Als physikalische Größe zur Beschreibung des elektrischen Stromes wird die elektrische Stromstärke  $I$  definiert :

Definition:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad [A] \quad \dots \quad \text{Ampere.} \quad (2.1)$$

**Die elektrische Stromstärke  $I$  ist die pro Zeiteinheit durch einen festgelegten Querschnitt hindurchfließende Ladungsmenge.**

Da im allgemeinen die Stromstärke  $I$  zeitlich nicht gleichbleibend ist, kann für den augenblicklichen Stromstärkewert die differentielle Änderung der Ladungen pro Zeit angegeben werden(2.2).

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A]. \quad (2.2)$$

Die Flußrichtung des Stromes ist definiert als die Richtung entgegengesetzt zum Elektronenstrom. D.h. der elektrische Strom fließt immer von plus nach minus (Quelle  $\implies$  Senke). Versuche haben gezeigt, daß die Dauer, bis ein Ladungsausgleich erfolgt ist, abhängig ist vom verwendeten Material. Die Gesetzmäßigkeit zur Beschreibung dieses Ladungsausgleiches erfolgt später.

### 2.1.2 Gleichstrom, Gleichspannung und Spannungsquellen

Zum Erreichen eines gleichbleibenden Elektronenflusses (**Gleichstrom**) und damit einer gleichmäßigen Stromstärke  $I$  muß gesorgt werden, daß die ab- bzw. zufließenden Ladungen an den Kondensatorplatten immer in gleichem Maße vorhanden bleiben. Dies kann durch eine gleichbleibende Spannung  $U$  an den Platten erreicht werden. Es kann die Spannung  $U$  als treibende Größe für die Ladungsbewegung angesehen werden. Unabhängig von der Anordnung muß also immer Energie (mechanische, chemische, ...) aufgewendet werden, um für die notwendigen Ladungen, die dann zu- bzw. abfließen können, zu sorgen. Bei unseren Betrachtungen ist es zunächst nicht erheblich, aus welcher Energieform dies geschieht. Der Einfachheit halber verwendet man ein Schaltsymbol und bezeichnet dieses als Spannungsquelle.

Der Pfeil von der plus-Klemme zur minus-Klemme in Abb. 2.1 wird als Zählpfeil bezeichnet und hat nichts mit einem Vektor zu tun. Der Zählpfeil wird so gewählt, daß er vom höheren zum niedrigeren Potential gerichtet ist.

Durch Verbinden der Klemmen der Gleichspannungsquelle mit einem Leiter entsteht ein Stromkreis, in dem ein gleichbleibender Strom der Stromstärke  $I$  fließt.

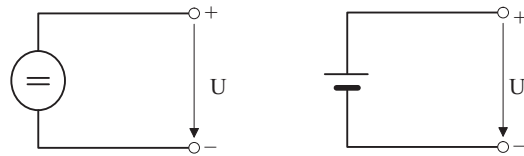


Abbildung 2.2: Schaltsymbole von Gleichspannungsquellen, links allgemein, rechts Batterie.

### 2.1.3 Die elektrische Stromdichte

Damit die vorhin beschriebene richtungsabhängige Bewegung der Elektronen im Leiter mathematisch korrekt erfolgen kann, wird wiederum eine vektorielle Größe benötigt.

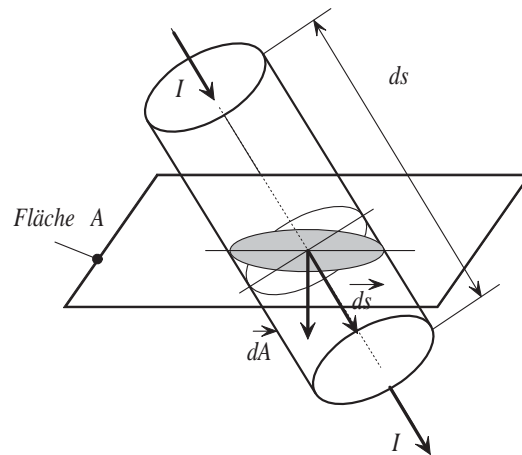


Abbildung 2.3: Zur Definition der elektrischen Stromdichte.

Dazu wird die sogenannte elektrische Stromdichte  $\vec{J}$  wie folgt definiert. Für ein infinitesimales Flächenelement  $d\vec{A}$  gilt:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (2.3)$$

Die Gesamtstromstärke, welche durch eine Fläche A fließt errechnet sich aus der Integration aller infinitesimaler Stromstärken  $dI$  über diesen Querschnitt:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2.4)$$

Umgekehrt kann die elektrische Stromdichte durch

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \vec{e}_A \quad (2.5)$$

dargestellt werden. Man kann dieselbe Stromdichte  $|\vec{J}| = J$  in einem Leiter erreichen, wenn einmal der Strom hoch und der Querschnitt hoch und umgekehrt wenn der Strom klein und der Querschnitt klein sind.

## 2.2 Das Ohmsche Gesetz

Es wurde schon erwähnt, daß die Dauer des Ladungsausgleiches zwischen Quelle und Senke vom verwendeten Material des Leiters abhängig ist. In Metallen (gute Leiter) sind die Elektronen der äußersten Schale praktisch ungebunden. Somit stehen pro Atom zumindest ein freies Elektron für den Ladungsausgleich zur Verfügung. Für Metalle ergibt sich eine untere Schranke von etwa  $10^{23}$  Ladungsträger pro  $cm^3$ . Diese ungebundenen Ladungsträger führen bei Temperaturen größer als 0 Kelvin ungeordnete Bewegungen aus (vgl. Brownsche Molekularbewegung). Nach außen erscheint der Leiter elektrisch neutral.

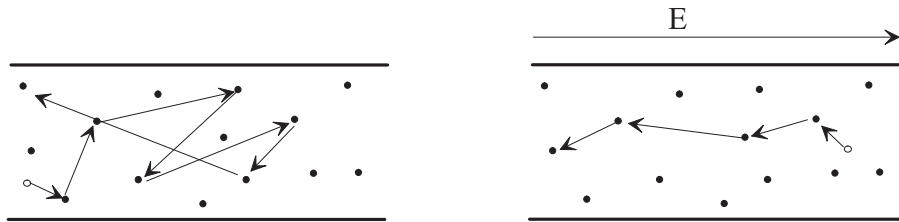


Abbildung 2.4: Bewegung der Ladungsträger im Metall, links ohne elektrisches Feld, rechts mit elektrischem Feld.

Durch Anlegen einer Spannung  $U$  an den Leiter wird nun ein elektrisches Feld erzeugt und die Elektronen werden entsprechend der auf sie wirkenden Kraft beschleunigt. Nach einiger Zeit treffen sie auf die Atomrümpfe des Gitters (=Ionen, es fehlen Elektronen) und werden unter Abgabe von Energie an das Gitter abgebremst, abgelenkt oder zurückgeworfen. Sie erreichen keine hohe Geschwindigkeit. Es kann jedoch eine *mittlere Driftgeschwindigkeit* festgestellt werden, die proportional zur elektrischen Feldstärke ist. Es gilt:

$$\vec{v} = -\mu_e \vec{E}. \quad (2.6)$$

Die Proportionalitätskonstante  $\mu_e$   $[\frac{m^2}{Vs}]$  wird als **Beweglichkeit** der Elektronen benannt. Mit der Einführung einer spezifischen Leitfähigkeit  $\gamma$ , definiert durch

$$\gamma = -\mu_e \rho_e = -\mu_e (n(-e)), \quad (2.7)$$

wobei  $n$  die Anzahl der freien Elektronen pro Volumseinheit ist, folgt für die elektrische Stromdichte :

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad [\gamma] = \left[ \frac{A}{m^2} \frac{m}{V} = \frac{A}{Vm} = \frac{S}{m} \right] \quad (2.8)$$

Nachfolgend sind für einige wichtige elektrische Werkstoffe deren Materialdaten zusammengefaßt:

Leiter	$\gamma \left[ \frac{S}{m} \cdot 10^6 \right]$	$\rho_R \left[ \Omega m \cdot 10^{-6} \right]$	$\alpha_{20} \left[ \frac{1}{K} \cdot 10^{-3} \right]$
Silber	62,5	0,016	3,8
Kupfer	56	0,01786	3,93
Gold	44	0,023	4,0
Aluminium	35	0,02857	3,77
Messing	11-14	0,09-0,7	1,5
Eisen	5-10	0,2-0,15	4,5-6
Kohle	0,01-0,02	100-50	-0,2 bis -0,8

Tabelle 2.1: Materialdaten einiger Stoffe

Entsprechend Gl. 2.8 ist durch die Vorgabe der elektrischen Feldstärke auch die Richtung des elektrischen Stromes bestimmt. Die Gesamtheit der Stromdichtevektoren  $\vec{J}$  eines betrachteten Gebietes bezeichnet man als **elektrisches Strömungsfeld**. Auch hier gibt es die Unterscheidung zwischen homogenen und inhomogenen Strömungsfeldern.

Zur Beschreibung der Auswirkung des Fließens elektrischen Stromes in Stoffen wird nun der Begriff des **elektrischen Widerstandes** eingeführt. Das in Abb. 2.5 dargestellte zylindrische Metallstück sei an dessen Enden mit den Klemmen einer Gleichspannungsquelle verbunden:

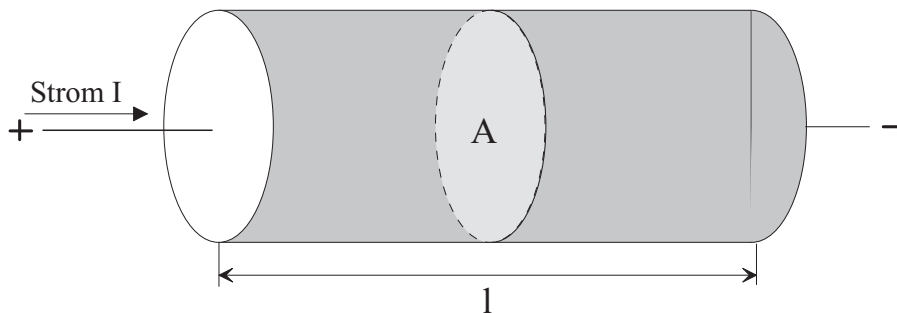


Abbildung 2.5: Der Ohmsche Widerstand

Der Querschnitt  $A$  dieses metallischen Zylinders bleibt über die gesamte Länge  $l$  unverändert. Aufgrund der angelegten Spannung  $U$  stellt sich eine konstante elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  entlang des metallischen Leiters ein. Für die Spannung gilt:

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{s} = |\vec{E}| l. \quad (2.9)$$

Infolge des homogenen Leiters ist die Stromdichte überall gleich groß. Daraus resultiert die Stromstärke  $I$  zu:

$$I = \gamma |\vec{E}| A. \quad (2.10)$$

Nach Substitution der elektrischen Feldstärke mit Hilfe von Gl. 2.9 erhält man:

$$U = \frac{l}{\gamma A} I \quad (2.11)$$

Diese Beziehung wird als das **Ohmsche Gesetz** bezeichnet. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen der an einem Leiter angelegten Spannung  $U$  und dem, infolge dieser Spannung fließenden Strom  $I$ . Für den Bruch in Gleichung 2.11 wird der Begriff des **elektrischen Widerstandes** mit dem Formelzeichen  $R$  eingeführt:

$$R = \frac{l}{\gamma A} \quad \left[ \frac{m}{\frac{A}{V_m} m^2} = \frac{V}{A} \right] \quad \dots \quad (Ohm, \Omega), \quad (2.12)$$

und Gleichung 2.11 kann vereinfacht dargestellt werden:

$$U = RI. \quad (2.13)$$

**Die elektrische Stromstärke  $I$  in einem metallischen Leiter ist proportional der angelegten elektrischen Spannung  $U$ .**

Sehr häufig wird anstelle der elektrischen Leitfähigkeit  $\gamma$  dessen reziproker Wert, der sogenannte **spezifische Widerstand**  $\rho_R$  verwendet. Die Zahlenwerte für  $\rho_R$  einiger wichtiger Stoffe sind bereits in Tabelle 2.1 aufgelistet. Für Gleichung 2.12 kann daher auch

$$R = \frac{l}{\gamma A} = \rho_R \frac{l}{A} \quad (2.14)$$



geschrieben werden. Desgleichen verwendet man häufig den als **elektrischen Leitwert**  $G$  bezeichneten reziproken Widerstand  $R^{-1}$ .

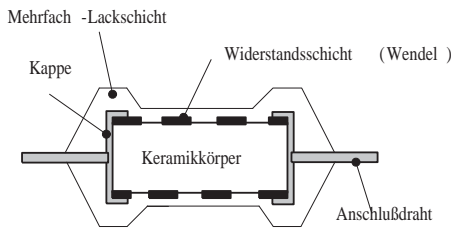
$$I = \frac{1}{R} U = G U; \quad [G] = \left[ \frac{1}{\Omega} = S \right] \quad \dots \quad (\text{Siemens, } S). \quad (2.15)$$

Im allgemeinsten Fall ist ein elektrischer Leiter nicht so regelmäßig wie im Falle eines Zylinders. Es gilt hier

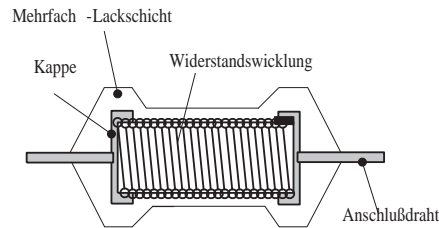
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}. \quad (2.16)$$

### 2.2.1 Bauformen Ohmscher Widerstände

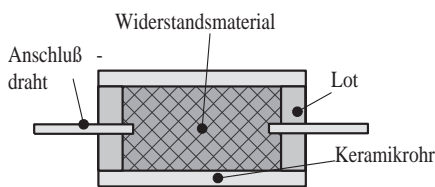
Je nach Anwendungsgebiet gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Bauformen Ohmscher Widerstände. Kriterien dafür sind die thermische Belastbarkeit, Genauigkeit, Langzeitstabilität, das parasitäre Verhalten, usw. In den nachfolgenden Abbildungen sind unterschiedliche Bauformen dargestellt.



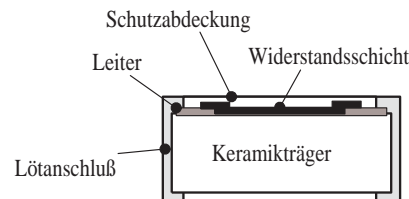
a) Schichtwiderstand



b) Drahtwiderstand



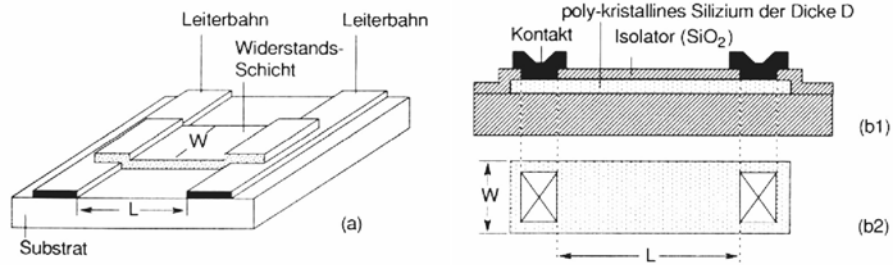
c) Massewiderstand



d) Dünnschichtwiderstand

Ebene Schichtwiderstände werden auch in Dickschichtschaltungen (a) sowie in integrierten Schaltkreisen (b) ausgeführt.

Mittels eines veränderbaren Abgriffes an einem Widerstand lassen sich sogenannten **Potentiometer** oder Spannungsteiler verwirklichen. Bei Drahtwiderständen ermöglicht



ein beweglicher Schleifkontakt den Abgriff an unterschiedlichen Stellen. Auch in Schicht-technologie werden Potentiometer ausgeführt.

## 2.3 Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Der lineare Zusammenhang zwischen Strom und Spannung gilt nur dann, wenn der Ohm'sche Widerstand  $R$  sich nicht ändert. Nur dann ist gewährleistet, daß eine Erhöhung der Spannung am Widerstand auch eine proportionale Erhöhung des Stromes zur Folge hat. Diese Konstanz von  $R$  ist nicht über den gesamten Temperaturbereich gegeben.

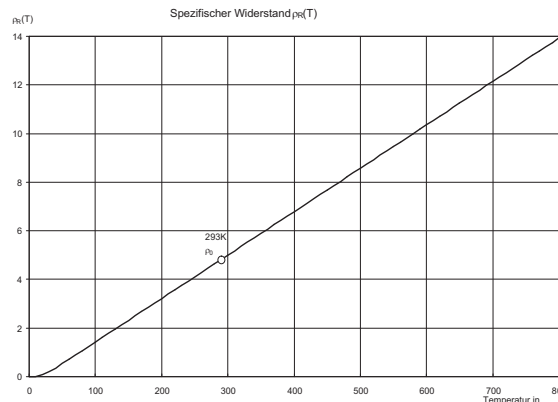


Abbildung 2.6: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes  $\rho_R$

In Abb. 2.6 ist die Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von Kupfer von der absoluten Temperatur  $T$  [K] grafisch dargestellt.  $0K$  entsprechen  $-273,15^\circ C$ . In weiten Teilen nimmt der spezifische Widerstand  $\rho_R$  etwa linear mit der Temperatur zu. Im Bereich der Raumtemperatur  $T_0=20^\circ C = 293 K$  hat folgende lineare Näherung Gültigkeit:

$$\rho_R(T) = \rho_{R_0} [1 + \alpha_{20}(T - T_0)] \quad [\Omega m]. \quad (2.17)$$

Darin ist  $\rho_{R_0}$  der spezifische Widerstand bei Raumtemperatur  $T_0$ . Der Temperaturkoeffizient  $\alpha_{20}$  ist eine Materialkenngröße. Für einige Stoffe ist dieser Wert in Tab. 2.1 aufgelistet. Dieser Temperaturkoeffizient kann auch negatives Vorzeichen besitzen, d.h. der spezifische elektrische Widerstand wird mit steigender Temperatur kleiner. Bei sehr vielen Anwendungen will man über einen weiten Temperaturbereich eine Konstanz des elektrischen Widerstandes erreichen. Dies kann durch Zusammenschalten von Widerständen mit entsprechenden Temperaturkoeffizienten erreicht werden.

Sind sehr große Temperaturbereiche zu betrachten, so ist die lineare Näherung nicht mehr genau genug. Es muß eine quadratische Näherung herangezogen werden. Die Beziehung wird in 2.18 angedeutet, ohne aber auf den darin verwendeten Temperaturkoeffizienten  $\beta$  näher einzugehen.

$$\rho_R(T) = \rho_{R_0} [1 + \alpha_{20}(T - T_0) + \beta (T - T_0)^2]. \quad (2.18)$$

Es gibt Stoffe, die ihren spezifischen elektrischen Widerstand bei sehr tiefen Temperaturen (nur einige Kelvin) plötzlich verlieren und bis zum absoluten Nullpunkt auf Null bleiben. Derartige Materialien werden als **Supraleiter** bezeichnet.

## 2.4 Analogie zwischen elektrostatischem Feld und Strömungsfeld

Die Gegenüberstellung der Gleichungen des elektrostatischen Feldes mit denen des elektrischen Strömungsfeldes läßt folgende Analogien erkennen:

Elektrostatisches Feld

Strömungsfeld

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$$\Psi = \int_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma}$$

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$Q = C U$$

$$I = G U$$

$\vec{E}$  und  $U$  haben in beiden Fällen dieselbe Bedeutung. Die elektrische Stromdichte  $\vec{J}$  entspricht der elektrischen Verschiebung  $\vec{D}$ , der elektrische Fluß  $\Psi$  der elektrischen Stromstärke  $I$ , die Dielektrizitätszahl  $\epsilon$  ist analog zur elektrischen Leitfähigkeit  $\gamma$  und die Kapazität  $C$  entspricht dem Leitwert  $G$ .

## 2.5 Die Leistung im stationären Strömungsfeld

Zur Beschreibung der elektrischen Leistung  $P$  betrachte man ein differentielles Volumenelement  $dV$ , gemäß Abb. 2.7 :

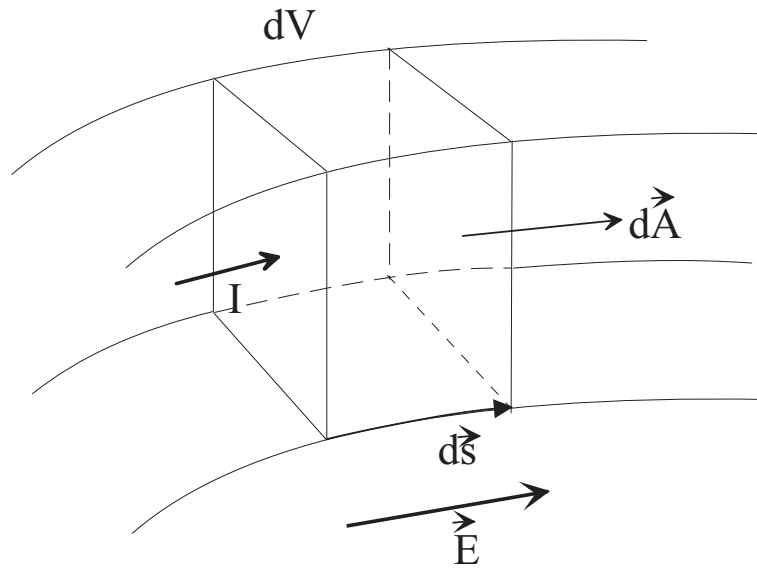


Abbildung 2.7: Bestimmung der elektrischen Leistung.

Für das differentielle Volumenelement gilt:

$$dV = \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (2.19)$$

In diesem differentiell kleinen Volumen ist die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und das Längenelement  $d\vec{s}$  in gleicher Richtung. Die umgesetzte elektrische Leistung  $dP$  ergibt sich aus dem Produkt der elektrischen Spannung in diesem Volumenelement mit dem durchfließenden Strom :

$$dP = dU dI \quad (2.20)$$

Setzt man darin die Beziehungen

$$dU = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

und

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

ein, so folgt:

$$dP = dU dI = \vec{E} \cdot d\vec{s} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{J} dV. \quad (2.21)$$

Das skalare Vektorprodukt aus den beiden Vektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{J}$  bezeichnet man dabei als **Leistungsdichte**  $p$ .

$$p = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J}. \quad (2.22)$$

Damit wird die in einem Gesamtvolumen  $\Omega$  umgesetzte elektrische Leistung zu

$$P = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = UI \quad [VA = W] \quad \dots \quad Watt. \quad (2.23)$$

# 3 Gleichstromschaltungen

## 3.1 Der einfache elektrische Stromkreis

Der einfache elektrische Stromkreis besteht zumindest aus einer Spannungs- bzw. Stromquelle, einem Verbraucherwiderstand und den leitenden, widerstandsbehafteten Verbindungen zur Quelle.

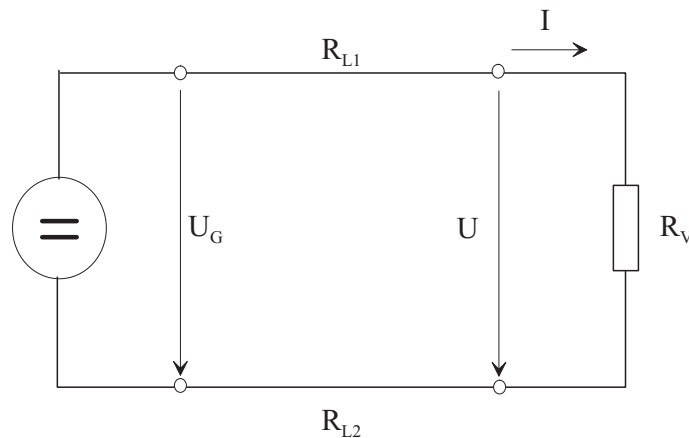


Abbildung 3.1: Einfacher elektrischer Stromkreis.

Die von der Gleichspannungsquelle erzeugte Spannung an den Klemmen wird durch den Spannungszählpfeil  $U_G$  dargestellt. Die Zuleitungswiderstände  $R_{L1}$  und  $R_{L2}$  bedeuten für den elektrischen Strom einen Widerstand. An den Klemmen des Verbrauchers  $R_V$  wird daher nur eine um den Spannungsabfall auf den Leitungen kleinere Spannung  $U$  auftreten. Das rechteckige Schaltsymbol stellt den elektrischen Widerstand  $R_V$  des Verbrauchers dar. In ebensolcher Darstellung können die Leitungswiderstände  $R_{L1}$  und  $R_{L2}$  im sogenannten Widerstandsersatzschaltbild, häufig nur als Ersatzschaltbild bezeichnet, dargestellt werden. Die dabei auftretenden elektrischen Spannungsabfälle werden wiederum durch Spannungszählpfeile dargestellt.

Im Ersatzschaltbild muß folgende Regelung eingehalten werden. Der Strom  $I$  fließt von der positiven Klemme der Spannungsquelle zur negativen. Ist die Richtung des Stromes  $I$  festgelegt, so sind die Zählpfeile der Spannungsabfälle über den Ohmschen Widerständen in derselben Richtung wie die des elektrischen Stromes  $I$  zu wählen. Im

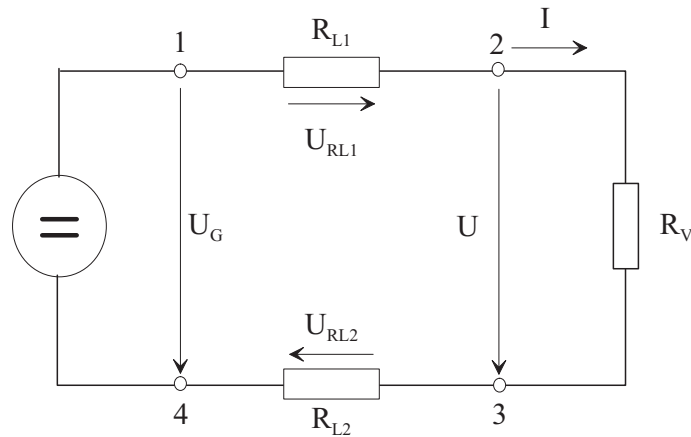


Abbildung 3.2: Ersatzschaltbild des einfachen Stromkreises.

Widerstandsersatzschaltbild Abbildung 3.2 sind die, auf die Leiterlänge verteilten Zuleitungswiderstände durch diskrete Widerstände  $R_{L1}$  und  $R_{L2}$  ersetzt. Damit gilt im Widerstandsersatzschaltbild, daß alle darin eingezeichneten Leitungen *ideal*, das heißt unendlich gut leitend sind. Entsprechend dem Ohmschen Gesetz errechnen sich die einzelnen Spannungsabfälle zu:

$$U_{RL1} = I R_{L1} \quad U_{RL2} = I R_{L2} \quad U = I R. \quad (3.1)$$

## 3.2 Zweipole

Im Ersatzschaltbild in Abbildung 3.2 werden nur Elemente mit zwei Anschlüssen verwendet. Derartige Schaltelemente bezeichnet man als **Zweipole**. Durch das Strom-Spannungsverhalten an den Klemmen wird der Zweipol in seinem elektrischen Verhalten eindeutig beschrieben.

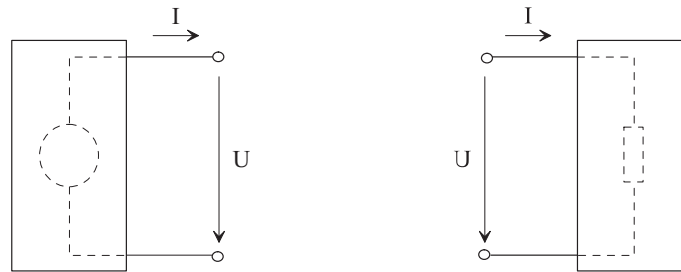


Abbildung 3.3: Verhältnisse an einem allgemeinen Zweipol.

Am linken Zweipol in Abbildung 3.3 werden die tatsächlichen Strom- und Span-

nungsverhältnisse an den Klemmen eines Erzeugers (Quelle) dargestellt. Strom- und Spannungszählpfeil sind entgegengesetzt gerichtet. Diese Richtungszuordnung wird als **Erzeugerpfeilsystem, EZS** bezeichnet. In strichelierter Weise ist beispielsweise eine schon beschriebene Gleichspannungsquelle eingezeichnet.

Auf der rechten Seite in Abbildung 3.3 sind Strom- und Spannungszählpfeil in gleicher Richtung dargestellt. Ein derartiges Klemmenverhalten charakterisiert den elektrischen Zweipol als Verbraucher. Diese Darstellung wird als **Verbraucherzählpfeilsystem, VZS** bezeichnet. Zur Beschreibung eines Ersatzschaltbildes wird in der Regel nur ein System verwendet. Im allgemeinen ist dies das Verbraucherzählpfeilsystem. Wird in diesen Arbeitsunterlagen nicht das VZS verwendet, so wird extra darauf hingewiesen.

**An einem Ohmschen Verbraucher ist das Produkt aus Strom mal Spannung, die elektrische Leistung oder auch Verlustleistung, stets positiv!**

Quellen werden solcher Art als **aktive** und Verbraucher als **passive** Zweipole bezeichnet.

### 3.2.1 Zusammenschaltung von Zweipolen

Durch die Zusammenschaltung von aktiven und passiven Zweipolen kann ein elektrisch beliebig komplexes Gebilde, das sogenannte **Netzwerk** entstehen. Zu dessen Analyse müssen bestimmte Regeln berücksichtigt werden.

#### Das erste Kirchhoffsche Gesetz

Aus der Kenntnis der Quellenfreiheit des elektrischen Strömungsfeldes (es gibt keine Quellen und Senken von  $\vec{J}$ ) kann zunächst der sogenannte **Knotenpunktsatz** oder das **erste Kirchhoffsche Gesetz** hergeleitet werden. Man betrachte folgende allgemeine Zusammenschaltung von Ohmschen Widerständen in Abbildung 3.4.

Bildet man darin über eine beliebig gewählte jedoch geschlossene Oberfläche  $\Gamma$  das Flächenintegral gemäß Gleichung 2.4

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (3.2)$$

so ergibt dies immer Null. Führt man weiter von allen Zu- und Abführungen zum Volumen das Integral aus, so ergeben sich nur Beiträge zum Gesamtintegral, wenn am entsprechenden Oberflächenelement  $d\vec{A}$  eine Stromdichte  $\vec{J}$  ungleich Null vorliegt. Durch die unterschiedlichen Richtungen der immer nach außen gerichteten Flächennormalen (Richtung von  $d\vec{A}$ ) ergeben sich die ins Volumen fließenden Ströme mit negativen, die



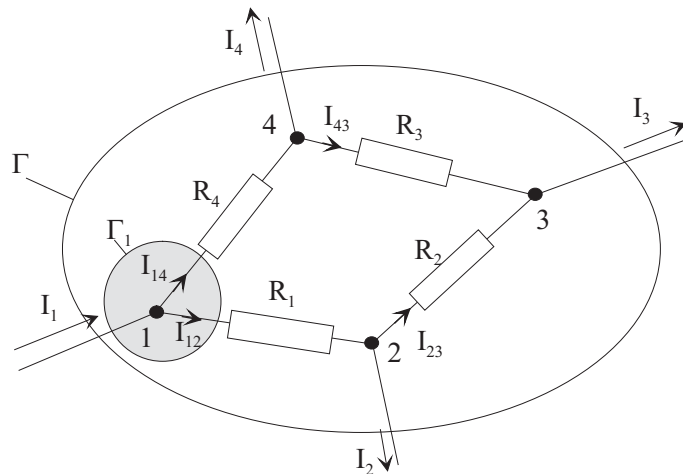


Abbildung 3.4: Zum ersten Kirchhoffschen Gesetz.

aus dem Volumen fließenden Ströme mit positiven Vorzeichen. Für das von  $\Gamma$  begrenzte Volumen folgt :

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad \text{bzw.} \quad I_1 = I_2 + I_3 + I_4. \quad (3.3)$$

**Die Summe der in ein geschlossenes Volumen** (in unserem Falle mit der Berandung  $\Gamma$ ) **hinein- und herausfließenden Ströme ist immer gleich Null.**

Reduziert man nun dieses Volumen  $\Gamma$  auf das Gebiet rund um einen Knoten, z.B. den Knoten 1 mit der Oberfläche  $\Gamma_1$ , so folgt:

$$-I_1 + I_{14} + I_{12} = 0 \quad \text{bzw.} \quad I_1 = I_{14} + I_{12} \quad (3.4)$$

Dies gilt für alle beliebigen Volumina in einem Netzwerk, also auch für jeden einzelnen Punkt einer Stromverzweigung (Knoten). Somit gilt für eine beliebige Anzahl von zu- und abfließenden Strömen in einem Knoten in einem allgemeinen Netzwerk (Abbildung 3.5):

**Die Summe aller zu- und abfließenden Ströme in einem Knoten eines elektrischen Netzwerks ist immer Null**

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (3.5)$$

Diese Beziehung wird als **das erste Kirchhoffsche Gesetz** bezeichnet. Oftmals wird dafür auch der Begriff **Knotenregel** verwendet.

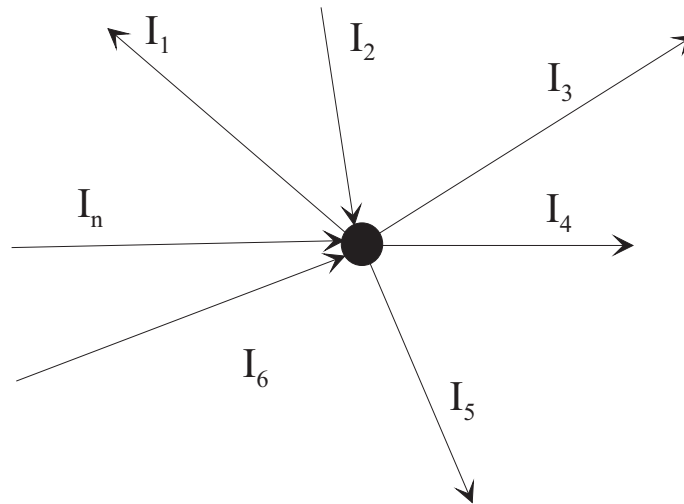


Abbildung 3.5: Knoten im Netzwerk mit n Strömen.

### Das zweite Kirchhoffsche Gesetz

Mit dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz werden die Spannungsverhältnisse in einem Netzwerk mit beliebig vielen Quellen und Verbrauchern beschrieben. Folgender Ausschnitt aus einem Netzwerk soll zur Beschreibung herangezogen werden:

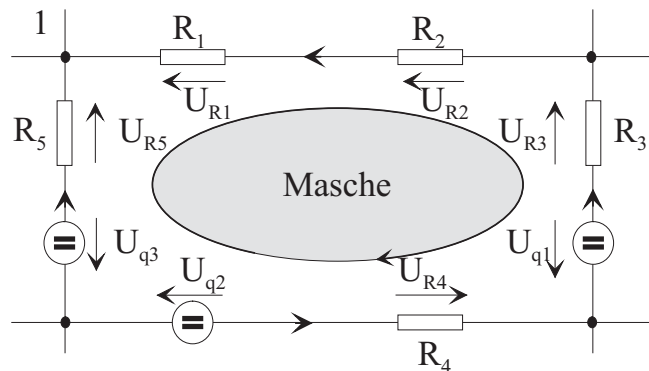


Abbildung 3.6: Zum zweiten Kirchhoffschen Gesetz.

Der Netzwerkausschnitt enthält drei Gleichspannungsquellen mit den Klemmenspannungen  $U_{q1}$ ,  $U_{q2}$  und  $U_{q3}$ . Entsprechend der Konvention, daß Klemmenspannung und Klemmenstrom bei Quellen entgegengerichtet sind, ist durch die Vorgabe der Zählpfeile für die Klemmenspannungen auch die Stromrichtung in diesen Zweigen festgelegt. Die Verbindung von einem Knoten zu einem benachbarten wird dabei als Zweig bezeichnet. Die Richtungen der Spannungsabfälle  $U_{R1}$  bis  $U_{R5}$  über den Widerständen  $R_1$  bis  $R_5$  sind durch die Richtungen der Ströme in den einzelnen Zweigen vorgegeben (Ver-

braucher, passive Zweipole). Mit den solcherart gefundenen Teilspannungen kann eine Spannungsbilanz entlang einer geschlossenen Schleife (Masche) gezogen werden.

Durchläuft man eine Masche, so stellt man fest, daß in den einzelnen Knoten unterschiedliche Potentiale vorherrschen. Man kann den Umlauf der Masche in einem beliebigen Knoten beginnen. Ebenso ist der Umlaufsinn wählbar. Durchläuft man eine Masche und beginnt beispielsweise im Knoten 1 mit dem Potential  $\phi_1$ , so stellt man fest, daß die Potentiale in den einzelnen Knoten der Masche unterschiedliche Werte aufweisen. Beendet man die Masche jedoch wieder im Ausgangsknoten 1, so muß dort wieder dasselbe Potential  $\phi_1$  erreicht werden. Das bedeutet, durch einen geschlossenen Maschenumlauf ist die gesamte, durchschrittene Potentialdifferenz **Null**.

Zunächst weist man allen Elementen im Ersatzschaltbild, d.h. sowohl an den aktiven als auch an den passiven Zweipolen die Spannungszählpfeile zu. Anschließend summiert man alle Teilspannungen entlang der gewählten Masche. Dabei werden die Teilspannungen, deren Richtungen dem Maschenumlaufsinne gleichen, positiv, alle anderen negativ, gezählt. Diese Summe muß Null ergeben. Für unsere Masche in Abbildung 3.6 folgt daher:

$$-U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} + U_{q1} - U_{R4} + U_{q2} - U_{q3} + U_{R5} = 0. \quad (3.6)$$

Nach dem Umformen von Gleichung 3.6, indem man die Spannungen aller aktiven Elemente auf einer Seite läßt, folgt:

$$-U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} - U_{R4} + U_{R5} = -U_{q1} - U_{q2} + U_{q3}. \quad (3.7)$$

Aus Gl. 3.7 erkennt man, daß die vorzeichenrichtige Summe aller Spannungsquellen der Summe aller Spannungen an den passiven Zweipolen entspricht. Für eine allgemeine Masche mit  $m$  Spannungsabfällen  $U_{Rm}$  an passiven Zweipolen und  $n$  Quellenspannungen  $U_{qn}$  gilt :

$$\sum_{j=1}^n U_{qj} - \sum_{i=1}^m U_{Ri} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^n U_{qj} = \sum_{i=1}^m U_{Ri}. \quad (3.8)$$

In Worten gefaßt, besagt **die Kirchhoffsche Maschenregel** bzw. **das zweite Kirchhoffsche Gesetz**:

**Die Summe aller Spannungen bei einem vollständigen Maschenumlauf ergibt immer Null!**

### Serienschaltung von Ohmschen Widerständen

Die **Serien- oder Reihenschaltung** von Ohmschen Widerständen wird am nachfolgendem Beispiel diskutiert. In Abbildung 3.7, links sind drei Widerstände in Reihe geschaltet. Diese werden von einer Gleichspannungsquelle mit einer Klemmenspannung  $U$  gespeist.

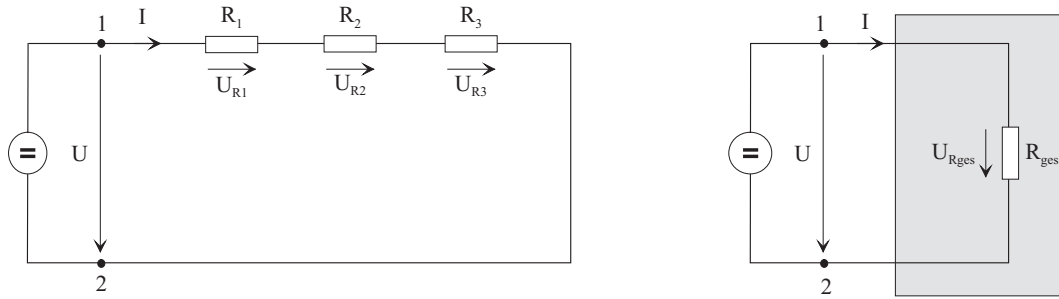


Abbildung 3.7: Serienschaltung Ohmscher Widerstände.

Die grundlegende Eigenschaft bei einer Serienschaltung von Widerständen besteht darin, daß **alle** Widerstände vom gleichen Strom  $I$  durchflossen werden. Bei Kenntnis der Widerstandswerte können die Spannungsabfälle an den Widerständen mittels des Ohmschen Gesetzes angegeben werden. An den Klemmen 1 und 2 liegt eine Spannung  $U$  und ein Strom  $I$  fließt in die Serienschaltung.

Dieses elektrische Verhalten an den Klemmen kann nun auch durch einen, an Stelle der Serienschaltung eingebrachten Ersatzzweipol mit dem Ersatzwiderstand  $R_{ges}$  nachgebildet werden (Abbildung 3.7, rechts). Bildet man in der Reihenschaltung 3.7, links den Maschenumlauf, so folgt dafür:

$$U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} = U \quad \text{bzw.} \quad IR_1 + IR_2 + IR_3 = U. \quad (3.9)$$

Für den Ersatzzweipol rechts gilt naturgemäß:

$$U_{R_{ges}} = U \quad \text{bzw.} \quad IR_{ges} = U. \quad (3.10)$$

Soll das Klemmenverhalten beider Schaltungen gleich sein, so müssen sich der Strom  $I$  und die Spannung  $U$  an den Klemmen gleichen. Die Gleichsetzung der Spannung  $U$  aus den Gleichungen 3.9 und 3.10 ergibt:

$$IR_1 + IR_2 + IR_3 = IR_{ges}, \quad (3.11)$$

und die Division durch den Strom  $I$  führt zum Ersatzwiderstand der Reihenschaltung:

$$R_1 + R_2 + R_3 = R_{ges}. \quad (3.12)$$

**Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung errechnet sich aus der Summe aller Einzelwiderstände.**

Allgemein gilt für die Serienschaltung von  $n$  Ohmschen Widerständen:

$$R_{ges} = \sum_{i=1}^n R_n. \quad (3.13)$$

Durch die Reihenschaltung von Ohmschen Widerständen kann folglich eine Erhöhung des Gesamtwiderstandes erreicht werden.

### Parallelschaltung von Ohmschen Widerständen

In ähnlicher Weise wie bei der Behandlung der Serienschaltung kann hier für die Parallelschaltung von Widerständen ein Ersatzzweipol mit elektrisch gleichem Klemmenverhalten gefunden werden. Abbildung 3.8, links zeigt drei parallel geschaltete Ohmsche Widerstände. Diese Schaltung wird wieder von einer Spannungsquelle mit der Klemmenspannung  $U$  gespeist. In die Parallelschaltung fließt der Strom  $I$ .

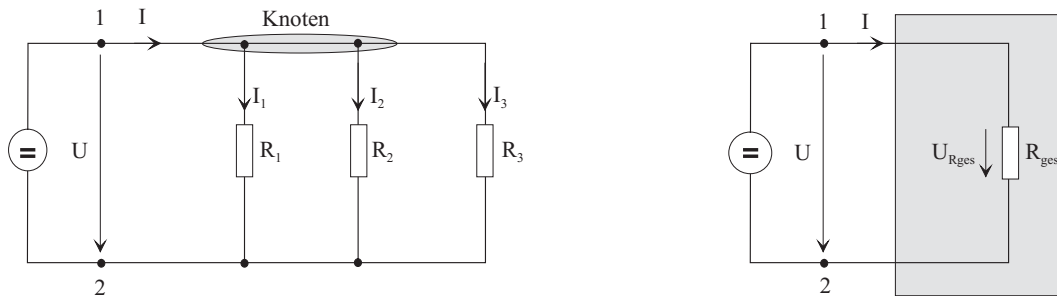


Abbildung 3.8: Parallelschaltung Ohmscher Widerstände.

Alle parallel geschalteten Widerstände liegen an derselben Spannung  $U$ . Je nach Größe der einzelnen Widerstände wird nun über diese ein, dem Ohmschen Gesetz entsprechender Strom fließen. Gemäß der Knotenregel (erstes Kirchhoffsches Gesetz) muß die Summe aller Ströme an einem Knoten Null ergeben. Für diesen Fall gilt daher:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}. \quad (3.14)$$

Für den Ersatzzweipol mit dem Ersatzwiderstand  $R_{ges}$  gilt an den Klemmen:

$$I = \frac{U}{R_{ges}}. \quad (3.15)$$

Klemmenstrom- und Spannung müssen wieder gleich sein. Das Gleichsetzen des Stromes  $I$  ergibt:

$$\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \frac{U}{R_{ges}}, \quad (3.16)$$

und die Division durch  $U$  führt zu:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{ges}}. \quad (3.17)$$

Für eine Parallelschaltung mit  $m$  Ohmschen Widerständen gilt allgemein:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{R_i}. \quad (3.18)$$

**Bei der Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte aller Einzelwiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes**

In Leitwerten geschrieben lautet Gleichung 3.18

$$G_{ges} = \sum_{i=1}^m G_i. \quad (3.19)$$

Führt man dies beispielsweise für zwei Widerstände mit  $R_1 = 2\Omega$  und  $R_2 = 4\Omega$  aus, so folgt :

$$R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\Omega.$$

Der Ersatzwiderstand  $R_{ges}$  einer Parallelschaltung ist kleiner als der kleinste Einzelwiderstand! Durch eine Parallelschaltung wird immer eine Verminderung des Gesamtwiderstandes erreicht.

### 3.2.2 Zusammenschaltung von Quellen mit Verbrauchern

Im Ersatzschaltbild eines einfachen elektrischen Stromkreises (3.2) wurde eine Gleichspannungsquelle mit der Klemmenspannung  $U_G$  mit einer Serienschaltung von drei Widerständen verbunden. Das Verhalten der Quellen ist im allgemeinen nicht unabhängig von den an den Klemmen zugeschalteten Netzwerken. Die Eigenschaften von Spannungs- und Stromquellen bei unterschiedlicher Belastung werden nachfolgend erläutert.

#### Allgemeine Eigenschaften von Quellen

Die möglichen Belastungen von Quellen liegen zwischen zwei Grenzfällen. In Abbildung 3.9 sind dafür die entsprechenden aktiven Zweipole und deren Beschaltung dargestellt.

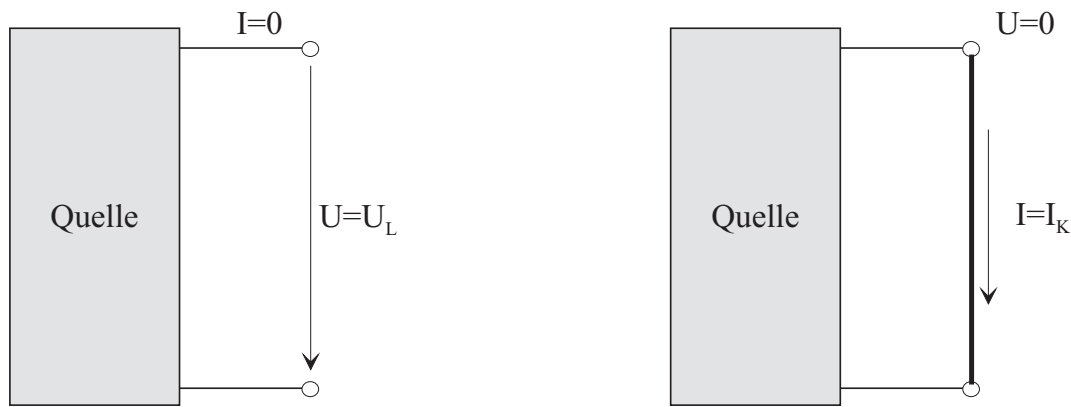


Abbildung 3.9: Leerlauf und Kurzschluß einer Quelle.

Die Quelle auf der linken Seite ist unbelastet, d.h. es ist kein Widerstand (gleichbedeutend mit  $R = \infty$ ) zugeschaltet. Diesen Belastungszustand nennt man **Leerlauf**. An den Klemmen herrscht die Leerlaufspannung  $U = U_L$ , der Strom muß  $I = I_L = 0$  sein. Auf der rechten Seite in Abbildung 3.9 ist der zweite Extremfall einer Belastung dargestellt. An den Klemmen der Quelle wird ein unendlich gut leitender Widerstand, d.h.  $R = 0$  zugeschaltet. Diese Belastung wird als **Kurzschluß** bezeichnet. Es fließt der Kurzschlußstrom  $I = I_K$ . Bedingt durch den Ohmschen Widerstand  $R = 0$  an den Klemmen kann kein Spannungsabfall entstehen, sodaß im Kurzschlußfall für die Klemmenspannung  $U = U_K = 0$  gelten muß. Nachdem zu beobachten ist, daß im Kurzschlußfalle der Kurzschlußstrom, obwohl  $R = 0$  gilt, nicht unendlich hoch wird, muß eine genauere Beschreibung der Quellen gefunden werden.

### Die belastete Spannungsquelle

Eine **ideale** Spannungsquelle soll, unabhängig von der angeschlossenen Last, immer eine konstante Klemmenspannung  $U$  liefern. Dies widerspricht den Erfahrungstatsachen. Vielmehr ist feststellbar, daß ein erhöhter Stromfluß einen nicht unbedeutenden Spannungsrückgang an den Klemmen der Quelle zur Folge hat. Im Inneren einer Gleichspannungsquelle (z.B. Akkumulator, Batterie) befinden sich widerstandsbehaftete Leitungen, wie Wicklungsdrähte, Elektrolyte, ...). In Summe wird daher, abhängig von der Stromstärke  $I$  auch im Inneren der Quelle ein Spannungsabfall auftreten, sodaß an den Klemmen der Quelle eine um diesen Spannungsabfall verringerte Spannung  $U$  herrschen wird. Im Ersatzschaltbild einer **realen** Spannungsquelle kann man dies durch einen in Reihe geschalteten Innenwiderstand  $R_i$  berücksichtigen (Abbildung 3.10):

Über den Lastwiderstand  $R_L$  fließt der Strom  $I_L$ . Am Innenwiderstand  $R_i$  der Quelle fällt der Spannungsfall  $U_i$  ab. Entsprechend der Maschenregel ergibt sich die Klemmen-

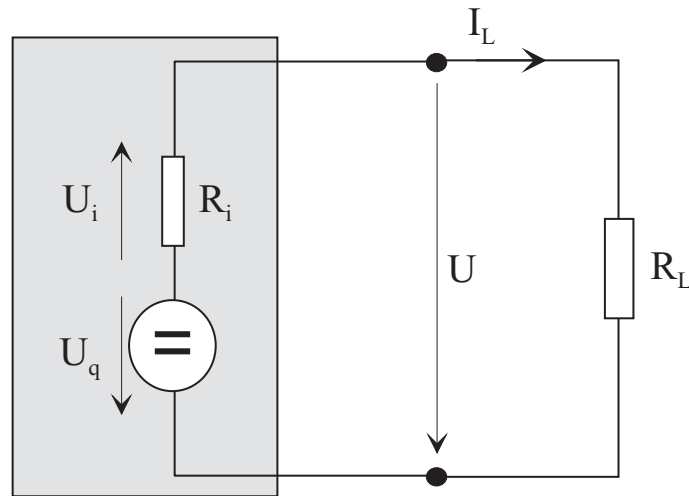


Abbildung 3.10: Elektrische Verhältnisse an einer realen Spannungsquelle bei allgemeiner Belastung.

spannung  $U$  aus:

$$U_q = U_i + U \quad \text{bzw.} \quad U_q = I_L(R_i + R_L). \quad (3.20)$$

Der dabei fließende Strom wird durch die beiden Widerstände  $R_i$  und  $R_L$  begrenzt:

$$I_L = \frac{U_q}{R_i + R_L}. \quad (3.21)$$

Mit dieser Beziehung folgt aus Gleichung 3.20 für die Klemmenspannung

$$U = I_L R_L = \frac{U_q}{R_i + R_L} R_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_q = U_q - I_L R_i. \quad (3.22)$$

**Der Innenwiderstand einer Spannungsquelle soll möglichst klein, im Idealfall Null sein, um die Konstanz der Klemmenspannung bei unterschiedlichen Belastungen zu gewährleisten!**

Diskutiert man die Beziehung  $U = U_q - I_L R_i$ , so erkennt man, daß für den Strom  $I_L = 0$  die Klemmenspannung  $U$  gleich der Quellenspannung  $U_q$ , gleichbedeutend mit der Leerlaufspannung  $U_L$ , den größten Wert annimmt. Bei Kurzschluß hingegen wird der Kurzschlußstrom  $I_K$  nur durch den inneren Widerstand  $R_i$  der Quelle begrenzt. Dieses Quellenverhalten kann in einem Spannungs-Stromdiagramm dargestellt werden (Abbildung 3.11):



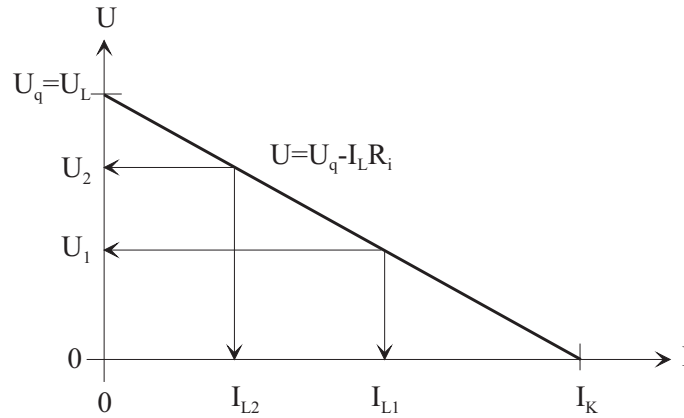


Abbildung 3.11: Belastungskennlinie einer realen Spannungsquelle bei allgemeiner Belastung.

Durch zwei Belastungen mit unterschiedlichen Widerständen  $R_{L1}$  und  $R_{L2}$  können die Klemmenspannungen  $U_{L1}$  und  $U_{L2}$  mit den Strömen  $I_{L1}$  und  $I_{L2}$  gemessen werden. Daraus kann man den Innenwiderstand der Spannungsquelle durch

$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_{L1} - I_{L2}} \quad (3.23)$$

ermitteln.

### Die belastete Stromquelle

Bei der Spannungsquelle war gefordert, daß an deren Klemmen eine von der Belastung unabhängige, konstante Spannung vorherrscht. In ähnlicher Weise kann man auch fordern, daß eine Quelle einen konstanten Strom liefern soll. Ein aktiver Zweipol, der einen gleichbleibenden Strom in ein Netzwerk einspeist, nennt man **Stromquelle**. Auch in diesem Fall wird eine, von der Belastung beeinflusste Verkleinerung des Stromes aus der Stromquelle feststellbar sein. Das Verhalten kann mit Hilfe des in Abbildung 3.12 dargestellten Ersatzschaltbildes beschrieben werden:

Die Stromquelle liefert einen Quellenstrom  $I_q$ . Parallel zu dieser wird ein innerer Leitwert  $G_i = \frac{1}{R_i}$  geschaltet. Entsprechend der Größe des Lastwiderstandes  $R_L$  bzw. dessen Leitwertes  $G_L$  wird nun eine Spannung  $U$  an den Klemmen vorherrschen, da ja

$$U = I_L R_L = I_L \frac{1}{G_L} \quad (3.24)$$

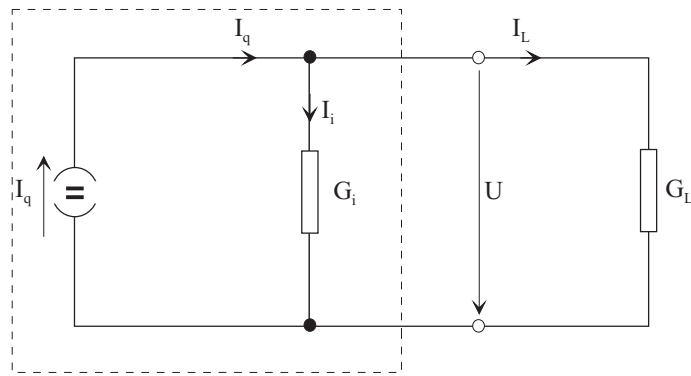


Abbildung 3.12: Elektrische Verhältnisse an einer realen Stromquelle bei allgemeiner Belastung.

gilt. Diese Spannung bestimmt auch den über den inneren Leitwert  $G_i$  fließenden Strom  $I_i$  :

$$I_i = U G_i. \quad (3.25)$$

Um diesen Wert  $I_i$  ist nun der Strom  $I_L$  an den Klemmen geringer als der Quellenstrom  $I_q$ , da ja am Knoten im Inneren der Quelle die Knotenregel gilt:

$$I_q = I_i + I_L = (G_i + G_L)U. \quad (3.26)$$

Mit der Beziehung für die Klemmenspannung aus Gleichung 3.26

$$U = \frac{I_q}{G_i + G_L} \quad (3.27)$$

errechnet sich der Strom an den Klemmen zu

$$I_L = G_L U = \frac{G_L}{G_i + G_L} I_q = I_q - G_i U. \quad (3.28)$$

Je höher der Innenwiderstand  $R_i$  bzw. je niedriger dessen Leitwert  $G_i$  einer Stromquelle ist, umso geringer ist die Abhängigkeit des Klemmenstromes von der Belastung. Bei einer idealen Stromquelle ist der innere Widerstand unendlich groß. Dies wird im Schaltsymbol der Stromquelle durch die Unterbrechung des Kreises dargestellt.

Das allgemeine Verhalten einer Stromquelle bei unterschiedlichen Belastungen läßt sich wieder durch ein Kennlinie, in diesem Fall durch die Strom- Spannungskennlinie darstellen (Abbildung 3.13).

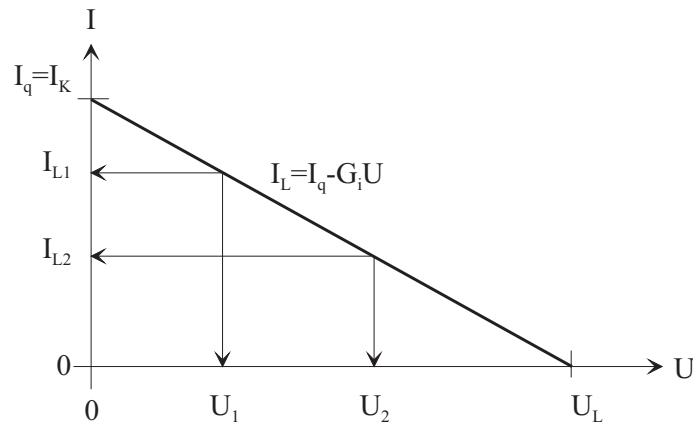


Abbildung 3.13: Belastungskennlinie einer realen Stromquelle bei allgemeiner Belastung.

Auch in diesem Fall kann durch zwei unterschiedlichen Belastungen der Innenwiderstand, im jetzigen Falle der innere Leitwert  $G_i$  durch

$$G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{I_{L1} - I_{L2}}{U_2 - U_1} \quad (3.29)$$

ermittelt werden.

### 3.2.3 Leistungsanpassung

In den vorherigen Abschnitten wurde dargestellt, daß reale Quellen unterschiedlichen Belastungen ausgesetzt werden können. Es ist nun sinnvoll, für eine gegebene Quelle, das heißt, mit vorgegebener Quellenspannung  $U_q$  und gegebenem inneren Widerstand  $R_i$  eine optimale Belastung zu finden. Das Ziel dabei ist, daß die Quelle dem Verbraucher (der Last) bei möglichst geringen Verlusten eine maximale Leistung abgeben kann. Verluste werden dabei sowohl in der Quelle, bedingt durch  $R_i$  und in den Zuleitungen entstehen. Bei der Herleitung des optimalen Belastungspunktes müssen diese Widerstände unbedingt mitberücksichtigt werden.

In Abbildung 3.14 sind die Zählpfeile bei einem allgemeinen Verbraucherwiderstand  $R_v$  dargestellt. Die von der Quelle gelieferte Leistung wird darin mit  $P_q$  bezeichnet. Sie errechnet sich zu :

$$P_q = \frac{U_q^2}{R_i + R_v}. \quad (3.30)$$

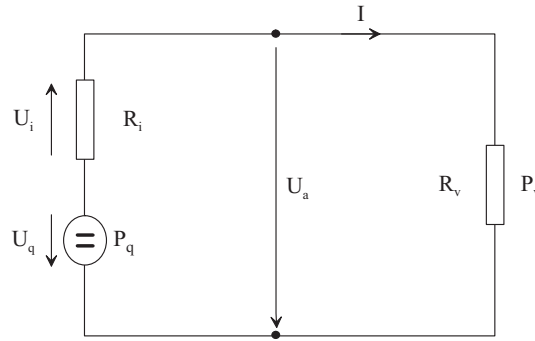


Abbildung 3.14: Reale Spannungsquelle mit Verbraucher.

Der durch alle Widerstände begrenzte Strom  $I$  entspricht der Beziehung:

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_v}. \quad (3.31)$$

Daraus folgt die Leistung  $P_v$  am Verbraucher:

$$P_v = I^2 R_v = \frac{U_q^2}{(R_i + R_v)^2} R_v. \quad (3.32)$$

Im Verbraucherwiderstand  $R_v$  ist auch der Widerstandsanteil der Zuleitungen mitberücksichtigt. Die Leistung am Verbraucher ( $P_v = f(R_v)$ ) ist somit in zweiter Ordnung vom Lastwiderstand  $R_v$  abhängig.

Für  $R_v = 0$ , dem Kurzschlußfall ist die Verlustleistung  $P_v = 0$ . Ebenso ist die Leistung im Leerlauf, das heißt, bei  $R_v = \infty$  gleich Null. Zwischen zwei Nullstellen einer Funktion muß immer ein Extremalwert bestehen. Aus der Differentiation der Verlustleistung  $P_v$  (Gleichung 3.32) nach dem Verlustwiderstand  $R_v$  und anschließendem Nullsetzen erhält man den optimalen Wert für  $R_v$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_v}{\partial R_v} &= U_q^2 \left[ \frac{1}{(R_i + R_v)^2} + \frac{-2R_v}{(R_i + R_v)^3} \right] \\ &= U_q^2 \frac{R_i + R_v - 2R_v}{(R_i + R_v)^3} = U_q^2 \frac{R_i - R_v}{(R_i + R_v)^3} = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Somit ergibt sich der optimale Belastungswiderstand der Quelle zu

$$R_i = R_v. \quad (3.34)$$

Dieser Belastungszustand wird als Leistungsanpassung bezeichnet. **Bei Widerstandsgleichheit zwischen Quellen-Innenwiderstand und Lastwiderstand, d.h.  $R_i =$**

$R_v$ , läßt sich an einem Verbraucher die maximale Leistungsausbeute erzielen!  
Mit diesen Widerstandswerten errechnet sich die maximale Leistung an  $R_v$  zu:

$$P_{v\max} = \frac{U_q^2}{4R_i} = \frac{U_q^2}{4R_v}. \quad (3.35)$$

Für diese Leistung am Verbraucher muß die Quellenleistung

$$P_q = \frac{U_q^2}{2R_i} = \frac{U_q^2}{2R_v} \quad (3.36)$$

betragen. Definiert man noch den sogenannten **Wirkungsgrad**  $\eta$  als das Verhältnis der Leistung am Verbraucher zur Leistung der Quelle

$$\eta = \frac{P_v}{P_q} = \frac{R_v}{R_i + R_v}, \quad (3.37)$$

so erhält man einen maximal möglichen Wirkungsgrad von

$$\eta_{\max} = \frac{P_{v\max}}{P_q} = 0,5. \quad (3.38)$$

Der Verlauf des Wirkungsgrades, abhängig vom Verhältnis der Widerstände  $\frac{R_v}{R_i}$  ist in Abbildung 3.15 dargestellt.

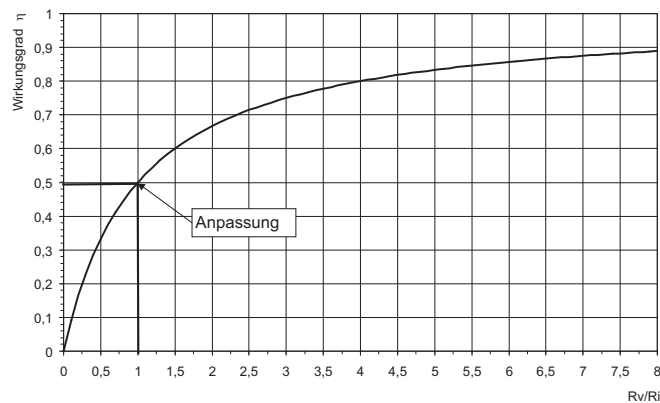


Abbildung 3.15: Abhängigkeit des Wirkungsgrades  $\eta$  vom Widerstandsverhältnis  $R_v$  zu  $R_i$ .

## 4 Analyse linearer Gleichstromnetzwerke

Betrachtet man die Strom/Spannungsbeziehungen energiespeichernder Netzwerkelemente, also von Kondensatoren und Spulen, so erscheinen darin *Zeitableitungen* der Spannungen bzw. der Ströme. Eine Analyse des Netzwerkes führt daher immer zu *Integro-differentialgleichungen*. Für das Verstehen der grundsätzlichen Methoden zur Behandlung von Netzwerken kann dies vermieden werden, indem man zunächst nur Netzwerke mit Quellen und ohmschen Widerständen, das heißt *resistive Netzwerke* betrachtet. Beschränkt man sich weiters auch auf Quellen mit Gleichspannungen und Gleichströmen, so erhält man letztendlich reelle algebraische Gleichungssysteme, die dann noch mit geeigneten Methoden zu lösen sind. In diesem Fall werden alle im Netzwerk vorkommenden Ströme und Spannungen, die ja *zeitlich konstant* sind, durch Großbuchstaben dargestellt ( $U_{R_1}, I, \dots$ ).

## 4.1 Äquivalenz von Quellen

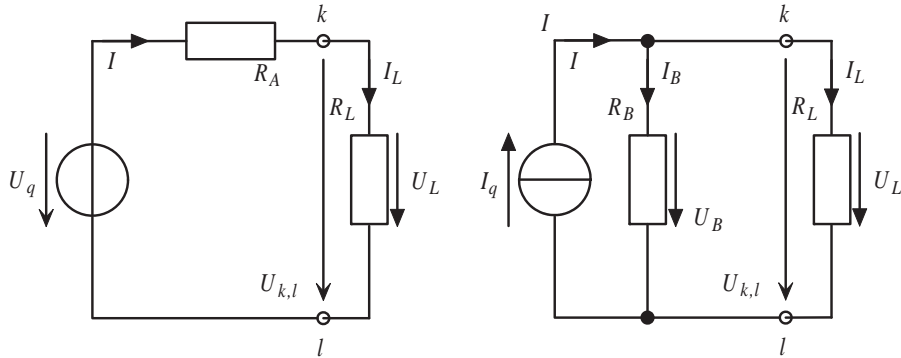


Abbildung 4.1: Äquivalenz von realen Quellen.

$$U_{k,l} = U_q \frac{R_L}{R_A + R_L} \qquad I_L = I_q \frac{R_B}{R_B + R_L}$$

$$I_L = \frac{U_{k,l}}{R_L} = \frac{U_q}{R_A + R_L} \qquad U_{k,l} = R_L I_L = R_B I_q \frac{R_L}{R_B + R_L}$$

Äquivalenz, wenn  $R_A = R_B = R_i$   
und  $U_q = R_i I_q$

$$I_L = I_q \frac{R_i}{R_i + R_L} \qquad U_{k,l} = U_q \frac{R_L}{R_i + R_L}$$

Eine Spannungsquelle  $U_q$  mit einem Innenwiderstand  $R_i$  in Serie ist äquivalent zu einer Stromquelle  $I_q$  und einem parallelen Innenwiderstand  $R_i$ , wenn bei Verwendung des Verbraucherzählpfeilsystems (VZS) folgender Zusammenhang gilt.

$$U_q = R_i I_q \qquad (4.1)$$

## 4.2 Zusammenschaltung von Quellen

Treten mehrere Quellen in einem Netzwerk auf, so können diese zusammengefaßt werden. Liegen mehrere Spannungsquellen in Serie, so werden die Teilspannungen unter Berücksichtigung der Zählpfeile addiert (Abb. 4.2(a)). Liegen mehrere Stromquellen parallel, so

könne diese, wieder unter Berücksichtigung der Zählpfeile, zu einer Stromquelle zusammengefaßt werden (Abb. 4.2(b)).

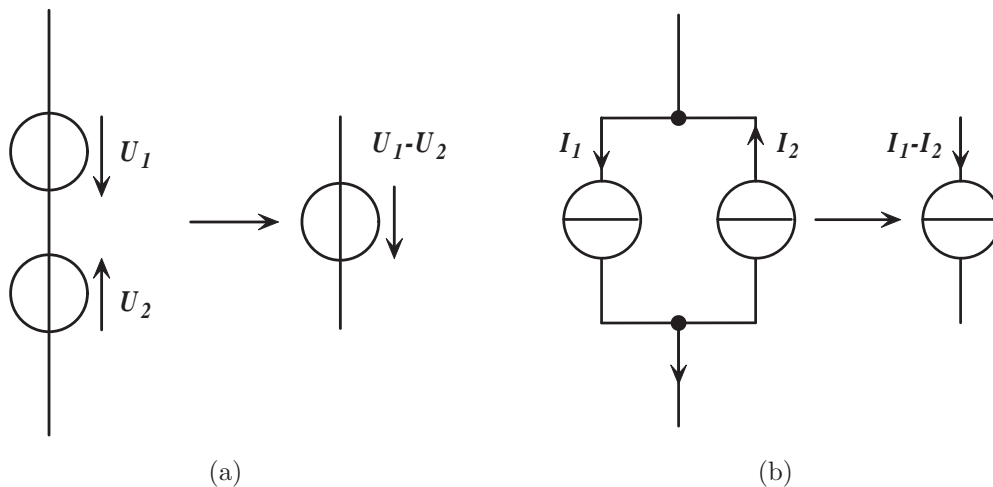


Abbildung 4.2: (a) Serienschaltung (b) Parallelschaltung

### 4.2.1 Quellenvervielfachung

Spannungsquellen können nur dann *parallel* geschaltet werden, wenn sie dieselbe Quellenspannung besitzen (Abb. 4.3(a)). Stromquellen können nur dann in *Serie* geschaltet werden, wenn sie dieselbe Stromstärke besitzen (Abb. 4.3(b)).

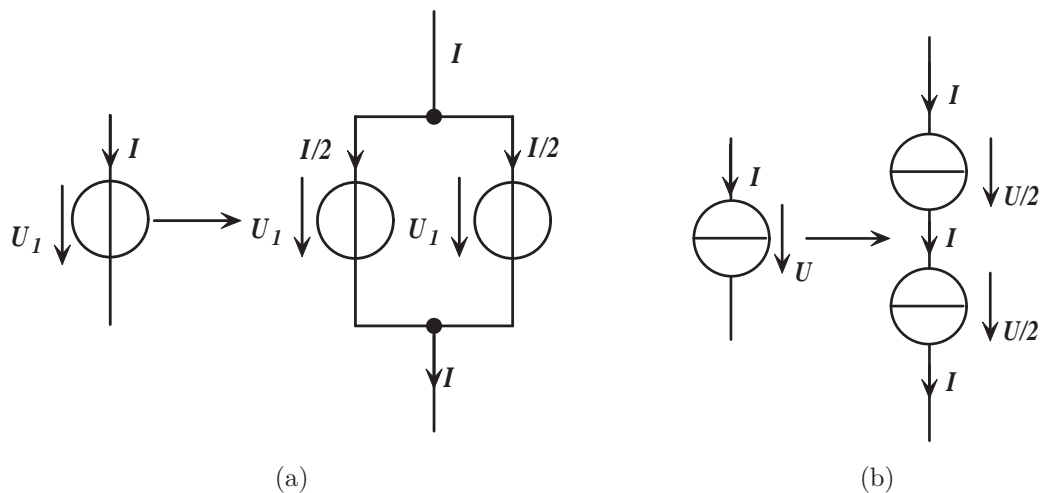


Abbildung 4.3: Quellenvervielfachung (a) Spannungsquellen (b) Stromquellen



### 4.3 Ersatzquellenverfahren

Sind in einem Netzwerk mehrere Quellen und Widerstände vorhanden, so können diese bezüglich zweier Knoten ( $k, l$ ) im Netzwerk durch

- eine Spannungsquelle  $U_{qA}$  mit einem seriellen Innenwiderstand  $R_A$  (*Theveninquelle*)
- eine Stromquelle  $I_{qA}$  mit einem parallelen Innenwiderstand  $R_A$  (*Nortonquelle*)

ersetzt werden (Abb. 4.4). Dabei ermittelt man die Quellenspannung  $U_{qA}$  der Erstzspan-

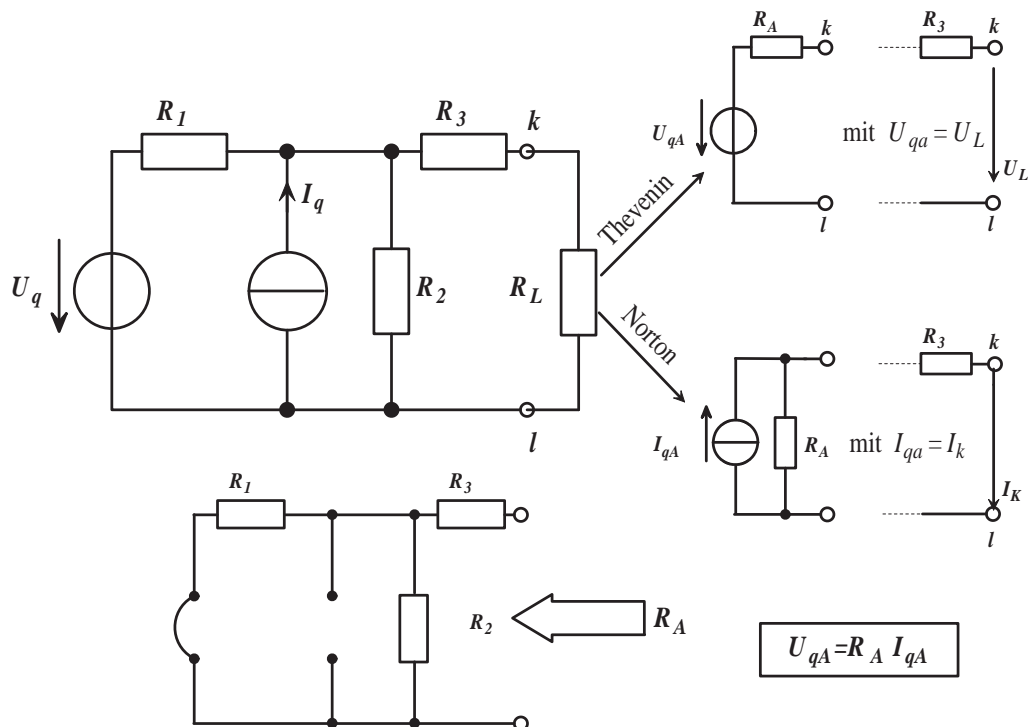


Abbildung 4.4: Thevenin- und Nortonquelle.

nungsquelle als *Leerlaufspannung* bezüglich der Klemmen ( $k, l$ ), den Quellenstrom  $I_{qA}$  der Ersatzstromquelle als den *negativen Kurzschlußstrom* über die Klemmen ( $k, l$ ) und den Innenwiderstand der Quelle als Gesamtwiderstand der zu ersetzenden Schaltung, wobei alle Spannungsquellen durch *Kurzschlüsse*, alle Stromquellen durch *Leerläufe* ersetzt werden. Zwischen diesen Größen gilt natürlich wieder der Zusammenhang.

$$U_{qA} = R_A I_{qA} \quad (4.2)$$

## 4.4 Überlagerungsprinzip, Superpositionsprinzip

Sind in einem *linearen* Netzwerk mehrere Quellen (=Ursachen) vorhanden, die an irgendeiner Stelle des Netzwerkes einen Strom oder eine Spannung (=Gesamtwirkung) erzeugen, so läßt sich diese Gesamtwirkung auch als Summe der Einzelwirkungen, die jede Quelle für sich erzeugt, ermitteln (Abb. 4.5). In diesem Falle werden alle anderen Quellen durch ihre Innenwiderstände (Kurzschluß bei Spannungsquellen, Leerlauf bei Stromquellen) ersetzt.

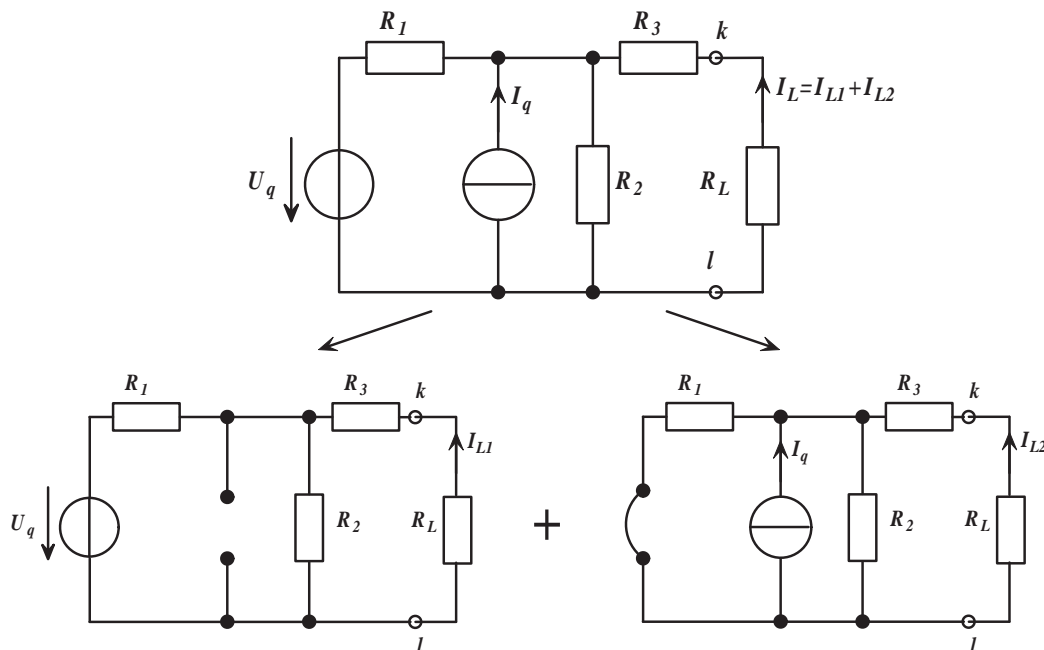


Abbildung 4.5: Überlagerungsprinzip.

Allgemein läßt sich z.B. die Gesamtspannung  $U_{R_j}$  an einem Widerstand  $R_j$  folgendermaßen als Summe der Wirkungen aller Quellen ( $n$  Spannungsquellen  $U_q$ ,  $m$  Stromquellen  $I_q$ ) darstellen

$$U_{R_j} = \sum_{k=1}^n c_k U_{qk} + \sum_{l=1}^m c_l I_{ql}, \quad (4.3)$$

wobei  $c_k$  und  $c_l$  entsprechende konstante Koeffizienten darstellen.

## 4.5 Das elektrische Netzwerk als Graph

### 4.5.1 Topologische Grundbegriffe

Die Lehre der Anordnung geometrischer Gebilde im Raum wird *Topologie* genannt. Die im Gleichstromfalle aus den Zweipolen *Widerstand*, *reale Quelle* und *ideale Quelle* zusammengesetzten elektrischen Netzwerke können meist zweidimensional dargestellt werden (*planare* Netzwerke).

Abbildung 4.6 zeigt ein Gleichspannungsnetzwerk mit 4 Quellen und 7 ohmschen Widerständen. Man erkennt in diesem Netzwerk  $k=5$  Knoten und  $z=7$  Zweige.

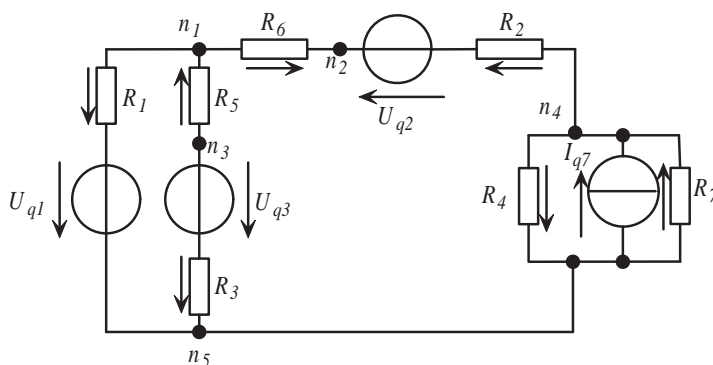


Abbildung 4.6: Gleichspannungsnetzwerk.

Zeichnet man nun nur diese Knoten und Zweige ohne elektrische Bauelemente, so erhält man den *Graphen* des Netzwerkes (Abb. 4.7 (a)). Ordnet man den Zweigen auch noch eine Richtung zu, so erhält man den *gerichteten Graphen* des Netzwerkes mit  $k=5$  Knoten und  $z=7$  Zweigen (Abb. 4.7 (b)).

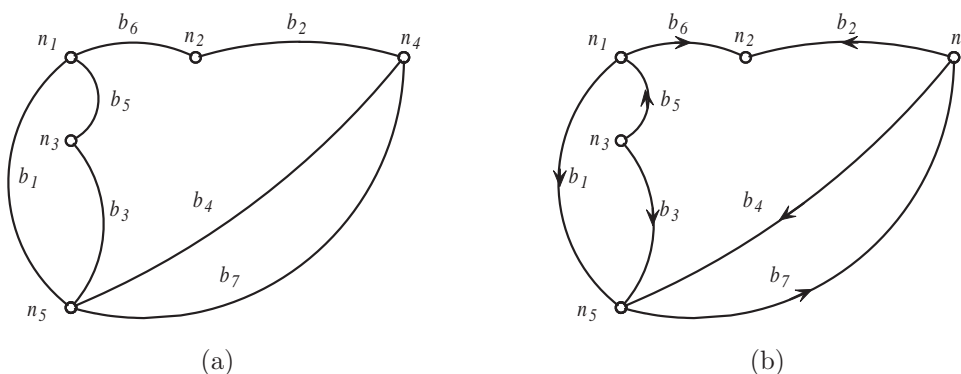


Abbildung 4.7: (a) Graph (b) gerichteter Graph.

In einem *Knoten* beginnen oder enden Zweige. (Ausnahme: *isolierter Knoten*)

Der *Grad* eines Knotens entspricht der Anzahl der Zweige, die in ihm beginnen oder enden. Der Grad des Knotens  $n_1$  in Abb. 4.7 (a) ist gleich 3.

Ein *Pfad* ist ein Teilgraph.

Eine *Masche*  $m$  (Maschen  $m_1$  in Abb. 4.8 (a)) ist ein Pfad, der geschlossen ist (Anfangs- und Endknoten sind identisch).

Ein *vollständiger Baum*  $t$  des Graphen (Abb. 4.8 (b)) ist zusammenhängend, verbindet alle Knoten und bildet keine Maschen. Es gibt mehr als einen vollständigen Baum. Die Zweige des Baumes nennt man *Baumzweige* ( $b_1, b_2, b_3$  und  $b_4$ ), die verbleibenden Zweige nennt man *Co-Baumzweige* oder *Maschenzweige* ( $b_5, b_6$  und  $b_7$ ). Man erhält immer  $k - 1$  Baumzweige und  $z - (k - 1)$  Co-Baumzweige.

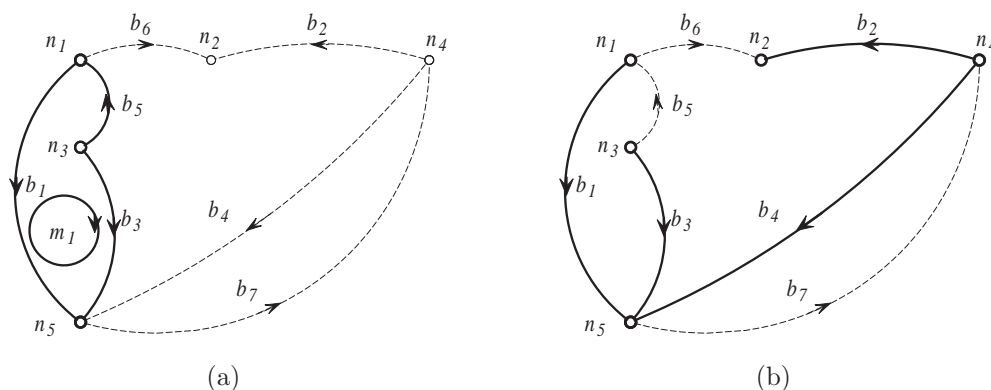


Abbildung 4.8: (a) Masche  $m$  (b) vollständiger Baum  $t$ .

Eine *Schnittmenge*  $c$  (Abb. 4.9) teilt den Graphen in zwei, nicht zusammenhängende Teilgraphen, indem eine minimale Anzahl an Zweigen geschnitten wird. Jeder Schnittmenge wird eine Richtung zugeordnet.

### 4.5.2 Fundamentales Schnittmengensystem und fundamentales Maschensystem

Fundamentale Schnittsysteme und fundamentale Maschensysteme lassen sich am einfachsten mit Hilfe eines *vollständigen Baumes* und des dazugehörigen *Co-Baumes* bilden.

Eine *fundamentale Schnittmenge* schneidet genau einen *Baumzweig* und sonst lauter *Co-Baumzweige* (Abb. 4.10 (a)). Mit diesem Baumzweig dürfen keine weiteren Schnittmengen gebildet werden. Das System dieser  $(k - 1)$  Schnittmengen ( $(k - 1)$  ist die Anzahl der Baumzweige) ist ein *fundamentales Schnittmengensystem*.

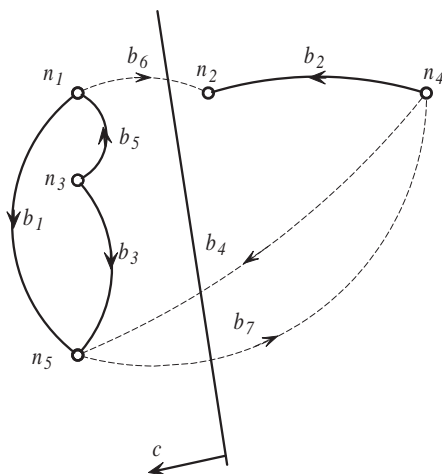


Abbildung 4.9: Schnittmenge  $c$ .

Eine fundamentale Masche besitzt genau einen *Co-Baumzweig* und sonst lauter Baumzweige (Abb. 4.10 (b)). Mit diesem Co-Baumzweig dürfen keine weiteren Maschen gebildet werden. Das System dieser  $z - (k - 1)$  Maschen ( $z - (k - 1)$ ) ist die Anzahl der Co-Baumzweige) ist ein *fundamentales Maschensystem*.

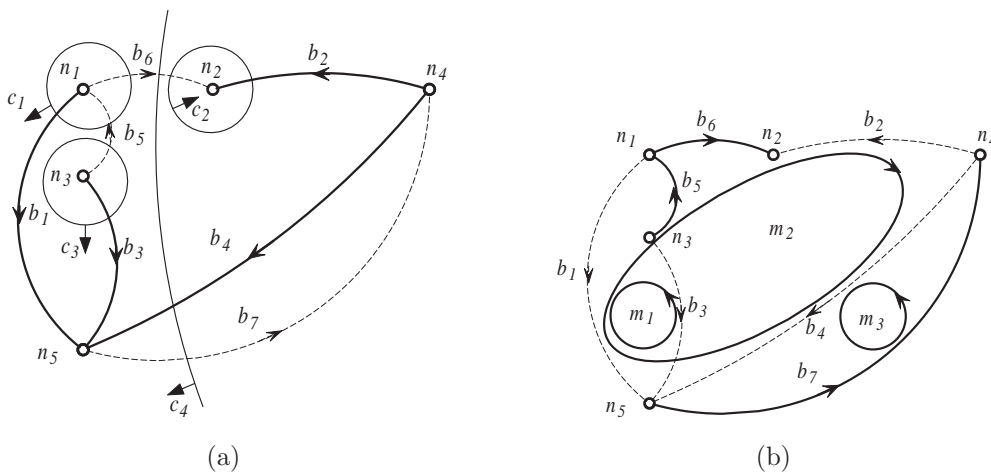


Abbildung 4.10: (a) fundamentale Schnittmengen (b) fundamentale Maschen.

## 4.6 Die Zweigstromanalyse

In einem Netzwerk mit  $z$  Zweigen (und  $k$  Knoten) gibt es in jedem Zweig  $j$  zwei unbekannte elektrische Größen, die Zweigspannung  $U_{zj}$  und den Zweigstrom  $I_{zj}$ . Im gesamten Netzwerk gibt es daher  $2 \times z$  unbekannte Größen, zu deren Lösung man  $2 \times z$  linear unabhängige Gleichungen benötigt. Abbildung 4.11 (a) zeigt ein Netzwerk mit vier Knoten ( $k=4$ ) und sechs Zweigen ( $z=6$ ), Abbildung 4.11 (b) zeigt den gerichteten Graphen dieses Netzwerkes. Im Zweig  $z_1$  befindet sich eine Spannungsquelle  $U_{q1}$ , im Zweig  $z_6$  eine Stromquelle  $I_{q6}$ .

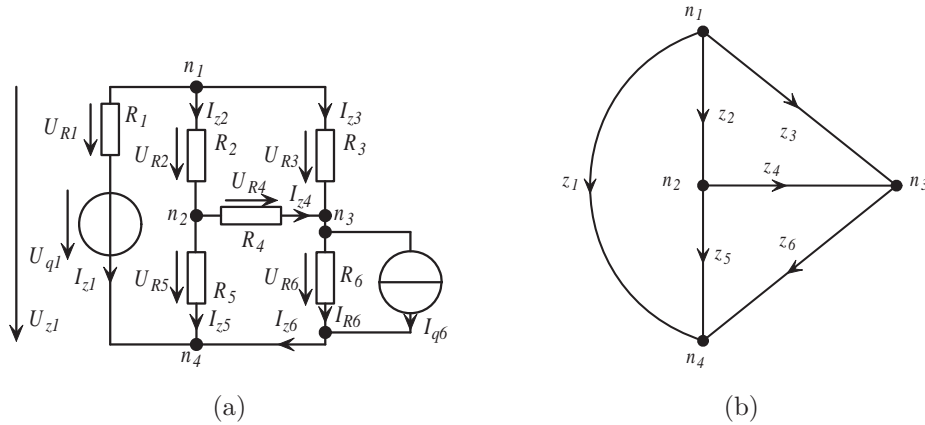


Abbildung 4.11: (a) Netzwerk (b) gerichteter Graph.

Zunächst wird der Knoten  $n_4$  als Bezugsknoten gewählt (beliebig). Danach werden in den restlichen  $k - 1$  Knoten die Kirchhoff'schen Knotengleichungen formuliert.

$$\begin{aligned}
 n_1 &: I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} = 0 \\
 n_2 &: -I_{z2} + I_{z4} + I_{z5} = 0 \\
 n_3 &: -I_{z3} - I_{z4} + I_{z6} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dann stellt man in den  $z - (k - 1)$  unabhängigen Maschen die Kirchhoff'schen Maschengleichungen auf. Um zu linear unabhängigen Maschen zu gelangen, ermittelt man zunächst einen vollständigen Baum. Danach verwendet man die fundamentalen Maschen (enthalten einen exklusiven Co-Baumzweig, sonst lauter Baumzweige), um zu den Maschengleichungen zu kommen (Abb. 4.12).

$$m_1 : U_{R4} - U_{R5} + U_{R6} = 0$$

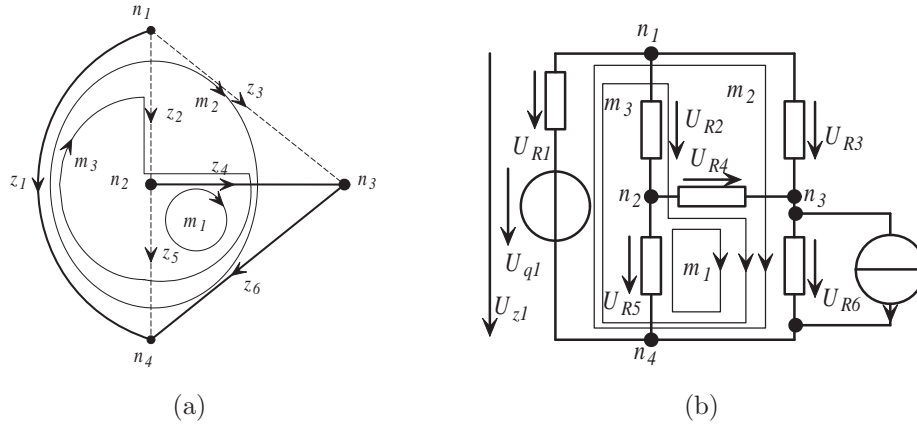


Abbildung 4.12: (a) Baum und fundamentale Maschen (b) Netzwerk mit Maschen.

$$\begin{aligned} m_2 &: -U_{R1} + U_{R3} + U_{R6} = U_{q1} \\ m_3 &: -U_{R1} + U_{R2} + U_{R4} + U_{R6} = U_{q1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

In diesen Gleichungen wurde die Quellspannung  $U_{q1}$  bereits auf die rechte Seite gebracht. Verwendet man noch die Strom/Spannungsbeziehungen an den passiven Elementen

$$U_{Rj} = R_j I_{Rj} \quad j = 1, \dots, 6 \quad (4.6)$$

in den Maschengleichungen, so erhält man nachfolgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 &: R_4 I_{R4} - R_5 I_{R5} + R_6 I_{R6} = 0 \\ m_2 &: -R_1 I_{R1} + R_3 I_{R3} + R_6 I_{R6} = U_{q1} \\ m_3 &: -R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_4 I_{R4} + R_6 I_{R6} = U_{q1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Um auch in den Gleichungen (4.7) die Zweigströme  $I_{zj}$  als unbekannte Größen zu erhalten, verwendet man die Knotenregel im Zweig  $z_6$

$$I_{z6} = I_{q6} + I_{R6}, \quad (4.8)$$

ersetzt in den restlichen Zweigen

$$I_{zj} = I_{Rj} \quad j = 1, \dots, 5 \quad (4.9)$$

und erhält folgende Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 &: R_4 I_{z4} - R_5 I_{z5} + R_6 I_{z6} = R_6 I_{q6} \\ m_2 &: -R_1 I_{z1} + R_3 I_{z3} + R_6 I_{z6} = U_{q1} + R_6 I_{q6} \\ m_3 &: -R_1 I_{z1} + R_2 I_{z2} + R_4 I_{z4} + R_6 I_{z6} = U_{q1} + R_6 I_{q6}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Schreibt man (4.10) und (3.18) als Gleichungssystem, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur eindeutigen Berechnung der gesuchten Zweigströme  $\mathbf{I}_z = \{I_{z1}, \dots, I_{z6}\}^T$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & R_6 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 \\ -R_1 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \\ I_{z3} \\ I_{z4} \\ I_{z5} \\ I_{z6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_6 I_{q6} \\ U_{q1} + R_6 I_{q6} \\ U_{q1} + R_6 I_{q6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

## 4.7 Das Knotenspannungsverfahren

Die Knotenspannungsanalyse reduziert das zu lösende Gleichungssystem von  $z$  Gleichungen auf  $k - 1$  Gleichungen. Ausgangspunkt ist das nachfolgend dargestellte Netzwerk.

Das Netzwerk wird von drei realen Spannungsquellen  $((U_{q1}, R_1), (U_{q4}, R_4), (U_{q6}, R_6))$  und einer realen Stromquelle  $(I_{q8}, R_8)$  versorgt. Im ersten Schritt werden alle Zweigströme  $(I_{z1}, I_{z2}, \dots, I_{z9})$  festgelegt.

Im Anschluß werden alle Spannungsquellen (nur für die realen möglich) in Stromquellen umgewandelt. Wie bei der Quellenäquivalenz gezeigt, wird die *Richtung* der neuen Quelle geändert und es gilt folgender Zusammenhang:  $U_{qi} = R_i I_{qi}$ .

$$\begin{aligned} \text{Quelle 1: } I_{q1} &= U_{q1}/R_1 & \text{Quelle 4: } I_{q4} &= U_{q4}/R_4 \\ \text{Quelle 6: } I_{q6} &= U_{q6}/R_6 & \text{Quelle 8: } I_{q8} & \end{aligned}$$

Danach wird ein Knoten des Netzwerkes zum Bezugsknoten erklärt (Knoten 5 in Abbildung 4.13, oben). Von jedem verbleibenden Knoten zu diesem Bezugsknoten wird nun eine sogenannte *Knotenspannung* definiert  $(U_{n1} - U_{n4})$ . Nun stellt man in jedem dieser  $k - 1$  Knoten die Kirchhoffsche Knotengleichung auf.

$$\begin{aligned} -I_{q1} - I_1 + I_{z2} + I_{z3} &= 0 \\ -I_{z3} - I_{q4} - I_4 + I_{z5} &= 0 \\ -I_{z2} + I_{q6} + I_6 + I_{z7} &= 0 \\ -I_{q6} - I_6 - I_{z7} - I_{q8} - I_8 + I_{z9} &= 0 \end{aligned}$$

Die Ströme, die über die Widerstände fließen, werden durch die Spannungsabfälle an den Widerständen ausgedrückt, die bekannten Quellströme auf die rechte Seite gebracht.

$$-\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_{z2}}{R_2} + \frac{U_{z3}}{R_3} = I_{q1}$$



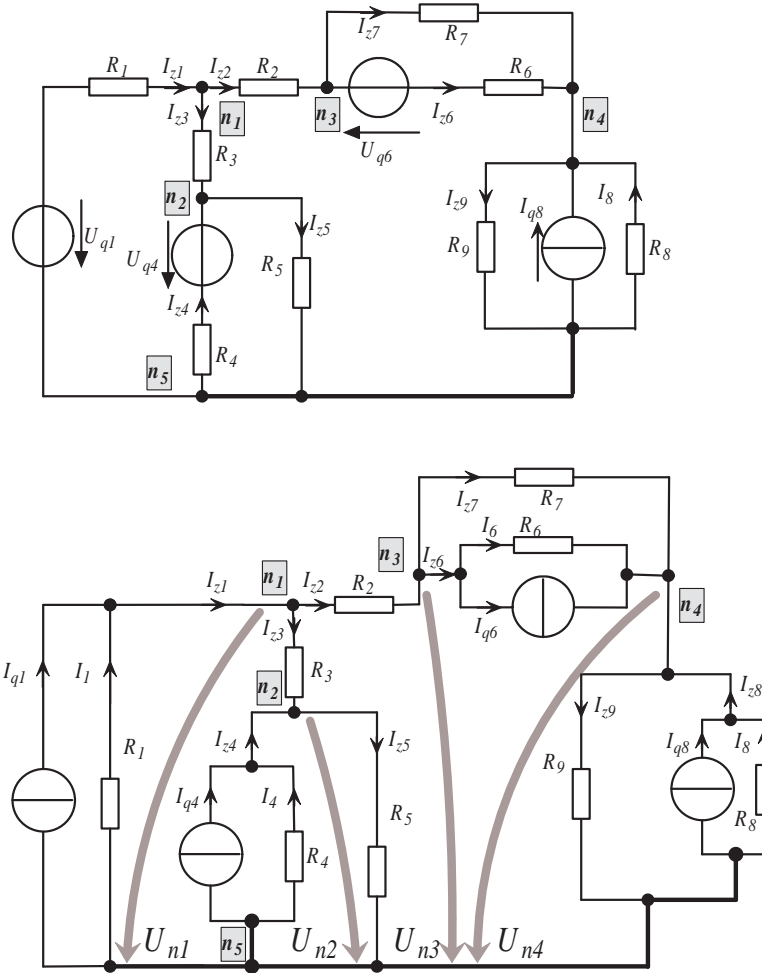


Abbildung 4.13: Ausgangsschaltung und Schaltbild nach Umwandlung der realen Spannungsquellen.

$$\begin{aligned}
 -\frac{U_{z3}}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} + \frac{U_{z5}}{R_5} &= I_{q4} \\
 -\frac{U_{z2}}{R_2} + \frac{U_6}{R_6} + \frac{U_{z7}}{R_7} &= -I_{q6} \\
 -\frac{U_6}{R_6} - \frac{U_{z7}}{R_7} - \frac{U_{z8}}{R_8} + \frac{U_{z9}}{R_9} &= I_{q6} + I_{q8}
 \end{aligned}$$

Jetzt werden die einzelnen Spannungsabfälle an den Widerständen durch die Knotenspannungen ersetzt.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= -U_{n1} \\
 U_{z2} &= U_{n1} - U_{n3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{z3} &= U_{n1} - U_{n2} \\
 U_4 &= -U_{n2} \\
 U_{z5} &= U_{n2} \\
 U_6 &= U_{n3} - U_{n4} \\
 U_{z7} &= U_{n3} - U_{n4} \\
 U_{z8} &= -U_{n4} \\
 U_{z9} &= U_{n4}
 \end{aligned}$$

Die Knotenspannungen werden danach in die Knotengleichungen eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 \frac{U_{n1}}{R_1} + \frac{U_{n1} - U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} &= I_{q1} \\
 -\frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} + \frac{U_{n2}}{R_4} + \frac{U_{n2}}{R_5} &= I_{q4} \\
 -\frac{U_{n1} - U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_6} + \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_7} &= -I_{q6} \\
 -\frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_6} - \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_7} + \frac{U_{n4}}{R_8} + \frac{U_{n4}}{R_9} &= I_{q6} + I_{q8}
 \end{aligned}$$

Faßt man die Koeffizienten bei den einzelnen Knotenspannungen zusammen, so erhält man folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned}
 U_{n1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - U_{n2} \frac{1}{R_3} - U_{n3} \frac{1}{R_2} &= I_{q1} \\
 -U_{n1} \frac{1}{R_3} + U_{n2} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) &= I_{q4} \\
 -U_{n1} \frac{1}{R_2} + U_{n3} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) - U_{n4} \left( \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) &= -I_{q6} \\
 -U_{n3} \left( \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) + U_{n4} \left( \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} \right) &= I_{q6} + I_{q8}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nun in eine Matrixform gebracht werden.

$$\left[ \begin{array}{cccc}
 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\
 -\frac{1}{R_3} & \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{R_2} & 0 & \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) & -\left( \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) \\
 0 & 0 & -\left( \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) & \left( \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} \right)
 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{q1} \\ I_{q4} \\ -I_{q6} \\ I_{q6} + I_{q8} \end{Bmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix auf der rechten Seite wird als *Knotenadmittanzmatrix*  $[G_n]$  bezeichnet. In dem Fall, wenn keine idealen Spannungsquellen vorhanden sind oder ge-

gesteuerte Quellen noch nicht berücksichtigt wurden, können die Elemente dieser Matrix folgendermaßen berechnet werden.

- Die Matrix ist quadratisch und symmetrisch
- Elemente der Hauptdiagonale: positive Summe aller Leitwerte an dem Knoten, der dem Hauptdiagonalelement entspricht
- Elemente außerhalb der Hauptdiagonale: negative Koppelleitwerte zwischen zwei Knoten

Der Quellvektor auf der rechten Seite beinhaltet jene Stromquellen, die zum entsprechenden Knoten gehören, und zwar

- $+ I_q$ , wenn der Quellenstrom zum betreffenden Knoten hinfließt
- $- I_q$ , wenn der Quellenstrom vom betreffenden Knoten wegfließt

Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen wurde von  $z$  (= Anzahl der Zweige) auf  $k - 1$  (= Anzahl der Knoten weniger eins) reduziert, da die *Knotenspannungen* die Maschengleichungen implizit erfüllen.

## 4.8 Maschenstromverfahren

Die Maschenstromanalyse reduziert das zu lösende Gleichungssystem von  $z$  Gleichungen auf  $z - (k - 1)$  Gleichungen. Als Beispiel dient das in Abb. 4.14 dargestellte Netzwerk, indem die Stromquelle  $I_{q8}$  bereits in eine Spannungsquelle umgewandelt wurde. Die *Richtung* der neuen Quelle wurde geändert und für die Umrechnung wurde  $U_{q8} = R_8 I_{q8}$  verwendet. Im nächsten Schritt werden alle Zweigströme ( $I_{z1}, I_{z2}, \dots, I_{z9}$ ) festgelegt. Für

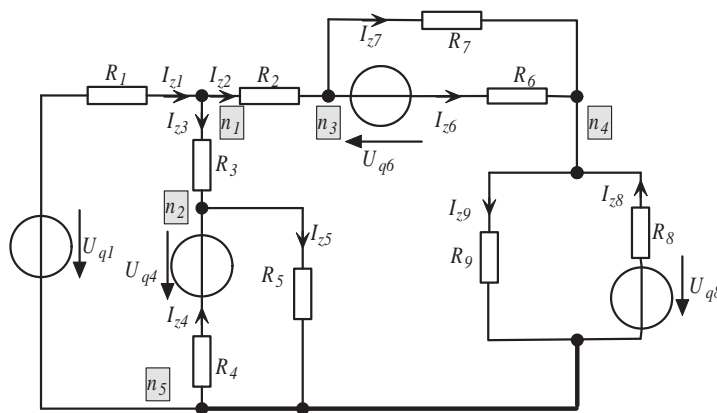


Abbildung 4.14: Netzwerk zum Maschenstromverfahren.

die Quellen gilt:

Quelle 1:  $U_{q1}$     Quelle 4:  $U_{q4}$   
 Quelle 6:  $U_{q6}$     Quelle 8:  $U_{q8} = I_{q8} * R_8$ .

Danach müssen solche Maschen im Netzwerk definiert werden, dass die daraus resultierenden Maschengleichungen linear unabhängig werden. Dazu stellt man am besten den Graphen des Netzwerkes (Abb. 4.15) auf, bestimmt einen Baum und den zugehörigen Co-Baum und legt die Maschen derart fest, daß jede von ihnen *einen Co-Baumzweig* exklusiv und sonst lauter Baumzweige beinhaltet. Jeder Masche wird danach ein Maschenstrom zugeordnet ( $I_{m1}$  bis  $I_{m5}$ ).

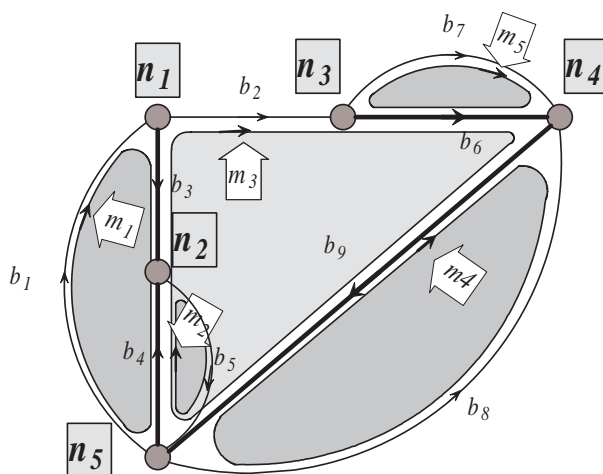


Abbildung 4.15: Vollständiger Graph, Baum  $t$  und Maschen  $m_1 - m_5$ .

Zunächst können in allen Zweigen die Zweigströme  $I_{zj}$  durch die Ströme  $I_j$ , die über die Widerstände  $R_j$  fließen, ersetzt werden. Nun stellt man in jeder dieser  $z - (k - 1)$  Maschen die Kirchhoff'sche Maschengleichung auf. Dabei sind die Spannungsabfälle an den Widerständen bereits als Funktion der Ströme  $I_j$  ausgedrückt.

$$\begin{aligned}
 -U_{q1} + U_{q4} + R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 &= 0 \\
 -U_{q4} + R_4 I_4 + R_5 I_5 &= 0 \\
 -U_{q4} - U_{q6} + R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_6 I_6 + R_9 I_9 &= 0 \\
 U_{q8} - R_8 I_8 - R_9 I_9 &= 0 \\
 U_{q6} - R_6 I_6 + R_7 I_7 &= 0.
 \end{aligned}$$

Jetzt werden die einzelnen Ströme an den Widerständen durch die Maschenströme  $I_{m1}$  bis  $I_{m5}$  ersetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{m1} \\
 I_2 &= I_{m3} \\
 I_3 &= I_{m1} - I_{m3} \\
 I_4 &= -I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} \\
 I_5 &= I_{m2} \\
 I_6 &= I_{m3} - I_{m5} \\
 I_7 &= I_{m5} \\
 I_8 &= -I_{m4} \\
 I_9 &= I_{m3} - I_{m4}.
 \end{aligned}$$

Die Maschenströme werden danach in die Maschengleichungen eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 R_1 I_{m1} + R_3(I_{m1} - I_{m3}) - R_4(-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) &= U_{q1} - U_{q4} \\
 R_4(-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) + R_5 I_{m2} &= U_{q4} \\
 R_2 I_{m3} - R_3(I_{m1} - I_{m3}) + R_4(-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) + \\
 + R_6(I_{m3} - I_{m5}) + R_9(I_{m3} - I_{m4}) &= U_{q4} + U_{q6} \\
 -R_8(-I_{m4}) - R_9(I_{m3} - I_{m4}) &= -U_{q8} \\
 -R_6(I_{m3} - I_{m5}) + R_7 I_{m5} &= -U_{q6}.
 \end{aligned}$$

Fasst man die Koeffizienten für die einzelnen Maschenströme zusammen, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 I_{m1}(R_1 + R_3 + R_4) - I_{m2}R_4 + I_{m3}(-R_3 - R_4) &= U_{q1} - U_{q4} \\
 -I_{m1}R_4 + I_{m2}(R_4 + R_5) + I_{m3}R_4 &= U_{q4} \\
 I_{m1}(-R_3 - R_4) + I_{m2}R_4 + I_{m3}(R_2 + R_3 + R_4 + R_6 + R_9) - \\
 -I_{m4}R_9 - I_{m5}R_6 &= U_{q4} + U_{q6} \\
 -I_{m3}R_9 + I_{m4}(R_8 + R_9) &= -U_{q8} \\
 -I_{m3}R_6 + I_{m5}(R_6 + R_7) &= -U_{q6}.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nun in eine Matrixform gebracht werden:

$$\begin{bmatrix}
 R_1 + R_3 + R_4 & -R_4 & -(R_3 + R_4) & 0 & 0 \\
 -R_4 & R_4 + R_5 & R_4 & 0 & 0 \\
 -(R_3 + R_4) & R_4 & R_2 + R_3 + R_4 + R_6 + R_9 & -R_9 & -R_6 \\
 0 & 0 & -R_9 & R_8 + R_9 & 0 \\
 0 & 0 & -R_6 & 0 & R_6 + R_7
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 I_{m1} \\
 I_{m2} \\
 I_{m3} \\
 I_{m4} \\
 I_{m5}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 U_{q1} - U_{q4} \\
 U_{q4} \\
 U_{q4} + U_{q6} \\
 -U_{q8} \\
 -U_{q6}
 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite wird als *Maschenimpedanzmatrix*  $[Z_m]$  bezeichnet. Sind keine idealen Spannungsquellen vorhanden, so können die Elemente dieser Matrix folgendermaßen berechnet werden:

- die Matrix ist quadratisch und symmetrisch

- Elemente der Hauptdiagonale: positive Summe aller Widerstände in der Masche, die dem Hauptdiagonalelement entspricht
- Elemente außerhalb der Hauptdiagonale: Koppelwiderstände zwischen zwei Maschen
  - positiv, wenn die Maschen in dieselbe Richtung zeigen
  - negativ, wenn die Maschen in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Der Quellvektor auf der rechten Seite beinhaltet jene Spannungsquellen, die zur entsprechenden Masche gehören, und zwar

- $+ U_q$ , wenn die Quellspannung entgegengesetzt zur Maschenrichtung zeigt
- $- U_q$ , wenn die Quellspannung in Maschenrichtung zeigt.

Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen wurde von  $z$  (= Anzahl der Zweige) auf  $z - (k - 1)$  (=Anzahl der unabhängigen Maschen) reduziert, da die *Maschenströme* die Knotengleichungen implizit erfüllen.

# 5 Ungleichförmig bewegte Ladungen

## 5.1 Allgemeines

Elektrische Ladungen können beschleunigt und abgebremst werden. In einem späteren Kapitel wird erläutert, wie diese ungleichförmigen Bewegungen zustande kommen. Im allgemeinen werden in der Elektrotechnik zeitlich periodische Vorgänge auftreten. Zur mathematischen Beschreibung müssen hierzu einige Eigenschaften und Kenngrößen definiert und beschrieben werden. Das Zeitverhalten elektrischer Größen bei Ein- und Ausschaltvorgängen, den sogenannten **transienten Vorgängen**, wird hier nicht berücksichtigt. Alle Betrachtungen erfolgen hier für **stationäre** Vorgänge.

## 5.2 Periodische Wechselgrößen

Elektrische Größen, welche nach gleichbleibenden Zeitintervallen immer wieder in Größe und Richtung gleich sind, nennt man in der Zeit **periodisch**. In Abbildung 5.1 ist ein derartiger qualitativer Verlauf am Beispiel einer elektrischen Spannung dargestellt.

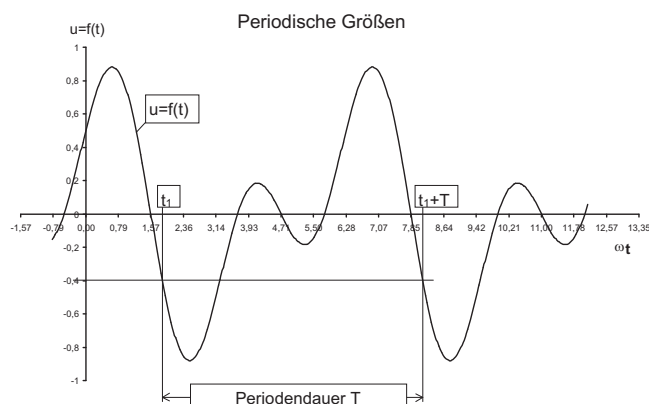


Abbildung 5.1: Zeitlicher Verlauf einer periodischen Spannung.

Der Abstand zwischen zwei Punkten gleichen Zustandes im Zeitdiagramm  $u = f(t)$  nennt man Periode oder Periodendauer  $T$ . Für ein periodisches Verhalten einer Zeit-

funktion  $f(t)$  muß immer

$$f(t) = f(t + nT) \quad (5.1)$$

gelten.  $n$  ist darin eine beliebige ganze Zahl größer als Null. Bei periodischen Funktionen unterscheidet man reine Wechselgrößen und Mischgrößen. Bei reinen Wechselgrößen ist je Periode  $T$  die Fläche zwischen Funktion und Zeitachse unter der Zeitachse immer gleich der Fläche zwischen Funktion und Zeitachse oberhalb der Zeitachse (z.B. die Funktion in Abbildung 5.1). Bei Mischgrößen ist der Wechselgröße immer ein Gleichanteil, positiv oder negativ, überlagert (Abbildung 5.2).

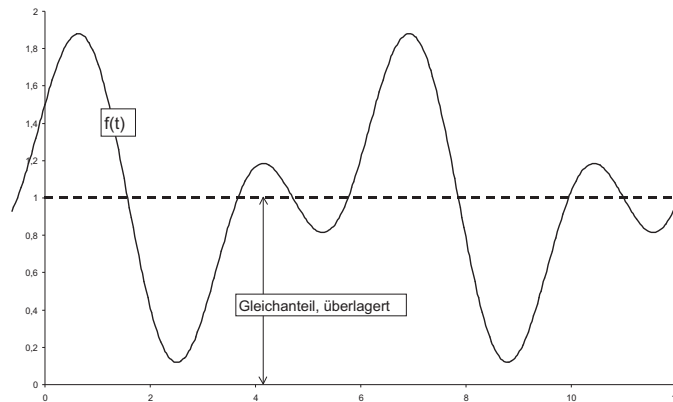


Abbildung 5.2: Periodische Zeitfunktion mit Gleichanteil, Mischgröße

### 5.3 Kennwerte sinusförmiger Größen

In der Praxis treten häufig reine sinusförmige Wechselgrößen auf. Diese können mathematisch sehr einfach beschrieben werden. Reine sinusförmige Größen bezeichnet man als **zeitharmonische Funktionen**. Man betrachte folgendes Zeitverhalten rein sinusförmiger Wechselgrößen.

Für die Funktionen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  gilt allgemein:

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \sin [(\omega t) + \varphi_1] \quad (5.2)$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \sin [(\omega t) + \varphi_2] \quad (5.3)$$

Die Sinusfunktionen wiederholen sich nach Ablauf eines Winkels von  $360^\circ = 2\pi$ . Daraus ergibt sich die Periodendauer  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.4)$$



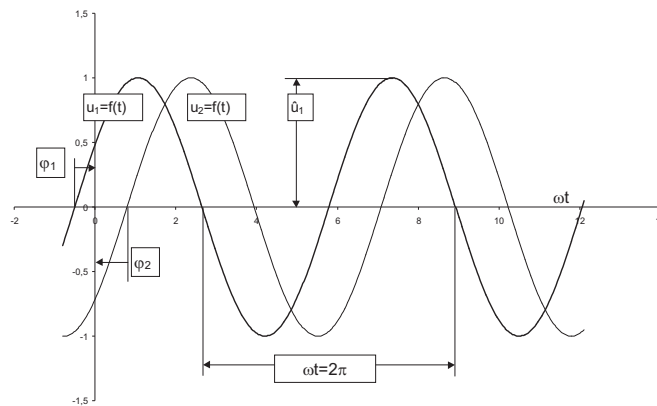


Abbildung 5.3: Reine sinusförmige Wechselgrößen.

$\omega$  wird darin als Kreisfrequenz bezeichnet. Der reziproke Wert der Periodendauer wird als Frequenz  $f$  bezeichnet.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \left[ \frac{1}{s} = Hz \right] \quad \dots \quad \text{Hertz.} \quad (5.5)$$

Die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  werden als Nullphasenwinkel bezeichnet. Der Nullphasenwinkel gibt die Verschiebung, das heißt, um wieviel Grad eine allgemeine Sinusfunktion zur Zeit  $t = 0$  früher oder später gegenüber der reinen Sinusfunktion  $f(t) = \sin(\omega t)$  durch Null geht, an.

In Abbildung 5.3 ist im Falle der Zeitfunktion  $u_1(t)$  ist der Nullphasenwinkel positiv und entsprechend dazu der Nullphasenwinkel von  $u_2(t)$  negativ. Man sagt, die Spannung  $u_1(t)$  eilt der Spannung  $u_2(t)$  vor. Aus der Differenz der beiden Nullphasenwinkel ergibt sich die **Phasenverschiebung** oder der **Phasenwinkel** zwischen den beiden Spannungen zu

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (5.6)$$

Eine weitere Kenngröße aus den Gleichungen 5.2 und 5.3 sind die mit einem Dächchen gekennzeichneten Maximalwerte der Funktionen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$ .

Man bezeichnet diese Maximalwerte oder Amplituden  $\hat{u}_1$  und  $\hat{u}_2$  auch als **Scheitelwerte** der Zeitfunktionen.

**Durch die Angabe von Scheitelwert, Frequenz und Nullphasenwinkel ist eine sinusförmige Größe eindeutig beschrieben!**

Zur Beschreibung der Wirkungen periodischer Wechselgrößen ist es zweckmäßiger, mit Begriffen zu arbeiten, welche von der Kurvenform unabhängig sind. Zu deren Festlegung geht man von den Wirkungen des elektrischen Stromes aus.

### 5.3.1 Der lineare Mittelwert

Wir wissen, daß die elektrische Stromstärke  $I$  aus der Änderung der Ladungen pro Zeiteinheit gegeben ist ( $I = \frac{dQ}{dt}$ , Gleichung 2.2). Die über eine Zeitspanne transportierte Ladungsmenge  $Q$  errechnet sich zu

$$Q = \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (5.7)$$

Will man einen Gleichstrom der Stärke  $I$  für diesen Ladungstransport mit einem Wechselstrom  $i(t)$  vergleichen, so muß man über die Periodendauer  $T$  integrieren. Man erhält den linearen Mittelwert  $\bar{i}$ :

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt. \quad (5.8)$$

Für reine Wechselgrößen ergibt die Integration immer Null, da die Flächen unter der positiven und über der negativen Halbschwingung jeweils gleich groß ist. Die Ladung  $Q$  wird in der einen Halbperiode in die eine Richtung, in der zweiten Halbperiode in die andere Richtung bewegt. Es kommt daher zu keinem resultierenden Ladungstransport. Für Mischströme ist der lineare Mittelwert von Null verschieden und entspricht dem überlagerten Gleichanteil.

### 5.3.2 Der Gleichrichtwert

Mittels Halbleiterbauelementen, z.B. Dioden, kann man eine sogenannte Gleichrichtung einer Wechselgröße erzielen. hernach werden die beiden Halbschwingungen dieselbe Stromrichtung aufweisen.

Der zeitliche Mittelwert dafür ergibt sich aus dem Integral

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt. \quad (5.9)$$

Für sinusförmige Größen wie  $i(t) = \hat{i} \sin(\omega t)$  und  $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$  ergibt sich das Integral zu:

$$\frac{\overline{|i|}}{\hat{i}} = \frac{\overline{|u|}}{\hat{u}} = \frac{1}{\omega T} \int_0^T |\sin(\omega t)| d(\omega t) = \frac{2}{\pi} = 0,6366. \quad (5.10)$$

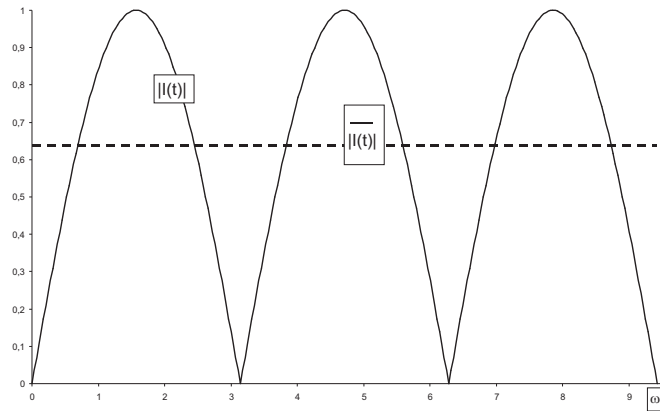


Abbildung 5.4: Gleichrichtung einer sinusförmigen Wechselgröße.

### 5.3.3 Der Effektivwert oder quadratische Mittelwert

Für den Vergleich der elektrischen Leistung an einem Widerstand, in einem Falle mit Gleichstrom, im anderen Falle mit Wechselstrom durchflossen, müssen folgende Überlegungen gelten. Im Falle von Gleichstrom gilt für die Leistung  $P = UI = I^2R = U^2/R$ . Für den Wechselstromfall gilt sinngemäß:

$$P = i^2(t)R. \quad (5.11)$$

Führt man darin das Quadrat über den sinusförmigen Strom aus, so folgt:

$$i^2(t) = \hat{i}^2 \sin^2(\omega t). \quad (5.12)$$

In Abbildung 5.5 sind die Verläufe der einzelnen Größen grafisch dargestellt.

Der Mittelwert des Quadrates der Kurve  $i(t)$  wird, da es sich um eine Gleichgröße handelt, mit  $I^2$  bezeichnet. Für das Integral über die Periode  $T$  ergibt sich :

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{\hat{i}^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{\hat{i}^2}{\omega T} \int_0^T \sin^2(\omega t) d(\omega t) = \frac{\hat{i}^2}{2}. \quad (5.13)$$

Der Mittelwert  $I^2$  entspricht daher dem halben Quadrat des Scheitelwertes  $\hat{i}^2$ . Der erhaltene quadratische Mittelwert  $I$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad (5.14)$$

wird als **Effektivwert** bezeichnet.

**Der Effektivwert ist jene Kenngröße eines Wechselstromes, der die gleiche Wirkung wie ein Gleichstrom derselben Höhe hervorruft!**

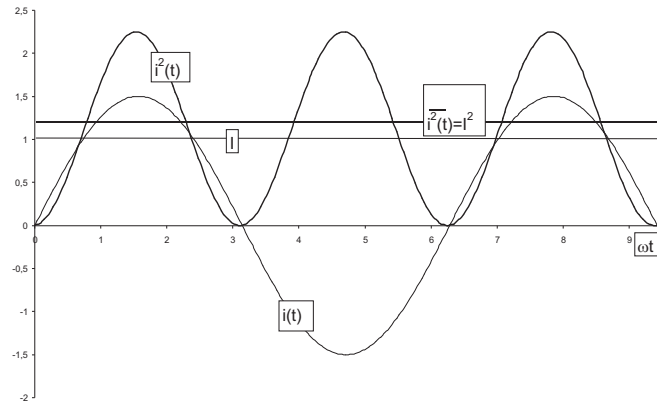


Abbildung 5.5: Zur Herleitung des Effektivwertes.

## 5.4 Darstellungsformen zeitharmonischer Wechselgrößen

Die Darstellung von elektrischen Größen (z.B.  $u = u(t), i = i(t)$ ) im Zeitdiagramm ist oft sehr umständlich, insbesondere dann, wenn mehrere Größen gleichzeitig diskutiert werden. Zudem sind die mathematischen Operationen oft sehr aufwendig. Es wird daher versucht, die zeitharmonischen Größen in einer symbolischen Weise darzustellen.

### 5.4.1 Die Zeigerdarstellung oder das Zeigerdiagramm

Am Beispiel einer sinusförmigen Spannung der Form

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

soll diese Form der Darstellung gezeigt werden. Es muß natürlich einen Zusammenhang zwischen Zeitdiagramm und Zeigerdiagramm geben. Dazu betrachte man nachfolgende Abbildung.

In dieser Abbildung wird die Spannung durch einen einfachen Pfeil der Länge  $\hat{u}$  dargestellt. Zur Kennzeichnung, daß es sich um einen Zeiger handelt, wird die physikalische Größe durch einen Unterstrich beim Symbol dargestellt. Für den Spannungszeiger gilt damit die Zeigerdarstellung  $\hat{u}$ . Definitionsgemäß dreht sich nun der Spannungszeiger  $\hat{u}$  entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Kreisfrequenz  $\omega$ . Aus der Projektion des Zeigers auf die y-Achse (oder eine beliebige, dazu parallele Linie) kann für jeden beliebigen Zeitpunkt  $t$  der Augenblickswert der Spannung abgelesen werden. Am Papier können nur feststehende Zeiger gezeichnet werden. Ein Zeigerdiagramm gibt also über den Momentanwert der einzelnen dargestellten Größen Auskunft. Werden beispielsweise zwei

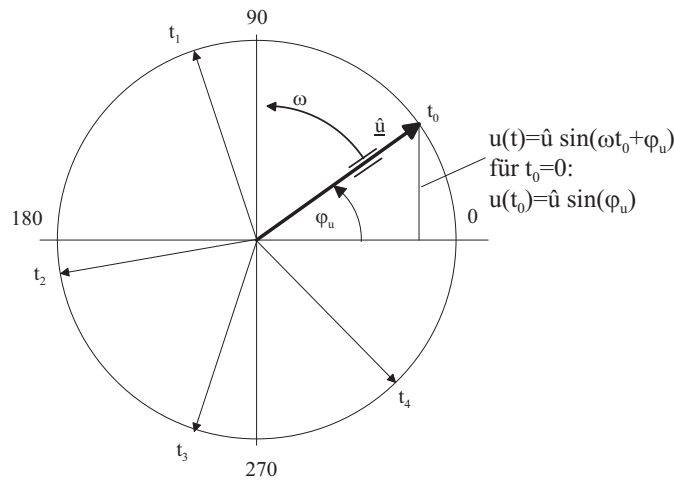


Abbildung 5.6: Zum Zeigerdiagramm.

elektrische Spannungen und eine elektrische Stromstärke

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_{u1}) \\ u_2 &= \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_{u2}) \\ i &= \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$

in einem Zeigerdiagramm für einen bestimmten Zeitpunkt  $t_1$  dargestellt, so hat dieses folgendes Aussehen.

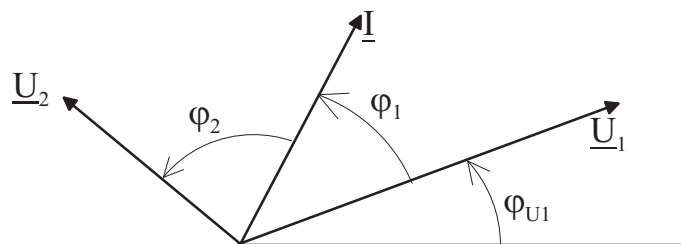


Abbildung 5.7: Zeigerdiagramm für drei elektrische Größen.

In Abbildung 5.7 wurde schon darauf Bedacht genommen, daß fast ausschließlich mit den Effektivwerten der Wechselgrößen gearbeitet wird. Bei Vorhandensein mehrerer Zeiger ist es zweckmäßig, einen davon als *Bezugszeiger* zu wählen und die Phasenverschiebungen zueinander zu bezeichnen. In der obigen Abbildung wurde der Stromvektor  $\underline{I}$  dazu verwendet. Der Winkel  $\varphi_1$  gibt an, um wieviel die Spannung  $\underline{U}_1$  dem Strom  $\underline{I}$  nacheilt. Umgekehrt ist es im Falle der Spannung  $\underline{U}_2$ . Diese eilt dem Strom um  $\varphi_2$  voraus.

Ein Zeiger ist durch folgende Angaben eindeutig beschrieben:

- Symbol der dargestellten Größe (z.B.  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$ ,  $\hat{u}$ ).
- Betrag der sinusförmigen Größe. Dieser ist proportional der Länge des Zeigers. Dazu ist immer ein Maßstab notwendig, z.B.  $1\text{ cm} \hat{=} 5\text{ Volt}$ ,  $1\text{ cm} \hat{=} 3\text{ Ampere}$ .
- Frequenz  $f$  oder Kreisfrequenz  $\omega$  der Schwingung.
- Phasenwinkel zu einem Bezugszeiger oder Nullphasenwinkel, z.B.  $\varphi_1$ ,  $\varphi_{U1}$ .

Gemäß der schon hergeleiteten Beziehung zwischen Effektiv- und Scheitelwerten bei sinusförmigen Größen müßten die Zeigerlängen in obigem Zeigerdiagramm um den Faktor  $\sqrt{2}$  verlängert werden, um das Zeigerdiagramm für Scheitelwerte zu erhalten.

Die Überlagerung (Addition oder Subtraktion) von sinusförmigen Zeitsignalen gleicher Frequenz ergibt **immer** ein Signal mit sinusförmigem Verlauf bei gleicher Frequenz. Aus diesem Grunde können Zeiger wie Vektoren geometrisch addiert bzw. subtrahiert werden (Abbildung 5.8).

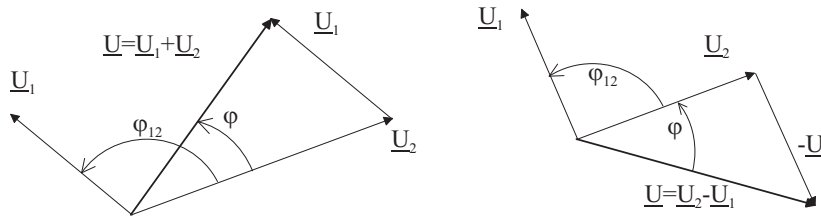


Abbildung 5.8: Geometrische Addition und Subtraktion von Zeigern.

Rechnerisch sind diese beiden Operationen sehr umständlich durchzuführen. Die beiden sinusförmigen Spannungen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  seien folgend gegeben.

$$u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Die Überlagerung beider Spannungen ergibt:

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Nach Anwendung des Summensatzes  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$  erhält man :

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= [\hat{u}_1 \cos \varphi_1 + \hat{u}_2 \cos \varphi_2] \sin(\omega t) + [\hat{u}_1 \sin \varphi_1 + \hat{u}_2 \sin \varphi_2] \cos(\omega t)$$

Damit ergibt sich für die Gesamtspannung  $u$ :

$$u \sin \varphi = \hat{u}_1 \sin \varphi_1 + \hat{u}_2 \sin \varphi_2$$

$$u \cos \varphi = \hat{u}_1 \cos \varphi_1 + \hat{u}_2 \cos \varphi_2 \tag{5.15}$$

Aus der Division dieser beiden Gleichungen erhält man über den Arcus-Tangens den resultierenden Phasenwinkel zu:

$$\varphi = \arctan \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\hat{u}_1 \sin \varphi_1 + \hat{u}_2 \sin \varphi_2}{\hat{u}_1 \cos \varphi_1 + \hat{u}_2 \cos \varphi_2} \quad (5.16)$$

Durch Quadrieren und Addieren der sin- und cos-Terme findet man den Scheitelwert  $\hat{u}$  der Gesamtspannung.

$$\begin{aligned} \hat{u}^2 &= [\hat{u}_1 \sin \varphi_1 + \hat{u}_2 \sin \varphi_2]^2 + [\hat{u}_1 \cos \varphi_1 + \hat{u}_2 \cos \varphi_2]^2 \\ \hat{u} &= \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

In dieser Beziehung 5.17 wurde noch Gebrauch von der Identität  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$  gemacht. Man erkennt die Umständlichkeit dieser einfachen mathematischen Manipulation bereits bei nur zwei zu addierenden/subtrahierenden Größen.

### 5.4.2 Sinusgrößen als komplexe Zeiger

Bildet man einen Zeiger in der komplexen Zahlenebene ab, so kann dieser Zeiger durch eine komplexe Zahl **eindeutig** beschrieben werden. Es können alle Vorteile aus der komplexen Zahlenrechnung angewandt werden. **Die Sinusschwingung im Zeitbereich wird in die komplexe Ebene transformiert.** Es ist dies lediglich eine einfachere, eine symbolische Darstellungsform der sinusförmigen Größen. Ein komplexer Zeiger wird ebenfalls durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Auch hier hat sich die Verwendung des Effektivwertes durchgesetzt. In Abbildung 5.9 ist für eine Spannung und für einen Strom deren komplexer Effektivwert  $\underline{U}$ , bzw.  $\underline{I}$  dargestellt. Man sagt dazu auch die komplexe Spannung bzw. der komplexe Strom.

Die dargestellte Spannung  $\underline{U}$  kann durch die Exponentialform oder Eulersche Form

$$\underline{U} = U e^{j(\omega t + \varphi)} = U e^{j\omega t} e^{j\varphi} \quad (5.18)$$

mathematisch beschrieben werden. Unter Verwendung des *Satztes von Moivre* kann daraus die trigonometrische Form erstellt werden:

$$\underline{U} = U [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (5.19)$$

Die bekannte Frequenz  $f$  bzw. Kreisfrequenz  $\omega$  der harmonischen Größe ist nur für die Bestimmung von Zeitwerten notwendig. In allen anderen Fällen wird auch in der komplexen Darstellung eines Zeigers auf die Drehung des Zeigers mit der Kreisfrequenz

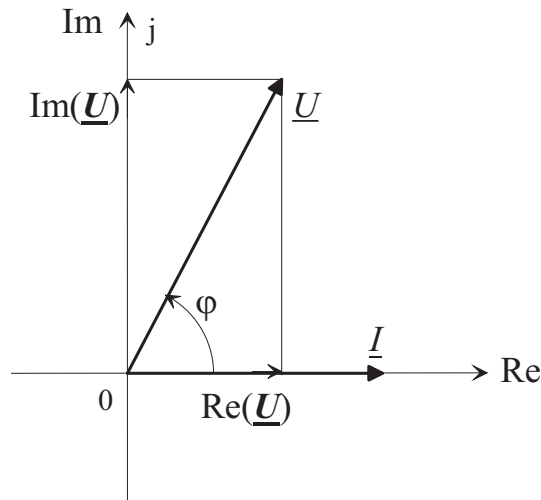


Abbildung 5.9: Zeiger in der komplexen Zahlenebene.

$\omega$  verzichtet. Man läßt in diesen Fällen den Term  $e^{j\omega t}$  aus Gleichung 5.18 weg. Dies entspricht dem Momentanzustand zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

Man bezeichnet die in Abbildung 5.9 eingezeichneten Größen, den auf der reellen Achse aufgetragenen Anteil von  $\underline{U}$  als Realteil und den auf der imaginären Achse aufgetragenen Anteil von  $\underline{U}$  als Imaginärteil.

Der Real- und der Imaginärteil einer komplexen Größe berechnet sich durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\underline{U}) &= U \cos(\omega t + \varphi) \\ \operatorname{Im}(\underline{U}) &= U \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mit diesen Beziehungen ist der Zusammenhang zur Zeitfunktion der Sinusgröße gegeben. Aus diesen Komponenten kann nun der Betrag und der Winkel  $\varphi$  nachfolgend berechnet werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\underline{U}) &= a; \quad \operatorname{Im}(\underline{U}) = b \quad \longrightarrow \quad \underline{U} = a + jb \\ U &= |\underline{U}| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Zur komplexen Größe  $\underline{U}$  gibt es eine dazu **konjugiert komplexe** Größe. Diese hat ein zur komplexen Größe umgekehrtes Vorzeichen im Imaginärteil und demzufolge auch im Winkel (Abbildung 5.10).

Die konjugiert komplexe Größe wird mit einem hochgestellten Stern am Größensymbol gekennzeichnet.



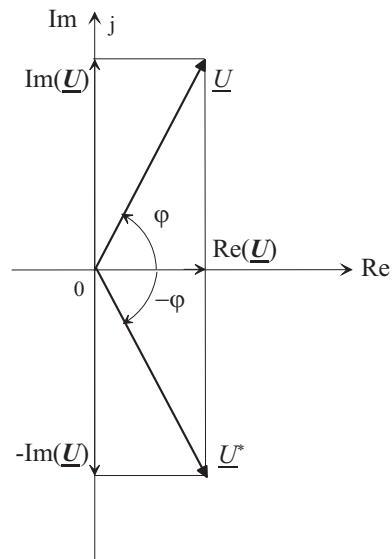


Abbildung 5.10: Komplexe und dazu konjugiert komplexe Größe.