

**Ergänzende Unterlagen zur Vorlesung
Grundlagen der Elektrotechnik
(437.201) für
Elektrotechnik-Studierende**

Renhart Werner

20. März 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Das elektrische Feld	1
1.1	Die elektrische Ladung	1
1.2	Wirkung elektrischer Ladungen	2
1.3	Arbeit, Potential und Spannung	5
1.4	Materie im elektrischen Feld	7
1.5	Energie im elektrostatischen Feld	15

1 Das elektrische Feld

1.1 Die elektrische Ladung

Lange Zeit galten Atome als die kleinsten, nicht weiter teilbaren Bausteine der Materie (atomos heißt unteilbar). Die Griechen Leukipp und Demokrit beschrieben dies schon etwa 500 vor Christus in ihren Schulen. Sie machten Beobachtungen über Anziehungen von einem Stück Fell, welches mit Bernstein (griechisch: elektron) in Berührung kam. Damit haben sie den Begriff Elektrizität geprägt. Erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts erkannten die Physiker, daß das Atom nicht unteilbar ist (Rutherford, 1871-1937). Das Atom besteht nunmehr aus einem Atomkern um den in bestimmten Abständen Elektronen kreisen. Der Atomkern besteht aus Neutronen und Protonen. Die Wirkung eines Atoms nach außen hin ist neutral. Entzieht man einem Atom beispielsweise ein Elektron, so kann eine Wirkung beobachtet werden, die man als elektrisch bezeichnet. Aus einer Vielzahl von in der Natur vorkommenden Kraftfeldern (z.B. Gravitationsfeld) befaßt sich die Elektrotechnik intensiv mit einem Kraftfeld, welches als elektrisches Feld bezeichnet wird. Ein Körper im elektrischen Feld reagiert zufolge einer elektrischen Ladung. Die elektrische Ladung Q beschreibt den elektrischen Zustand eines Körpers. Sie hat die aus den SI-Einheiten abgeleitete Einheit [As] oder auch Coulomb [C] genannt und wird in einem Vielfachen der sogenannten Elementarladung e ausgedrückt.

$$\text{Elementarladung } e = 1,602189210^{-19}C$$

Es ist dies eine Naturkonstante. Es gibt nun Körper, die per Definition positiv geladen sind und solche die negative Ladung aufweisen. Beispielsweise gilt :

ein Elektron ist negativ geladen, d.h. $Q = -e$
ein Proton ist positiv geladen, d.h. $Q = e$
ein Neutron ist ungeladen, d.h. $Q = 0$

Der willkürlichen Definition der Vorzeichen liegt zugrunde, daß ein Elektronenüberschuß mit minus, ein Elektronenmangel mit plus bezeichnet wird.

1.2 Wirkung elektrischer Ladungen

Man erkannte aus zahlreichen Versuchen (z.B. Bernsteinversuch der Griechen), daß elektrisch geladene Körper aufeinander eine Kraft ausüben. Charles Augustin Coulomb (1736-1806, französischer Ingenieur und Physiker) gelang es, für diese Kraftwirkung eine, dem Gravitationsgesetz ähnliche Gesetzmäßigkeit aufzustellen (1785):

Zwei Körper wirken entlang ihrer Verbindungslinie mit einer Kraft, die proportional dem Produkt ihrer elektrischen Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Abstandes ist.

In mathematischer Schreibweise lautet das Coulombsche Kraftgesetz :

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{e}_{12} \quad (1.1)$$

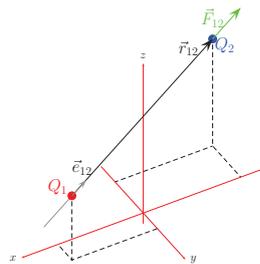


Abbildung 1.1: Kräfte zweier geladener Körper, in diesem Fall: Abstoßung zweier gleichnamig geladener Körper.

Die Proportionalitätskonstante in (1.1) entspricht dabei:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,987 \cdot 10^9 \left[\frac{Nm^2}{C^2} \right] \quad (1.2)$$

ϵ_0 wird darin als elektrische Feldkonstante bezeichnet. Die physikalische Bedeutung dieser Größe wird später noch besprochen. Es ist nun zweckmäßig, den Begriff der elektrischen Feldstärke einzuführen. Dazu denke man sich den Körper mit der elektrischen Ladung Q_1 festgehalten. Mit der zweiten elektrischen Ladung Q_2 (Probeladung) untersuchen wir die Wirkung des ersten Körpers im Raum. Bezieht man die gemessene Kraft \vec{F} auf die Ladung Q_2 des Probekörpers, erhält man die elektrische Feldstärke \vec{E} :

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}}{Q_2} \left[\frac{kgm}{s^2} \frac{1}{As} = \frac{N}{As} = \frac{Ws}{m} \frac{1}{As} = \frac{VAs}{m} \frac{1}{As} = \frac{V}{m} \right] \quad (1.3)$$

bzw.

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \vec{e}_r. \quad (1.4)$$

Dem entsprechend existiert um einen geladenen Körper ein elektrisches Feld, dessen Größe proportional der elektrischen Ladung ist und mit dem Quadrat des Abstandes vom geladenen Körper abnimmt. Die Richtung des Feldes entspricht der radialen Richtung \vec{e}_r , vom Mittelpunkt der Ladung laufend. Die Gesamtheit aller Feldstärkevektoren \vec{E} bezeichnet man als das elektrische Feld.

Wird ein Körper mit der Ladung Q in ein elektrisches Feld \vec{E} gebracht, so erfährt dieser die Kraft

$$\vec{F} = Q\vec{E}, \quad (1.5)$$

wobei \vec{E} die elektrische Feldstärke am Ort des Körpers mit der Ladung Q angibt. Bei diesen Betrachtungen muß vorausgesetzt werden, daß die räumlichen Ausdehnung des geladenen Körpers und dessen Ladung so gering sind, daß die ursprünglich vorherrschende Feldverteilung nicht gestört wird (Punktladungen). Sind mehrere Punktladungen vorhanden, so erzeugt jede für sich ein elektrisches Feld. Da der Zusammenhang zwischen \vec{E} und Q linear ist (Gl. 1.4), ergibt die Überlagerung der Felder aller Ladungen das Gesamtfeld. Beispielsweise ergibt die Gesamtfeldstärke für drei unterschiedliche Ladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 in einem beliebigen Punkt im Raum :

Die Gesamtfeldstärke \vec{E} im Punkt P errechnet sich dabei zu

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{Q_i}{r_{iP}^2} \vec{e}_{iP}. \quad (1.6)$$

1.2.1 Feldlinien und Feldlinienbilder

Um den optischen Eindruck über das Feldverhalten im gesamten Raum zu erhalten, müßte man in sehr vielen Punkten die Feldstärkevektoren in Betrag und Richtung dar-

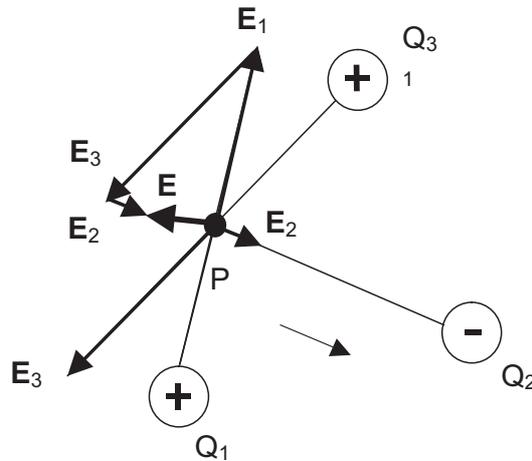


Abbildung 1.2: Überlagerung der elektrischen Feldstärken mehrerer Punktladungen in einem beliebigen Aufpunkt P.

stellen. Übersichtlicher ist es, das Verhalten mit Hilfe sogenannter Feldlinien wiederzugeben. Man erhält eine Feldlinie, wenn man von einem gegebenen Punkt aus ein kleines Stück in Richtung des Feldstärkevektors geht, die Richtung des Feldstärkevektors bestimmt, wieder ein kleines Stück weiterschreitet, und so fort. Aus dieser Darstellung ist

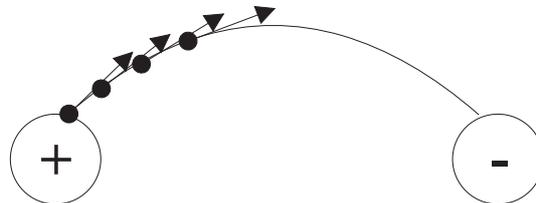


Abbildung 1.3: Konstruktion einer elektrischen Feldlinie.

sehr gut der qualitative Verlauf des elektrischen Feldes zu erkennen. Diese Darstellung gibt indirekt auch über den Betrag der elektrischen Feldstärke Auskunft. Er ist um so höher, je dichter beisammen die Feldlinien liegen. Alle Feldlinien haben einen Anfangs- und einen Endpunkt. Entsprechend einer willkürlichen Festlegung beginnen sie in den positiven Ladungen und enden in den negativen.

Die positiven Ladungen werden als Quellen, die negativen Ladungen als Senken des elektrischen Feldes bezeichnet.

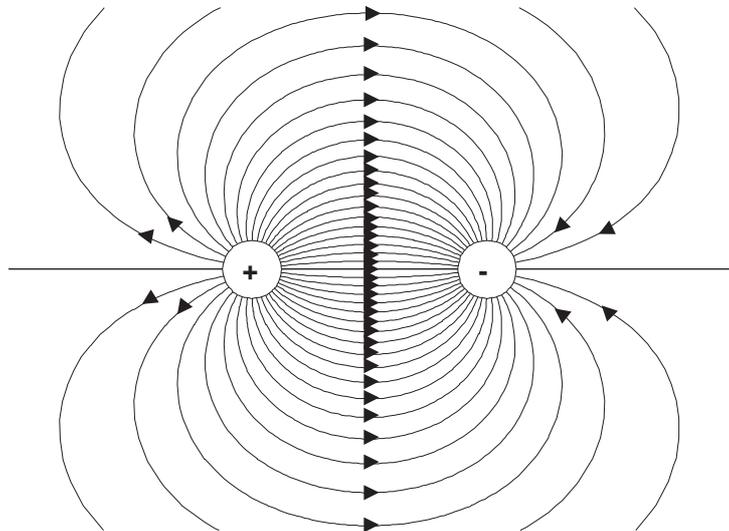


Abbildung 1.4: Feldlinienbild zweier punktförmiger Ladungen.

1.3 Arbeit, Potential und Spannung

Befindet sich im elektrischen Feld \vec{E} eine elektrische Ladung Q , so wirkt auf diese eine Kraft \vec{F} gemäß Gl. 1.1. Soll nun diese Ladung Q bewegt werden, so muß dazu Arbeit verrichtet werden. Bei einer Verschiebung der Ladung in Gegenrichtung zum elektrischen Feld \vec{E} ist eine Energiezufuhr von außen erforderlich. D.h. es ist eine mechanische Kraft erforderlich, welche der Kraftwirkung des elektrischen Feldes entgegenwirkt. Erfolgt hingegen die Verschiebung in Richtung der elektrischen Feldstärke, so verrichtet das Feld die notwendige Arbeit. Die Arbeit W ist definiert als das Produkt der längs des Weges wirkenden Kraft und dem zurückgelegten Weg. Im Allgemeinen muß die Richtung der Kraft nicht mit der Richtung des Weges übereinstimmen, sodaß die vektorielle Projektion für die notwendige Arbeit maßgeblich ist. Für ein differentielles Wegelement $d\vec{s}$ gilt allgemein:

$$dW = \vec{F}_{mech} \cdot d\vec{s} = -\vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad [Nm = J] \quad \dots \quad \text{Joule} \quad (1.7)$$

$$|dW| = |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos \alpha \quad (1.8)$$

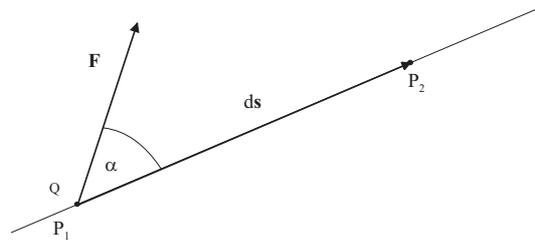


Abbildung 1.5: Arbeit im elektrischen Feld.

Die erforderliche Arbeit W_{12} zur Verschiebung der Ladung Q von P_1 nach P_2 (im elektrischen Feld) ergibt sich aus dem Wegintegral :

$$W_{12} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.9)$$

Bewegt man nun die Ladung Q von P_2 nach P_1 zurück, so ändert sich lediglich die Richtung des Wegelementes zu $-d\vec{s}$, und die Arbeit W_{21} ergibt sich zu:

$$W_{21} = - \int_{P_2}^{P_1} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -Q \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (1.10)$$

Entfernt man folglich eine Ladung Q im elektrischen Feld von einem Punkt P_1 und bringt diese Ladung anschließend wieder in diesen Punkt zurück, wird keine Gesamtarbeit W verrichtet:

$$W = W_{12} + W_{21} = 0 \quad (1.11)$$

Die Größe der Arbeiten W_{12} und W_{21} sind auch von der Wahl des Weges zwischen den Punkten P_1 und P_2 unabhängig:

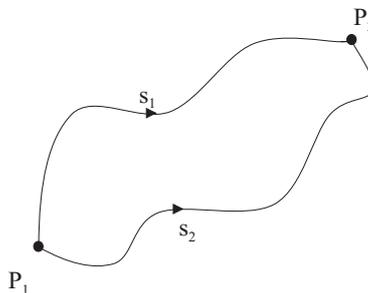


Abbildung 1.6: Bestimmung der verrichteten Arbeit entlang unterschiedlicher Wege.

Dieses Ergebnis läßt sich auch folgendermaßen interpretieren. Das Linienintegral über die elektrische Feldstärke \vec{E} im elektrostatischen Feld entlang eines geschlossenenen Weges ist **Null**.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (1.12)$$

Ein Feld mit dieser Eigenschaft bezeichnet man allgemein als **wirbelfrei**. Bedingt durch diese Wegunabhängigkeit des Integrales wird die Arbeit W nur vom Anfangs- und vom Endpunkt bestimmt. Man ordnet daher diesen Punkten eine charakteristische Größe, das **elektrostatische Potential** Φ zu. Es wird definiert:

$$W_{el} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = Q \int_{P_1}^{P_2} [-\vec{E} \cdot d\vec{s}] = Q[\Phi(P_2) - \Phi(P_1)]. \quad (1.13)$$

Diese Definition erlaubt es, zum Potential $\Phi(P)$ einen beliebigen, konstanten Wert zu addieren, ohne daß sich der Wert des Linienintegrals (Gl. 1.13) ändert. Das elektrostatische Potential ist eine **skalare** Größe.

Für die Differenz der Potentiale in den Punkten P_1 und P_2 kann

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = U_{12} \quad \left[\frac{V}{m} m = V \right] \quad \dots Volt \quad (1.14)$$

geschrieben werden. Die Größe U_{12} bezeichnet man als **elektrische Spannung** zwischen den Punkten P_1 und P_2 .

1.4 Materie im elektrischen Feld

Bisher erfolgten alle Betrachtungen für luftleeren Raum, d.h. weder elektrisch leitfähige noch isolierende Körper waren vorhanden. Bei Vorhandensein derartiger Körper müssen die entsprechenden Materialeigenschaften mitberücksichtigt werden. Bringt man nun ein Material, zB. einen Metalldraht oder PVC in des elektrische Feld ein, so wird sich das elektrische Feld im Inneren derselben unterschiedlich einstellen. Um dies nun beschreiben zu können, ist es zweckmäßig, neben der elektrischen Feldstärke \vec{E} , eine weitere Feldgröße, nämlich **die elektrische Verschiebung** \vec{D} , einzuführen. Sie ist als Proportionalität zur elektrischen Feldstärke folgend definiert:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \left[\frac{C^2}{Nm^2} \frac{V}{m} = \frac{(As)^2}{VAsm} \frac{V}{m} = \frac{As}{m^2} \right]. \quad (1.15)$$

Die Einheit der elektrischen Verschiebung \vec{D} entspricht einer Ladung pro Fläche (Gl. 1.15). Auf die *Proportionalitätskonstante* ϵ wird bei der Beschreibung isolierender Stoffe näher eingegangen.

Zunächst werden elektrisch leitfähige Körper und hernach nichtleitende Körper in ein elektrisches Feld eingebracht und die jeweiligen Auswirkungen und Phänomene untersucht.

1.4.1 Leitfähige Körper - Influenz

Ein leitfähiger Körper, zB. ein Stück Kupferdraht, zeichnet sich dadurch aus, dass die um die Atomkerne kreisenden Elektronen unter sehr geringem energetischen Aufwand für einen Ladungstransport (=Strom) zur Verfügung stehen. Die Elektronen sind hoch beweglich.

Bringt man nun einen Leiter, -er ist elektrisch neutral- in ein elektrisches Feld \vec{E} ein, so wird auf die Elektronen jeweils die Kraft $\vec{F} = Q\vec{E}$ wirken. Aufgrund ihrer hohen Beweglichkeit werden sich diese Elektronen bewegen. Diese Bewegungen erfolgen so lange, bis die Elektronen **keine** Feldstärke mehr verspüren, dh. wenn die Bedingung $\vec{E} = \vec{0}$ erfüllt ist. Damit ist auch die Kraft \vec{F} auf die Ladungen Null. Diesen Vorgang nennt man die **elektrische Verschiebung oder Influenz**

Alle Ladungen des Leiters sind nunmehr flächenhaft an der Oberfläche des Leiters verteilt (vgl. Abb. 1.7).

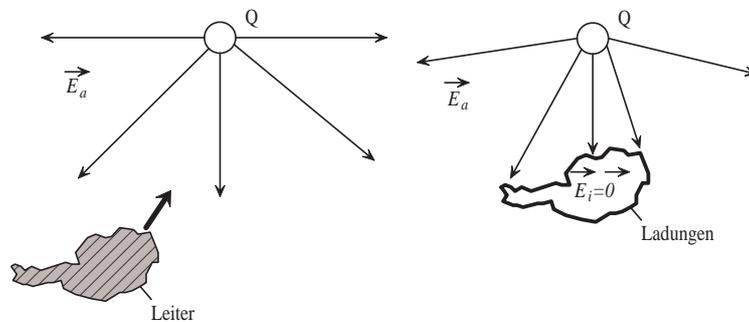


Abbildung 1.7: Ladungsverteilung und elektrisches Feld in einem elektrisch leitfähigen Körper.

Somit ist das Innere des Leiters feld- und ladungsfrei. Man könnte sich dieses Gebiet durch einen Isolator oder durch leeren Raum ersetzt denken, an dessen äußerer Begrenzung die Ladungen sitzen. Die folgenden wesentlichen Aussagen können nun getroffen werden:

1. Elektrische Felder werden durch leitfähige Körper abgeschirmt.

2. Die elektrischen Feldlinien münden auf leitfähigen Körpern stets senkrecht ein.
3. Da das Innere eines Leiters feld- und ladungsfrei ist, muß die Leiteroberfläche eine Fläche konstanten Potentials darstellen (Äquipotentialfläche).

Aus der Einheit der elektrischen Verschiebung \vec{D} [As/m²] ersieht man, daß aus dessen Integration über eine Fläche eine elektrische Ladung Q resultieren muß.

Tatsächlich ergibt ein **geschlossenes** Oberflächenintegral von \vec{D} über ein beliebiges Gebiet die darin enthaltene Gesamtladung:

$$\oint_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma} = Q. \quad (1.16)$$

Diese Beziehung bezeichnet man als das **Gaußsche Gesetz**. Wird das Integral nicht über eine geschlossene Fläche, sondern nur über eine beliebige Fläche Γ ausgeführt, so ergibt dies den elektrischen Fluß Ψ_{el} :

$$\Psi_{el} = \int_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma}. \quad (1.17)$$

War der leitende Körper vor dem Einbringen in das Fremdfeld \vec{E}_f ungeladen, so ist er es dann auch wieder. Das geschlossene Oberflächenintegral über den eingebrachten Leiter ergibt Null, da eine gleich große Anzahl von positiven und negativen Ladungen influenziert wurde. In jedem Fall liegen die Influenzladungen umgekehrten Vorzeichens zu den influenzierenden Ladungen näher diesen influenzierenden Ladungen. Aufgrund der höheren Feldstärken im näheren Bereich werden sich influenzierende und influenzierte Leiter immer anziehen. Zur Feststellung der elektrischen Verschiebung \vec{D} kann der Effekt der Influenz herangezogen werden.

1.4.2 Nichtleiter oder Isolatoren - Polarisation

Anders als beim leitenden Körper kann ein Isolator von einem elektrischen Feld durchsetzt werden. Man bezeichnet derartige Stoffe oft als **Dielektrika** (dia heißt durch). Die Elektronen eines isolierenden Materials, zB. PVC oder Glas, sind nur beschränkt beweglich. Sie können sich nicht solange bewegen, bis völlige Feldfreiheit vorherrscht. Es wird ein elektrisches Feld im Inneren verbleiben. Ein Maß für die Verschiebbarkeit von Ladungen wird nun mit der Dielektrizitätszahl ϵ ausgedrückt.

Ähnlich dem Falle eines Leiters im elektrischen Feld kann man auch bei einem Isolator die Ladungen an der Oberfläche vermuten. Die Dichte der Ladungen an der Oberfläche wird jedoch vergleichsweise klein sein, da ja im Inneren ein Feld \vec{E}_i verbleibt. Man nennt

diese Ladungen **Polarisationsladungen** mit der Dichte σ_{pol} . Als Polarisation bezeichnet man die makroskopisch feststellbare Ladungsverschiebung in dielektrischen Stoffen.

Im atomaren Verband können sich in einem Isolator die Ladungsschwerpunkte nur sehr begrenzt verschieben. Dies ist so lange möglich, bis sich zwischen der trennenden Kraft des äußeren elektrischen Feldes und der Anziehungskraft der Polarisationsladungen ein Gleichgewichtszustand einstellt. Auf die unterschiedlichen Arten der Polarisation (**Elektronenpolarisation, Molekül-Polarisation und Orientierungspolarisation**) wird hier nicht näher eingegangen.

Die Abschwächung der elektrischen Feldstärke in einem dielektrischen Stoff gegenüber luftleeren Raum kann durch den formalen Zusammenhang

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1.18)$$

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm} = \frac{F}{m} \right] \dots \textit{Farad pro Meter}. \quad (1.19)$$

über ϵ bzw. ϵ_r erfaßt werden. ϵ_r bezeichnet man als **relative** und ϵ als **absolute** Dielektrizitätskonstante des entsprechenden Stoffes. Gl. 1.18 besagt, daß eine Erhöhung der relativen Dielektrizitätszahl eines Mediums eine Erniedrigung des elektrischen Feldes in diesem Medium zur Folge hat.

1.4.3 Unterschiedliche dielektrische Stoffe

In der nachfolgenden Tabelle 1.1 sind die Dielektrizitätszahlen einiger Stoffe aufgelistet.

Stoff	ϵ_r			Stoff	ϵ_r
Luft	1,00059			Quarz	3,8 bis 5
Petroleum	2,0			Glas	5 bis 7
Polyäthylen	3,2			Keramik	9,5 bis 100
Polystyrol	2,6			Diamant	16,5
Gummi	2,5 bis 3,5			Nitrobenzol	36,0
Bernstein	2,8			destil. Wasser	81,0

Tabelle 1.1: relative Dielektrizitätszahlen.

Es gibt in der Natur einige Stoffe, die in den unterschiedlichen Achsenrichtungen verschiedene Dielektrizitätseigenschaften aufweisen. Zur Beschreibung des Feldverhal-

tens derartiger Stoffe müssen die Materialeigenschaften entsprechend durch eine Matrix berücksichtigt werden, z.B. durch:

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

ϵ_x , ϵ_y und ϵ_z sind darin die relativen Dielektrizitätszahlen für die indizierten Achsenrichtungen.

1.4.4 Die Kapazität

Man betrachte die einfache Anordnung zweier paralleler, in einem Abstand d angeordneter Platten (Abb. 1.8). Auf einen der Leiter bringt man eine positive Ladungsmenge $+Q$ auf, auf den anderen gleich viele Ladungen umgekehrten Vorzeichens. In der Praxis erfolgt dies mit einer Spannungsquelle, deren Klemmen über leitende Verbindungen mit den zwei Platten verbunden sind.

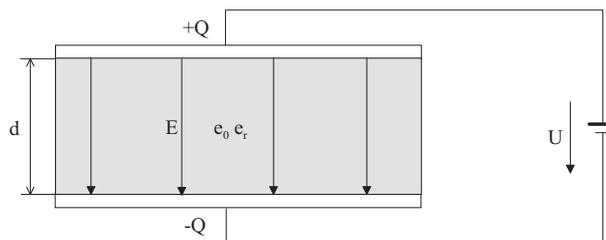


Abbildung 1.8: Zwei parallele Platten mit Batterie als Spannungsquelle

Es werden hierbei auf dem einen Leiter Ladungen der einen Art, auf dem anderen diejenigen umgekehrten Vorzeichens verschoben (influenziert). Bei einer gegebenen Spannung können diese Platten nur eine ganz bestimmte Anzahl von Ladungen aufnehmen. Ein Maß dafür ist die **Kapazität** C (Aufnahmefähigkeit). Aus Versuchen erkannte man, daß C umso größer ist, je größer die Fläche A der Leiter ist, je größer die Dielektrizitätszahl ϵ des dazwischenliegenden Mediums ist und sie wächst mit kleiner werdendem Abstand d der beiden Platten zueinander. Für die Ladungsmenge auf einer Platte gilt:

$$Q = \frac{\epsilon A}{d} U = C U. \quad (1.21)$$

Für eine allgemeine Anordnung zweier Leiter, entsprechend Abb. 1.9 folgt:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}} \left[\frac{As}{V} = \text{Farad} \right] \quad (1.22)$$

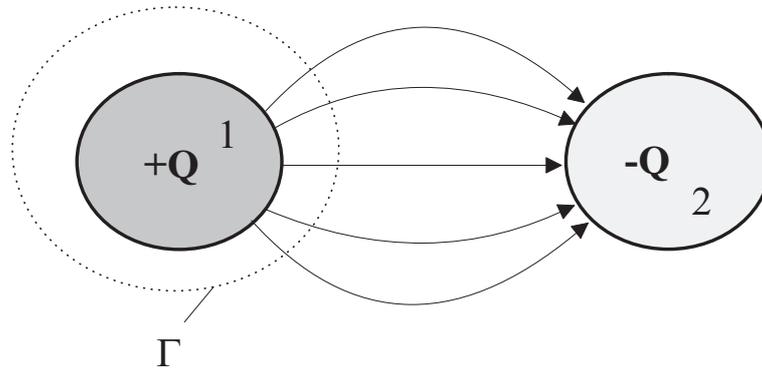


Abbildung 1.9: Kapazität zwischen zwei leitenden Körpern

Zur Veranschaulichung betrachte man eine Plattenanordnung mit einer Fläche von $A=1 \text{ cm}^2$ in einem Abstand von $d=1 \text{ mm}$ zueinander platziert. An diese Platten wird eine Spannung von $U=1 \text{ V}$ gelegt. Das Medium zwischen den Platten sei Luft ($\epsilon_r = 1$). Es ergibt sich die Kapazität :

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{1,0 \cdot 10^{-4}}{1,0 \cdot 10^{-3}} = 8,854 \cdot 10^{-13} \text{ F} \quad (1.23)$$

Bei einer Spannung von 1 V folgt die Ladungsmenge je Platte, nach Gl. 1.21 zu

$$Q = C U = 8,854 \cdot 10^{-13} \text{ As} . \quad (1.24)$$

Dividiert man diese Ladungsmenge durch die Elementarladung e , so erhält man die Anzahl der auf der Platte pro Quadratzentimeter befindlichen Ladungen. Hier sind dies $5,52615 \cdot 10^6$ Elektronen.

Voneinander isoliert angeordnete Leiter, zwischen denen sich ein elektrisches Feld einstellen kann, nennt man **Kondensatoren**. Ihr Einsatzgebiet in der Elektrotechnik erstreckt sich über praktisch alle Teilgebiete, von der Elektronik über die Nachrichtentechnik bis zur Hochspannungs- und Anlagentechnik. Dementsprechend gibt es eine Vielzahl von Bauarten und Ausführungen von Kondensatoren.

Parallelschaltung von Kondensatoren

Das Schaltsymbol eines Kondensators wird durch zwei etwas dickere, parallele Striche, welche die Platten eines Kondensators stilisieren, und den elektrischen Verbindungen zu diesen Platten dargestellt (Abb. 1.10).

Durch das Verbinden jeweils einer Platte von zwei oder mehr Kondensatoren in nachfolgender Weise werden die verbundenen Platten auf gleiches Potential gebracht.

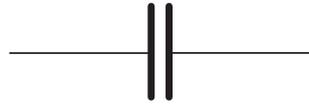


Abbildung 1.10: Schaltsymbol eines Kondensators

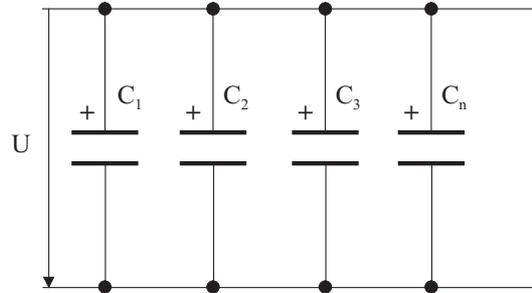


Abbildung 1.11: Parallelschaltung von Kondensatoren

Damit liegt an allen Kondensatoren dieselbe Spannung U . Die Gesamtkapazität ist die Summe aller verschobenen Ladungen bezogen auf die Spannung U :

$$C_{ges} = \frac{Q_{ges}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n}{U} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \quad (1.25)$$

Werden Kapazitäten parallel geschaltet, so ergibt sich die Gesamtkapazität aus der Summe aller Teilkapazitäten.

$$C_{ges} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{U} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (1.26)$$

Da an allen Teilkapazitäten dieselbe Spannung U liegt, folgt

$$Q_i = C_i U \quad \implies \quad Q_1 : Q_2 : Q_3 : \dots : Q_n = C_1 : C_2 : C_3 : \dots : C_n. \quad (1.27)$$

Die zugeführte elektrische Ladungsmenge Q_{ges} verteilt sich auf die Kondensatoren im Verhältnis ihrer Kapazitäten.

Reihenschaltung von Kondensatoren

Schaltet man mehrere Kondensatoren derart, daß zwischen dem Ende des einen und dem Beginn des nächsten eine leitende Verbindung besteht, so erhält man eine Serien- oder Reihenschaltung von Kondensatoren (Abb. 1.12).

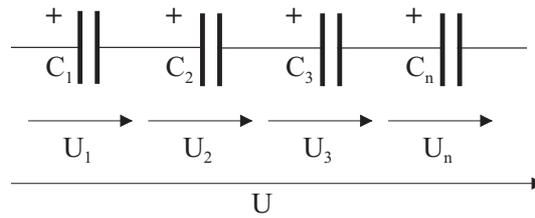


Abbildung 1.12: Reihenschaltung von Kondensatoren

Schließt man dieses Gebilde an den beiden äußersten Anschlüssen mit einer Spannungsquelle (z.B. Batterie) zusammen, so werden sich zunächst an den beiden äußersten Platten Ladungen verschieben. Durch das entstehende elektrische Feld werden infolge Influenz auch Ladungen auf den dazwischenliegenden Platten verschoben. An allen Platten muß sich dieselbe Ladungsmenge $+Q$ bzw. $-Q$ einstellen. Es gilt:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}, \quad \dots \quad U_n = \frac{Q}{C_n}. \quad (1.28)$$

Die gesamte angelegte Spannung verteilt sich auf die Kondensatoren gemäß :

$$U = \int_{s_i} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \quad (1.29)$$

Die Gesamtkapazität erhält man wiederum aus dem Quotienten $\frac{Q}{U}$ zu:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (1.30)$$

Als häufig auftretenden Sonderfall sei hier die Seireinschaltung zweier Kondensatoren angeführt:

$$C = \left(\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \right) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (1.31)$$

Durch die Serienschaltung von Kondensatoren wird die Gesamtkapazität verkleinert.

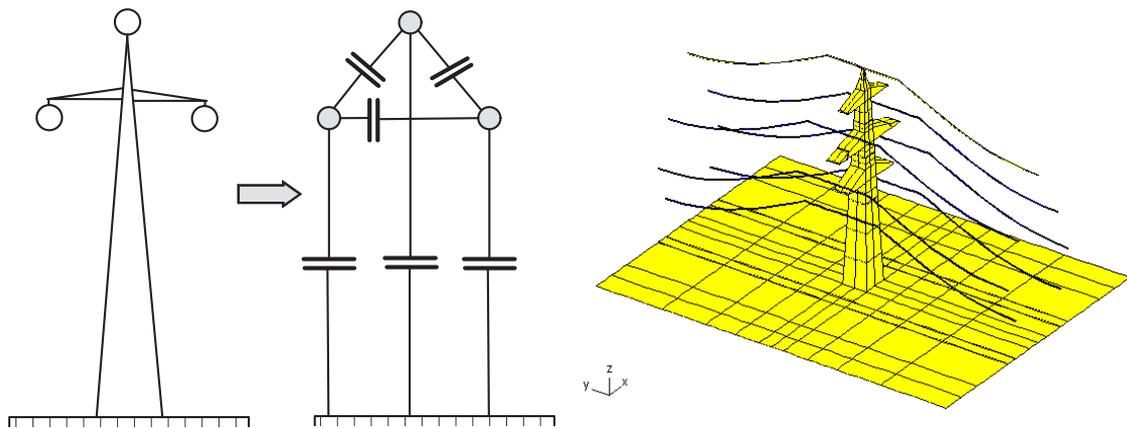


Abbildung 1.13: Kapazitäten an einer Hochspannungsleitung.

1.4.5 Beispiel aus der Praxis

Man betrachte die in Abb. 1.13 dargestellte Anordnung einer Hochspannungs-Freileitung.

Die drei Leitungen des Energieübertragungssystemes haben unterschiedliches Potential. Damit ist eine typisch kapazitive Anordnung gegeben. Die Kapazitäten, sie sind in der mittleren Abbildung dargestellt, beeinflussen nachhaltig das elektrische Verhalten eines Energieübertragungsnetzwerkes. Bei Doppel- und Mehrfachsystemen, wie sie bei 380kV-Trassen eingesetzt werden, sind die Verhältnisse noch komplexer (rechte Abbildung).

1.5 Energie im elektrostatischen Feld

Bisher wurde davon gesprochen, daß sich ungleichnamige Ladungen anziehen (Coulombsches Kraftgesetz). Zur Trennung von Ladungen muß hingegen mechanische Arbeit verrichtet werden. Beim Bernstein-Versuch war die mechanische Tätigkeit das Reiben des Fells an Bernstein. Dem Energieerhaltungsprinzip entsprechend muß sich diese Arbeit in irgend einer Form wiederfinden. In unserem Falle ist dies die **elektrische Feldenergie**. Sie ist im Raum, in welchem sich das elektrische Feld erstreckt, gespeichert. Man beobachte nun folgenden Versuch.

Zwei Körper, Leiter 1 und Leiter 2 haben die elektrischen Potentiale Φ_1 und Φ_2 (Abb. 1.14).

Wird nun eine differentielle elektrische Ladung dQ entgegen der elektrischen Feldkräfte von Leiter 1 nach Leiter 2 gebracht, so muß mechanische Arbeit $-dW_{mech}$ aufgebracht

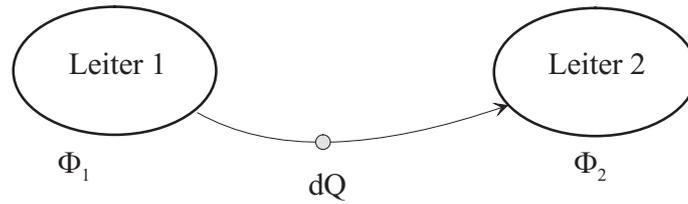


Abbildung 1.14: Verrichtung mechanischer Arbeit und Speicherung elektrischer Energie.

werden (negatives Vorzeichen bedeutet verbrauchte Energie):

$$dW_{el} = -dW_{mech} = dQ (\Phi_2 - \Phi_1) = dQ U_{21} = dQ U. \quad (1.32)$$

Allgemein ist die Ladung proportional der Spannung ($Q = C U$, Gl. 1.21). Bei diesem Versuch bleibt die Kapazität C der Anordnung unverändert. Somit muß für die infinitesimale transportierte Ladung dQ gelten:

$$dQ = C dU, \quad (1.33)$$

sodaß mit 1.32

$$W_{el} = \int_0^Q U dQ = C \int_0^U U dU = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad (1.34)$$

folgt und man folgende allgemeine Aussage ableiten kann:

Die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie entspricht dem halben Produkt aus der Kapazität und dem Quadrat der angelegten elektrischen Spannung.

2 Gleichförmig bewegte Ladungen

2.1 Der elektrische Strom

Bisher wurden elektrische Feldverteilungen behandelt, welche sich aufgrund ruhender Ladungen ergeben haben. Es wurde bei der Influenz zwar von Ladungsverschiebungen gesprochen, jedoch wurden nur die Endzustände, d.h. alle Ladungen befanden sich wieder in einer stabilen, ruhenden und ortsfesten Lage, betrachtet. Dieses Kapitel befaßt sich mit bewegten Ladungen. **Die Gesamtheit bewegter elektrischer Ladungen wird als elektrischer Strom bezeichnet.**

2.1.1 Die elektrische Stromstärke

Man betrachte dazu einen -durch welche Mechanismen auch immer- geladenen Kondensator, auf dessen einer Platte ein Elektronenüberschuß (negative geladene Platte) auf der anderen ein Elektronenmangel (positiv geladene Platte) vorliegt (Abb. ??).

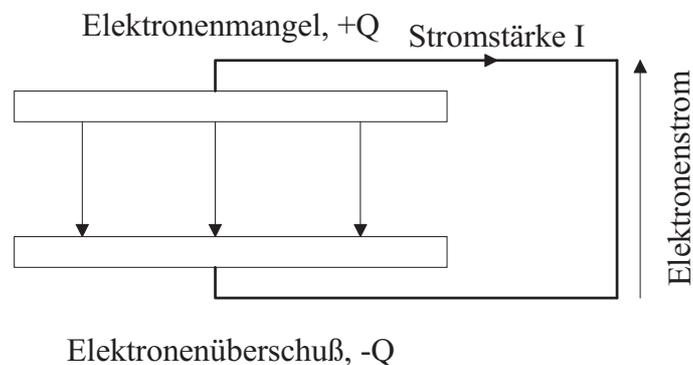


Abbildung 2.1: Feldabbau an einem Kondensator.

Soll sich nun die zwischen den Platten eingestellte elektrische Feldestärke abbauen, so muß ein Ladungsausgleich stattfinden. Die überschüssigen Elektronen der einen Platte müssen zur Platte mit Elektronenmangel fließen. Damit dies möglich ist, muß zwischen den Platten eine leitende Verbindung hergestellt werden. In Metallen sind Ladungen frei beweglich. Entsprechend eines, wie in Abb. ?? dargestellten Leiters wird dieser

Ladungsausgleich möglich. Als physikalische Größe zur Beschreibung des elektrischen Stromes wird die elektrische Stromstärke I definiert :

Definition:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad [A] \quad \dots \quad \text{Ampere.} \quad (2.1)$$

Die elektrische Stromstärke I ist die pro Zeiteinheit durch einen festgelegten Querschnitt hindurchfließende Ladungsmenge.

Da im allgemeinen die Stromstärke I zeitlich nicht gleichbleibend ist, kann für den augenblicklichen Stromstärkewert die differentielle Änderung der Ladungen pro Zeit angegeben werden(??).

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [A]. \quad (2.2)$$

Die Flußrichtung des Stromes ist definiert als die Richtung entgegengesetzt zum Elektronenstrom. D.h. der elektrische Strom fließt immer von plus nach minus (Quelle \implies Senke). Versuche haben gezeigt, daß die Dauer, bis ein Ladungsausgleich erfolgt ist, abhängig ist vom verwendeten Material. Die Gesetzmäßigkeit zur Beschreibung dieses Ladungsausgleiches erfolgt später.

2.1.2 Gleichstrom, Gleichspannung und Spannungsquellen

Zum Erreichen eines gleichbleibenden Elektronenflusses (**Gleichstrom**) und damit einer gleichmäßigen Stromstärke I muß gesorgt werden, daß die ab- bzw. zufließenden Ladungen an den Kondensatorplatten immer in gleichem Maße vorhanden bleiben. Dies kann durch eine gleichbleibende Spannung U an den Platten erreicht werden. Es kann die Spannung U als treibende Größe für die Ladungsbewegung angesehen werden. Unabhängig von der Anordnung muß also immer Energie (mechanische, chemische, ...) aufgewendet werden, um für die notwendigen Ladungen, die dann zu- bzw. abfließen können, zu sorgen. Bei unseren Betrachtungen ist es zunächst nicht erheblich, aus welcher Energieform dies geschieht. Der Einfachheit halber verwendet man ein Schaltsymbol und bezeichnet dieses als Spannungsquelle.

Der Pfeil von der plus-Klemme zur minus-Klemme in Abb. ?? wird als Zählpfeil bezeichnet und hat nichts mit einem Vektor zu tun. Der Zählpfeil wird so gewählt, daß er vom höheren zum niedrigeren Potential gerichtet ist.

Durch Verbinden der Klemmen der Gleichspannungsquelle mit einem Leiter entsteht ein Stromkreis, in dem ein gleichbleibender Strom der Stromstärke I fließt.

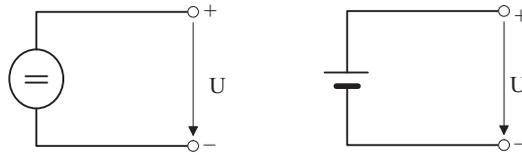


Abbildung 2.2: Schaltsymbole von Gleichspannungsquellen, links allgemein, rechts Batterie.

2.1.3 Die elektrische Stromdichte

Damit die vorhin beschriebene richtungsabhängige Bewegung der Elektronen im Leiter mathematisch korrekt erfolgen kann, wird wiederum eine vektorielle Größe benötigt.

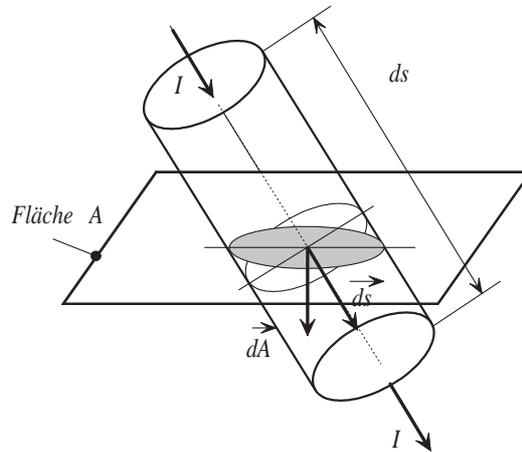


Abbildung 2.3: Zur Definition der elektrischen Stromdichte.

Dazu wird die sogenannte elektrische Stromdichte \vec{J} wie folgt definiert. Für ein infinitesimales Flächenelement $d\vec{A}$ gilt:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (2.3)$$

Die Gesamtstromstärke, welche durch eine Fläche A fließt errechnet sich aus der Integration aller infinitesimaler Stromstärken dI über diesen Querschnitt:

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2.4)$$

Umgekehrt kann die elektrische Stromdichte durch

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \vec{e}_A \quad (2.5)$$

dargestellt werden. Man kann dieselbe Stromdichte $|\vec{J}| = J$ in einem Leiter erreichen, wenn einmal der Strom hoch und der Querschnitt hoch und umgekehrt wenn der Strom klein und der Querschnitt klein sind.

2.2 Das Ohmsche Gesetz

Es wurde schon erwähnt, daß die Dauer des Ladungsausgleiches zwischen Quelle und Senke vom verwendeten Material des Leiters abhängig ist. In Metallen (gute Leiter) sind die Elektronen der äußersten Schale praktisch ungebunden. Somit stehen pro Atom zumindest ein freies Elektron für den Ladungsausgleich zur Verfügung. Für Metalle ergibt sich eine untere Schranke von etwa 10^{23} Ladungsträger pro cm^3 . Diese ungebundenen Ladungsträger führen bei Temperaturen größer als 0 Kelvin ungeordnete Bewegungen aus (vgl. Brownsche Molekularbewegung). Nach außen erscheint der Leiter elektrisch neutral.

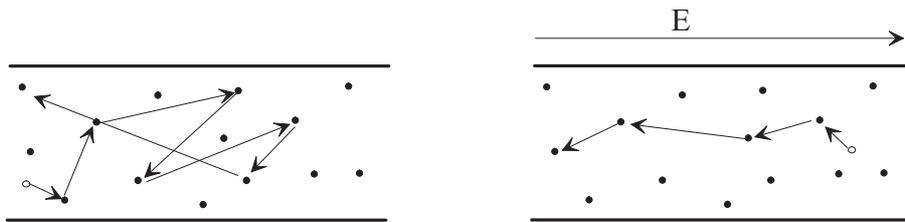


Abbildung 2.4: Bewegung der Ladungsträger im Metall, links ohne elektrisches Feld, rechts mit elektrischem Feld.

Durch Anlegen einer Spannung U an den Leiter wird nun ein elektrisches Feld erzeugt und die Elektronen werden entsprechend der auf sie wirkenden Kraft beschleunigt. Nach einiger Zeit treffen sie auf die Atomrümpfe des Gitters (=Ionen, es fehlen Elektronen) und werden unter Abgabe von Energie an das Gitter abgebremst, abgelenkt oder zurückgeworfen. Sie erreichen keine hohe Geschwindigkeit. Es kann jedoch eine *mittlere Driftgeschwindigkeit* festgestellt werden, die proportional zur elektrischen Feldstärke ist. Es gilt:

$$\vec{v} = -\mu_e \vec{E}. \quad (2.6)$$

Die Proportionalitätskonstante $\mu_e \left[\frac{m^2}{Vs} \right]$ wird als **Beweglichkeit** der Elektronen benannt. Mit der Einführung einer spezifischen Leitfähigkeit γ , definiert durch

$$\gamma = -\mu_e \rho_e = -\mu_e (n(-e)), \quad (2.7)$$

wobei n die Anzahl der freien Elektronen pro Volumseinheit ist, folgt für die elektrische Stromdichte :

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad [\gamma] = \left[\frac{A \cdot m}{m^2 \cdot V} = \frac{A}{V \cdot m} = \frac{S}{m} \right] \quad (2.8)$$

Nachfolgend sind für einige wichtige elektrische Werkstoffe deren Materialdaten zusammengefaßt:

Leiter	$\gamma \left[\frac{S}{m} \cdot 10^6 \right]$	$\rho_R \left[\Omega \cdot m \cdot 10^{-6} \right]$	$\alpha_{20} \left[\frac{1}{K} \cdot 10^{-3} \right]$
Silber	62,5	0,016	3,8
Kupfer	56	0,01786	3,93
Gold	44	0,023	4,0
Aluminium	35	0,02857	3,77
Messing	11-14	0,09-0,7	1,5
Eisen	5-10	0,2-0,15	4,5-6
Kohle	0,01-0,02	100-50	-0,2 bis -0,8

Tabelle 2.1: Materialdaten einiger Stoffe

Entsprechend Gl. ?? ist durch die Vorgabe der elektrischen Feldstärke auch die Richtung des elektrischen Stromes bestimmt. Die Gesamtheit der Stromdichtevektoren \vec{J} eines betrachteten Gebietes bezeichnet man als **elektrisches Strömungsfeld**. Auch hier gibt es die Unterscheidung zwischen homogenen und inhomogenen Strömungsfeldern.

Zur Beschreibung der Auswirkung des Fließens elektrischen Stromes in Stoffen wird nun der Begriff des **elektrischen Widerstandes** eingeführt. Das in Abb. ?? dargestellte zylindrische Metallstück sei an dessen Enden mit den Klemmen einer Gleichspannungsquelle verbunden:

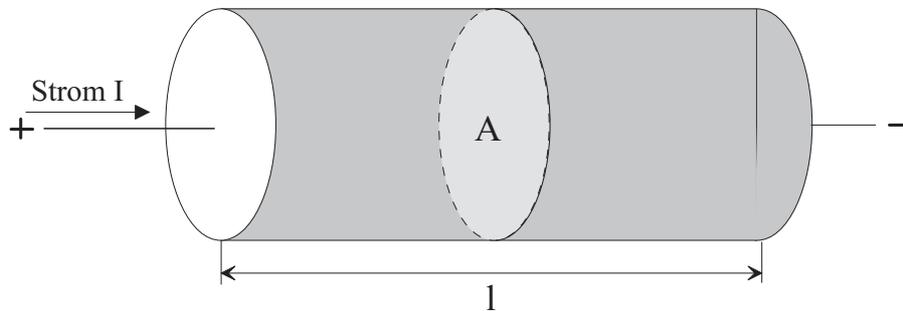


Abbildung 2.5: Der Ohmsche Widerstand

Der Querschnitt A dieses metallischen Zylinders bleibt über die gesamte Länge l unverändert. Aufgrund der angelegten Spannung U stellt sich eine konstante elektrische Feldstärke \vec{E} entlang des metallischen Leiters ein. Für die Spannung gilt:

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{s} = |\vec{E}| l. \quad (2.9)$$

Infolge des homogenen Leiters ist die Stromdichte überall gleich groß. Daraus resultiert die Stromstärke I zu:

$$I = \gamma |\vec{E}| A. \quad (2.10)$$

Nach Substitution der elektrischen Feldstärke mit Hilfe von Gl. ?? erhält man:

$$U = \frac{l}{\gamma A} I \quad (2.11)$$

Diese Beziehung wird als das **Ohmsche Gesetz** bezeichnet. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen der an einem Leiter angelegten Spannung U und dem, infolge dieser Spannung fließenden Strom I . Für den Bruch in Gleichung ?? wird der Begriff des **elektrischen Widerstandes** mit dem Formelzeichen R eingeführt:

$$R = \frac{l}{\gamma A} \quad \left[\frac{m}{\frac{A}{Vm} m^2} = \frac{V}{A} \right] \quad \dots \quad (Ohm, \Omega), \quad (2.12)$$

und Gleichung ?? kann vereinfacht dargestellt werden:

$$U = R I. \quad (2.13)$$

Die elektrische Stromstärke I in einem metallischen Leiter ist proportional der angelegten elektrischen Spannung U .

Sehr häufig wird anstelle der elektrischen Leitfähigkeit γ dessen reziproker Wert, der sogenannte **spezifische Widerstand** ρ_R verwendet. Die Zahlenwerte für ρ_R einiger wichtiger Stoffe sind bereits in Tabelle ?? aufgelistet. Für Gleichung ?? kann daher auch

$$R = \frac{l}{\gamma A} = \rho_R \frac{l}{A} \quad (2.14)$$

geschrieben werden. Desgleichen verwendet man häufig den als **elektrischen Leitwert** G bezeichneten reziproken Widerstand R^{-1} .

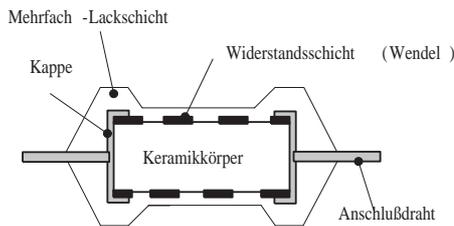
$$I = \frac{1}{R} U = G U; \quad [G] = \left[\frac{1}{\Omega} = S \right] \quad \dots \quad (\text{Siemens}, S). \quad (2.15)$$

Im allgemeinsten Fall ist ein elektrischer Leiter nicht so regelmäßig wie im Falle eines Zylinders. Es gilt hier

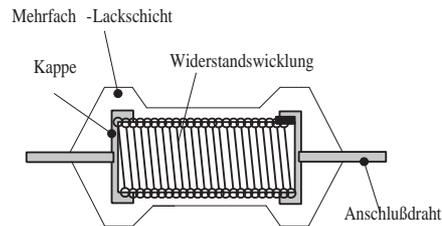
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}. \quad (2.16)$$

2.2.1 Bauformen Ohmscher Widerstände

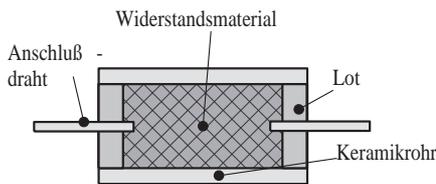
Je nach Anwendungsgebiet gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Bauformen Ohmscher Widerstände. Kriterien dafür sind die thermische Belastbarkeit, Genauigkeit, Langzeitstabilität, das parasitäre Verhalten, usw. In den nachfolgenden Abbildungen sind unterschiedliche Bauformen dargestellt.



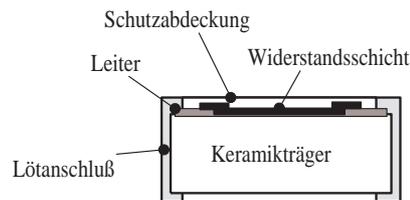
a) Schichtwiderstand



b) Drahtwiderstand



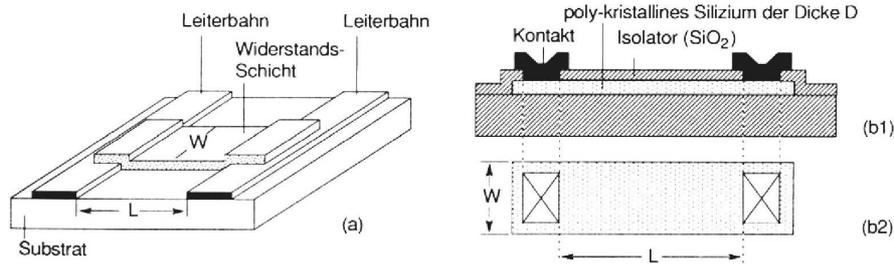
c) Massewiderstand



d) Dünnschichtwiderstand

Ebene Schichtwiderstände werden auch in Dickschichtschaltungen (a) sowie in integrierten Schaltkreisen (b) ausgeführt.

Mittels eines veränderbaren Abgriffes an einem Widerstand lassen sich sogenannten **Potentiometer** oder Spannungsteiler verwirklichen. Bei Drahtwiderständen ermöglicht



ein beweglicher Schleifkontakt den Abgriff an unterschiedlichen Stellen. Auch in Schicht-technologie werden Potentiometer ausgeführt.

2.3 Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Der lineare zusammenhang zwischen Strom und Spannung gilt nur dann, wenn der Ohm- sche Widerstand R sich nicht ändert. Nur dann ist gewährleistet, daß eine Erhöhung der Spannung am Widerstand auch eine proportionale Erhöhung des Stromes zur Folge hat. Diese Konstanz von R ist nicht über den gesamten Temperaturbereich gegeben.

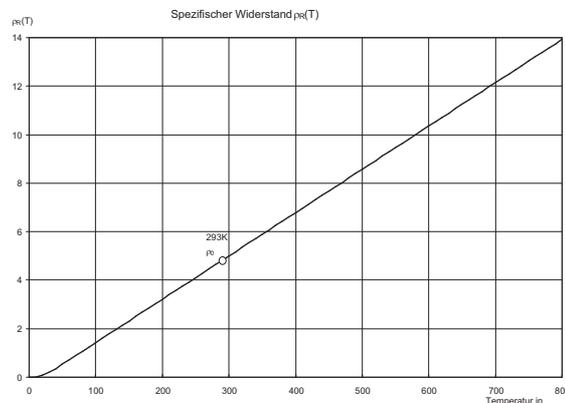


Abbildung 2.6: Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes ρ_R

In Abb. ?? ist die Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von Kupfer von der absoluten Temperatur T [K] grafisch dargestellt. $0K$ entsprechen $-273,15^\circ C$. In weiten Teilen nimmt der spezifische Widerstand ρ_R etwa linear mit der Temperatur zu. Im Bereich der Raumtemperatur $T_0=20^\circ C = 293 K$ hat folgende lineare Näherung Gültigkeit:

$$\rho_R(T) = \rho_{R0} [1 + \alpha_{20}(T - T_0)] \quad [\Omega m]. \quad (2.17)$$

Darin ist ρ_{R_0} der spezifische Widerstand bei Raumtemperatur T_0 . Der Temperaturkoeffizient α_{20} ist eine Materialkenngröße. Für einige Stoffe ist dieser Wert in Tab. ?? aufgelistet. Dieser Temperaturkoeffizient kann auch negatives Vorzeichen besitzen, d.h. der spezifische elektrische Widerstand wird mit steigender Temperatur kleiner. Bei sehr vielen Anwendungen will man über einen weiten Temperaturbereich eine Konstanz des elektrischen Widerstandes erreichen. Dies kann durch Zusammenschalten von Widerständen mit entsprechenden Temperaturkoeffizienten erreicht werden.

Sind sehr große Temperaturbereiche zu betrachten, so ist die lineare Näherung nicht mehr genau genug. Es muß eine quadratische Näherung herangezogen werden. Die beziehung wird in ?? angedeutet, ohne aber auf den darin verwendeten Temperaturkoeffizienten β näher einzugehen.

$$\rho_R(T) = \rho_{R_0} [1 + \alpha_{20}(T - T_0) + \beta (T - T_0)^2]. \quad (2.18)$$

Es gibt Stoffe, die ihren spezifischen elektrischen Widerstand bei sehr tiefen Temperaturen (nur einige Kelvin) plötzlich verlieren und bis zum absoluten Nullpunkt auf Null bleiben. Derartige Materialien werden als **Supraleiter** bezeichnet.

2.4 Analogie zwischen elektrostatischem Feld und Strömungsfeld

Die Gegenüberstellung der Gleichungen des elektrostatischen Feldes mit denen des elektrischen Strömungsfeldes läßt folgende Analogien erkennen:

Elektrostatisches Feld

Strömungsfeld

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$$\Psi = \int_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{\Gamma}$$

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$Q = C U$$

$$I = G U$$

\vec{E} und U haben in beiden Fällen dieselbe Bedeutung. Die elektrische Stromdichte \vec{J} entspricht der elektrischen Verschiebung \vec{D} , der elektrische Fluß Ψ der elektrischen Stromstärke I , die Dielektrizitätszahl ϵ ist analog zur elektrischen Leitfähigkeit γ und die Kapazität C entspricht dem Leitwert G .

2.5 Die Leistung im stationären Strömungsfeld

Zur Beschreibung der elektrischen Leistung P betrachte man ein differentielles Volumenelement dV , gemäß Abb. ?? :

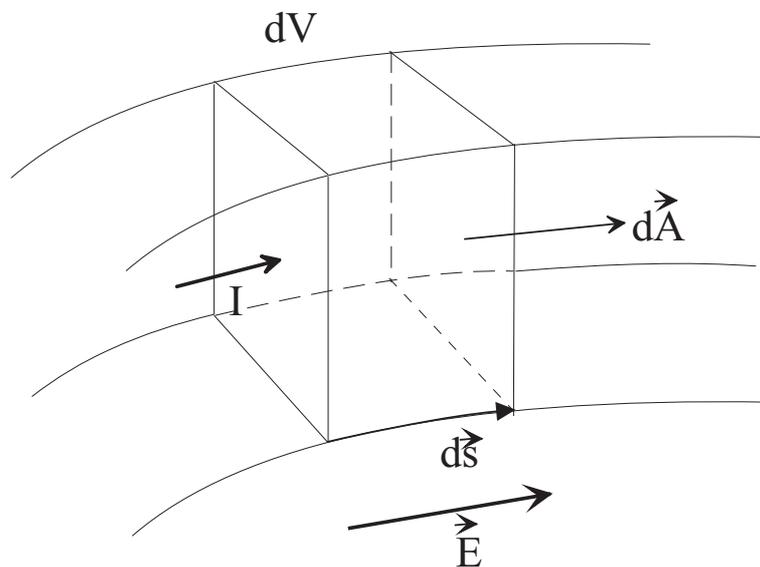


Abbildung 2.7: Bestimmung der elektrischen Leistung.

Für das differentielle Volumenelement gilt:

$$dV = \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (2.19)$$

In diesem differentiell kleinen Volumen ist die elektrische Feldstärke \vec{E} und das Längenelement $d\vec{s}$ in gleicher Richtung. Die umgesetzte elektrische Leistung dP ergibt sich aus dem Produkt der elektrischen Spannung in diesem Volumenelement mit dem durchfließenden Strom :

$$dP = dU dI \quad (2.20)$$

Setzt man darin die Beziehungen

$$dU = \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

und

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

ein, so folgt:

$$dP = dU dI = \vec{E} \cdot d\vec{s} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{J} dV. \quad (2.21)$$

Das skalare Vektorprodukt aus den beiden Vektoren \vec{E} und \vec{J} bezeichnet man dabei als **Leistungsdichte** p .

$$p = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J}. \quad (2.22)$$

Damit wird die in einem Gesamtvolumen Ω umgesetzte elektrische Leistung zu

$$P = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = UI \quad [VA = W] \quad \dots \quad \text{Watt}. \quad (2.23)$$

3 Gleichstromschaltungen

3.1 Der einfache elektrische Stromkreis

Der einfache elektrische Stromkreis besteht zumindest aus einer Spannungs- bzw. Stromquelle, einem Verbraucherwiderstand und den leitenden, widerstandsbehafteten Verbindungen zur Quelle.

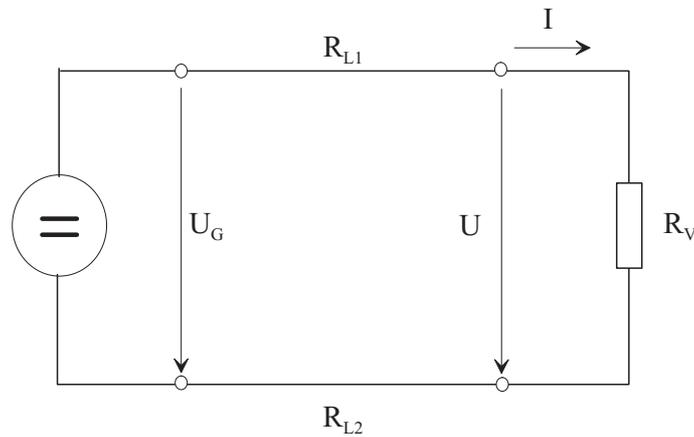


Abbildung 3.1: Einfacher elektrischer Stromkreis.

Die von der Gleichspannungsquelle erzeugte Spannung an den Klemmen wird durch den Spannungszählpfeil U_G dargestellt. Die Zuleitungswiderstände R_{L1} und R_{L2} bedeuten für den elektrischen Strom einen Widerstand. An den Klemmen des Verbrauchers R_V wird daher nur eine um den Spannungsabfall auf den Leitungen kleinere Spannung U auftreten. Das rechteckige Schaltsymbol stellt den elektrischen Widerstand R_V des Verbrauchers dar. In ebensolcher Darstellung können die Leitungswiderstände R_{L1} und R_{L2} im sogenannten Widerstandsersatzschaltbild, häufig nur als Ersatzschaltbild bezeichnet, dargestellt werden. Die dabei auftretenden elektrischen Spannungsabfälle werden wiederum durch Spannungszählpfeile dargestellt.

Im Ersatzschaltbild muß folgende Regelung eingehalten werden. Der Strom I fließt von der positiven Klemme der Spannungsquelle zur negativen. Ist die Richtung des Stromes I festgelegt, so sind die Zählpfeile der Spannungsabfälle über den Ohmschen Widerständen in derselben Richtung wie die des elektrischen Stromes I zu wählen. Im

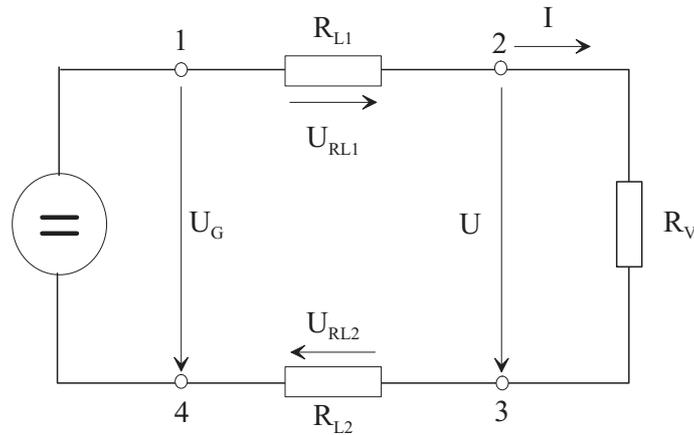


Abbildung 3.2: Ersatzschaltbild des einfachen Stromkreises.

Widerstandsersatzschaltbild Abbildung ?? sind die, auf die Leiterlänge verteilten Zu-
 leitungswiderstände durch diskrete Widerstände R_{L1} und R_{L2} ersetzt. Damit gilt im
 Widerstandsersatzschaltbild, daß alle darin eingezeichneten Leitungen *ideal*, das heißt
 unendlich gut leitend sind. Entsprechend dem Ohmschen Gesetz errechnen sich die ein-
 zelnen Spannungsabfälle zu:

$$U_{RL1} = I R_{L1} \quad U_{RL2} = I R_{L2} \quad U = I R. \quad (3.1)$$

3.2 Zweipole

Im Ersatzschaltbild in Abbildung ?? werden nur Elemente mit zwei Anschlüssen ver-
 wendet. Derartige Schaltelemente bezeichnet man als **Zweipole**. Durch das Strom-
 Spannungsverhalten an den Klemmen wird der Zweipol in seinem elektrischen Verhalten
 eindeutig beschrieben.

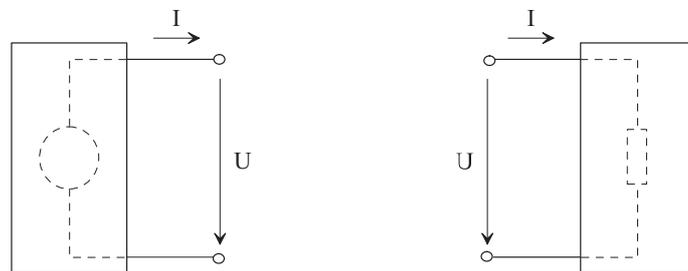


Abbildung 3.3: Verhältnisse an einem allgemeinen Zweipol.

Am linken Zweipol in Abbildung ?? werden die tatsächlichen Strom- und Spannungs-

verhältnisse an den Klemmen eines Erzeugers (Quelle) dargestellt. Strom- und Spannungszählpfeil sind entgegengesetzt gerichtet. Diese Richtungszuordnung wird als **Erzeugerpfeilsystem, EZS** bezeichnet. In strichelierter Weise ist beispielsweise eine schon beschriebene Gleichspannungsquelle eingezeichnet.

Auf der rechten Seite in Abbildung ?? sind Strom- und Spannungszählpfeil in gleicher Richtung dargestellt. Ein derartiges Klemmenverhalten charakterisiert den elektrischen Zweipol als Verbraucher. Diese Darstellung wird als **Verbraucherzählpfeilsystem, VZS** bezeichnet. Zur Beschreibung eines Ersatzschaltbildes wird in der Regel nur ein System verwendet. Im allgemeinen ist dies das Verbraucherzählpfeilsystem. Wird in diesen Arbeitsunterlagen nicht das VZS verwendet, so wird extra darauf hingewiesen.

An einem Ohmschen Verbraucher ist das Produkt aus Strom mal Spannung, die elektrische Leistung oder auch Verlustleistung, stets positiv!

Quellen werden solcher Art als **aktive** und Verbraucher als **passive** Zweipole bezeichnet.

3.2.1 Zusammenschaltung von Zweipolen

Durch die Zusammenschaltung von aktiven und passiven Zweipolen kann ein elektrisch beliebig komplexes Gebilde, das sogenannte **Netzwerk** entstehen. Zu dessen Analyse müssen bestimmte Regeln berücksichtigt werden.

Das erste Kirchhoffsche Gesetz

Aus der Kenntnis der Quellenfreiheit des elektrischen Strömungsfeldes (es gibt keine Quellen und Senken von \vec{J}) kann zunächst der sogenannte **Knotenpunktsatz** oder das **erste Kirchhoffsche Gesetz** hergeleitet werden. Man betrachte folgende allgemeine Zusammenschaltung von Ohmschen Widerständen in Abbildung ??.

Bildet man darin über eine beliebig gewählte jedoch geschlossene Oberfläche Γ das Flächenintegral gemäß Gleichung ??

$$\oint_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0, \tag{3.2}$$

so ergibt dies immer Null. Führt man weiter von allen Zu- und Abführungen zum Volumen das Integral aus, so ergeben sich nur Beiträge zum Gesamtintegral, wenn am entsprechenden Oberflächenelement $d\vec{A}$ eine Stromdichte \vec{J} ungleich Null vorliegt. Durch die unterschiedlichen Richtungen der immer nach außen gerichteten Flächennormalen (Richtung von $d\vec{A}$) ergeben sich die ins Volumen fließenden Ströme mit negativen, die

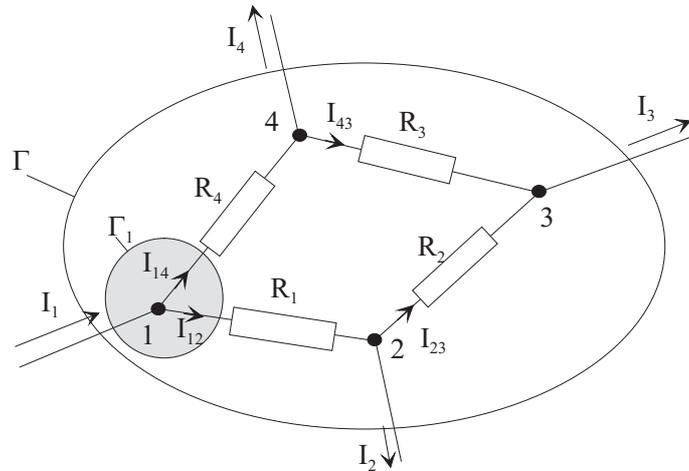


Abbildung 3.4: Zum ersten Kirchhoffschen Gesetz.

aus dem Volumen fließenden Ströme mit positiven Vorzeichen. Für das von Γ begrenzte Volumen folgt :

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad \text{bzw.} \quad I_1 = I_2 + I_3 + I_4. \quad (3.3)$$

Die Summe der in ein geschlossenes Volumen (in unserem Falle mit der Bezeichnung Γ) **hinein- und herausfließenden Ströme ist immer gleich Null.**

Reduziert man nun dieses Volumen Γ auf das Gebiet rund um einen Knoten, z.B. den Knoten 1 mit der Oberfläche Γ_1 , so folgt:

$$-I_1 + I_{14} + I_{12} = 0 \quad \text{bzw.} \quad I_1 = I_{14} + I_{12} \quad (3.4)$$

Dies gilt für alle beliebigen Volumina in einem Netzwerk, also auch für jeden einzelnen Punkt einer Stromverzweigung (Knoten). Somit gilt für eine beliebige Anzahl von zu- und abfließenden Strömen in einem Knoten in einem allgemeinen Netzwerk (Abbildung ??):

Die Summe aller zu- und abfließenden Ströme in einem Knoten eines elektrischen Netzwerks ist immer Null

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (3.5)$$

Diese Beziehung wird als **das erste Kirchhoffsche Gesetz** bezeichnet. Oftmals wird dafür auch der Begriff **Knotenregel** verwendet.

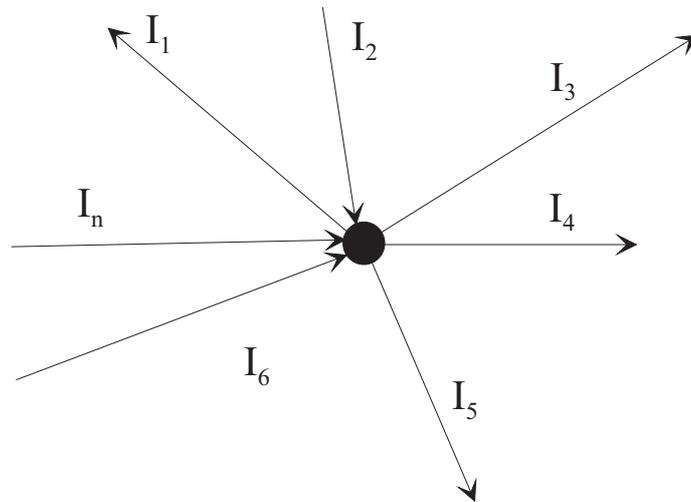


Abbildung 3.5: Knoten im Netzwerk mit n Strömen.

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz

Mit dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz werden die Spannungsverhältnisse in einem Netzwerk mit beliebig vielen Quellen und Verbrauchern beschrieben. Folgender Ausschnitt aus einem Netzwerk soll zur Beschreibung herangezogen werden:

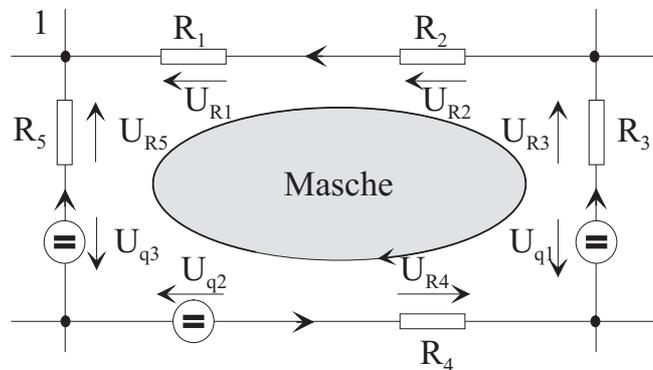


Abbildung 3.6: Zum zweiten Kirchhoffschen Gesetz.

Der Netzwerkausschnitt enthält drei Gleichspannungsquellen mit den Klemmenspannungen U_{q1} , U_{q2} und U_{q3} . Entsprechend der Konvention, daß Klemmenspannung und Klemmenstrom bei Quellen entgegengerichtet sind, ist durch die Vorgabe der Zählpfeile für die Klemmenspannungen auch die Stromrichtung in diesen Zweigen festgelegt. Die Verbindung von einem Knoten zu einem benachbarten wird dabei als *Zweig* bezeichnet. Die Richtungen der Spannungsabfälle U_{R1} bis U_{R5} über den Widerständen R_1 bis R_5 sind durch die Richtungen der Ströme in den einzelnen Zweigen vorgegeben (Ver-

braucher, passive Zweipole). Mit den solcherart gefundenen Teilspannungen kann eine Spannungsbilanz entlang einer geschlossenen Schleife (Masche) gezogen werden.

Durchläuft man eine Masche, so stellt man fest, daß in den einzelnen Knoten unterschiedliche Potentiale vorherrschen. Man kann den Umlauf der Masche in einem beliebigen Knoten beginnen. Ebenso ist der Umlaufsinn wählbar. Durchläuft man eine Masche und beginnt beispielsweise im Knoten 1 mit dem Potential ϕ_1 , so stellt man fest, daß die Potentiale in den einzelnen Knoten der Masche unterschiedliche Werte aufweisen. Beendet man die Masche jedoch wieder im Ausgangsknoten 1, so muß dort wieder dasselbe Potential ϕ_1 erreicht werden. Das bedeutet, durch einen geschlossenen Maschenumlauf ist die gesamte, durchschrittene Potentialdifferenz **Null**.

Zunächst weist man allen Elementen im Ersatzschaltbild, d.h. sowohl an den aktiven als auch an den passiven Zweipolen die Spannungszählpfeile zu. Anschließend summiert man alle Teilspannungen entlang der gewählten Masche. Dabei werden die Teilspannungen, deren Richtungen dem Maschenumlaufsinne gleichen, positiv, alle anderen negativ, gezählt. Diese Summe muß Null ergeben. Für unsere Masche in Abbildung ?? folgt daher:

$$-U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} + U_{q1} - U_{R4} + U_{q2} - U_{q3} + U_{R5} = 0. \quad (3.6)$$

Nach dem Umformen von Gleichung ??, indem man die Spannungen aller aktiven Elemente auf einer Seite läßt, folgt:

$$-U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} - U_{R4} + U_{R5} = -U_{q1} - U_{q2} + U_{q3}. \quad (3.7)$$

Aus Gl. ?? erkennt man, daß die vorzeichenrichtige Summe aller Spannungsquellen der Summe aller Spannungen an den passiven Zweipolen entspricht. Für eine allgemeine Masche mit m Spannungsabfällen U_{Rm} an passiven Zweipolen und n Quellenspannungen U_{qn} gilt :

$$\sum_{j=1}^n U_{qj} - \sum_{i=1}^m U_{Ri} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^n U_{qj} = \sum_{i=1}^m U_{Ri}. \quad (3.8)$$

In Worten gefaßt, besagt **die Kirchhoffsche Maschenregel** bzw. **das zweite Kirchhoffsche Gesetz**:

Die Summe aller Spannungen bei einem vollständigen Maschenumlauf ergibt immer Null!

Serienschaltung von Ohmschen Widerständen

Die **Serien- oder Reihenschaltung** von Ohmschen Widerständen wird am nachfolgendem Beispiel diskutiert. In Abbildung ??, links sind drei Widerstände in Reihe geschaltet. Diese werden von einer Gleichspannungsquelle mit einer Klemmenspannung U gespeist.

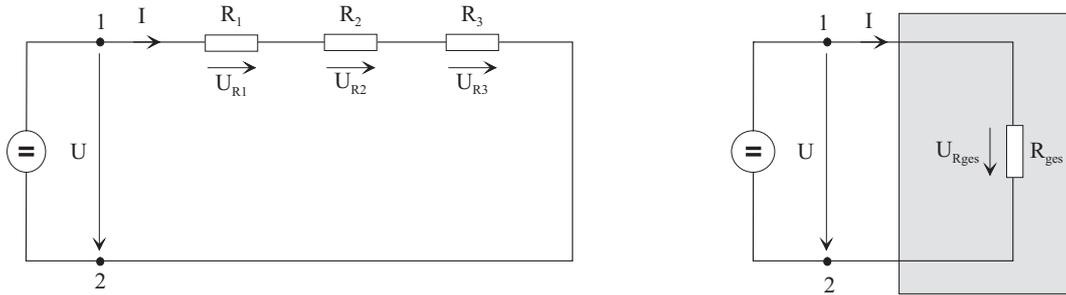


Abbildung 3.7: Serienschaltung Ohmscher Widerstände.

Die grundlegende Eigenschaft bei einer Serienschaltung von Widerständen besteht darin, daß **alle** Widerstände vom gleichen Strom I durchflossen werden. Bei Kenntnis der Widerstandswerte können die Spannungsabfälle an den Widerständen mittels des Ohmschen Gesetzes angegeben werden. An den Klemmen 1 und 2 liegt eine Spannung U und ein Strom I fließt in die Serienschaltung.

Dieses elektrische Verhalten an den Klemmen kann nun auch durch einen, an Stelle der Serienschaltung eingebrachten Ersatzzweipol mit dem Ersatzwiderstand R_{ges} nachgebildet werden (Abbildung ??, rechts). Bildet man in der Reihenschaltung ??, links den Maschenumlauf, so folgt dafür:

$$U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} = U \quad \text{bzw.} \quad IR_1 + IR_2 + IR_3 = U. \quad (3.9)$$

Für den Ersatzzweipol rechts gilt naturgemäß:

$$U_{R_{ges}} = U \quad \text{bzw.} \quad IR_{ges} = U. \quad (3.10)$$

Soll das Klemmenverhalten beider Schaltungen gleich sein, so müssen sich der Strom I und die Spannung U an den Klemmen gleichen. Die Gleichsetzung der Spannung U aus den Gleichungen ?? und ?? ergibt:

$$IR_1 + IR_2 + IR_3 = IR_{ges}, \quad (3.11)$$

und die Division durch den Strom I führt zum Ersatzwiderstand der Reihenschaltung:

$$R_1 + R_2 + R_3 = R_{ges}. \quad (3.12)$$

Der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung errechnet sich aus der Summe aller Einzelwiderstände.

Allgemein gilt für die Serienschaltung von n Ohmschen Widerständen:

$$R_{ges} = \sum_{i=1}^n R_n. \quad (3.13)$$

Durch die Reihenschaltung von Ohmschen Widerständen kann folglich eine Erhöhung des Gesamtwiderstandes erreicht werden.

Parallelschaltung von Ohmschen Widerständen

In ähnlicher Weise wie bei der Behandlung der Serienschaltung kann hier für die Parallelschaltung von Widerständen ein Ersatzzweipol mit elektrisch gleichem Klemmenverhalten gefunden werden. Abbildung ??, links zeigt drei parallel geschaltete Ohmsche Widerstände. Diese Schaltung wird wieder von einer Spannungsquelle mit der Klemmenspannung U gespeist. In die Parallelschaltung fließt der Strom I .

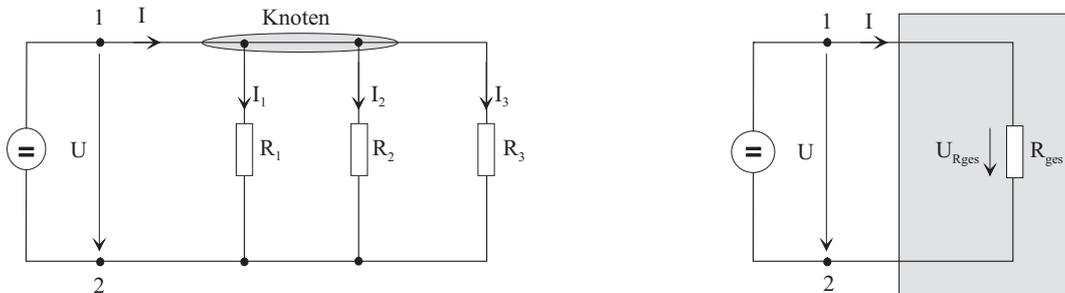


Abbildung 3.8: Parallelschaltung Ohmscher Widerstände.

Alle parallel geschalteten Widerstände liegen an derselben Spannung U . Je nach Größe der einzelnen Widerstände wird nun über diese ein, dem Ohmschen Gesetz entsprechender Strom fließen. Gemäß der Knotenregel (erstes Kirchhoffsches Gesetz) muß die Summe aller Ströme an einem Knoten Null ergeben. Für diesen Fall gilt daher:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}. \quad (3.14)$$

Für den Ersatzzweipol mit dem Ersatzwiderstand R_{ges} gilt an den Klemmen:

$$I = \frac{U}{R_{ges}}. \quad (3.15)$$

Klemmenstrom- und Spannung müssen wieder gleich sein. Das Gleichsetzen des Stromes I ergibt:

$$\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \frac{U}{R_{ges}}, \quad (3.16)$$

und die Division durch U führt zu:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{ges}}. \quad (3.17)$$

Für eine Parallelschaltung mit m Ohmschen Widerständen gilt allgemein:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{R_i}. \quad (3.18)$$

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte aller Einzelwiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes

In Leitwerten geschrieben lautet Gleichung ??

$$G_{ges} = \sum_{i=1}^m G_i. \quad (3.19)$$

Führt man dies beispielsweise für zwei Widerstände mit $R_1 = 2\Omega$ und $R_2 = 4\Omega$ aus, so folgt :

$$R_{ges} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}\Omega.$$

Der Ersatzwiderstand R_{ges} einer Parallelschaltung ist kleiner als der kleinste Einzelwiderstand! Durch eine Parallelschaltung wird immer eine Verminderung des Gesamtwiderstandes erreicht.

3.2.2 Zusammenschaltung von Quellen mit Verbrauchern

Im Ersatzschaltbild eines einfachen elektrischen Stromkreises (??) wurde eine Gleichspannungsquelle mit der Klemmenspannung U_G mit einer Serienschaltung von drei Widerständen verbunden. Das Verhalten der Quellen ist im allgemeinen nicht unabhängig von den an den Klemmen zugeschalteten Netzwerken. Die Eigenschaften von Spannungs- und Stromquellen bei unterschiedlicher Belastung werden nachfolgend erläutert.

Allgemeine Eigenschaften von Quellen

Die möglichen Belastungen von Quellen liegen zwischen zwei Grenzfällen. In Abbildung ?? sind dafür die entsprechenden aktiven Zweipole und deren Beschaltung dargestellt.

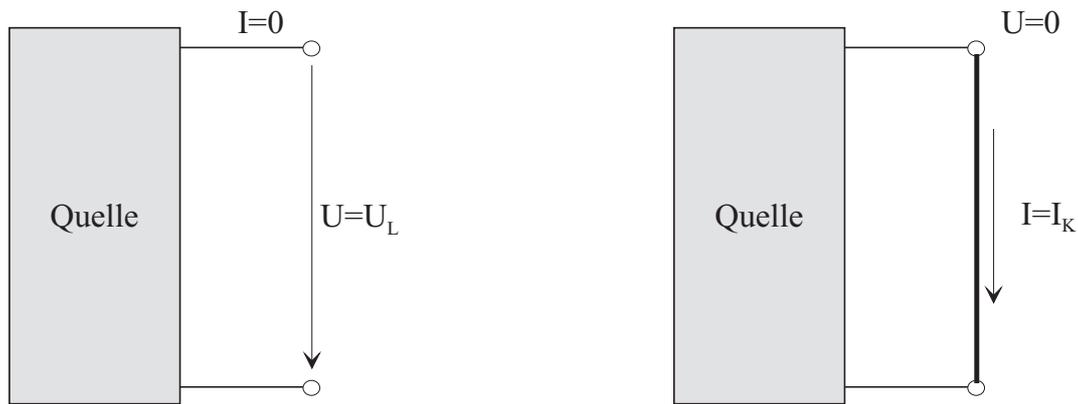


Abbildung 3.9: Leerlauf und Kurzschluß einer Quelle.

Die Quelle auf der linken Seite ist unbelastet, d.h. es ist kein Widerstand (gleichbedeutend mit $R = \infty$) zugeschaltet. Diesen Belastungszustand nennt man **Leerlauf**. An den Klemmen herrscht die Leerlaufspannung $U = U_L$, der Strom muß $I = I_L = 0$ sein. Auf der rechten Seite in Abbildung ?? ist der zweite Extremfall einer Belastung dargestellt. An den Klemmen der Quelle wird ein unendlich gut leitender Widerstand, d.h. $R = 0$ zugeschaltet. Diese Belastung wird als **Kurzschluß** bezeichnet. Es fließt der Kurzschlußstrom $I = I_K$. Bedingt durch den Ohmschen Widerstand $R = 0$ an den Klemmen kann kein Spannungsabfall entstehen, sodaß im Kurzschlußfall für die Klemmenspannung $U = U_K = 0$ gelten muß. Nachdem zu beobachten ist, daß im Kurzschlußfalle der Kurzschlußstrom, obwohl $R = 0$ gilt, nicht unendlich hoch wird, muß eine genauere Beschreibung der Quellen gefunden werden.

Die belastete Spannungsquelle

Eine **ideale** Spannungsquelle soll, unabhängig von der angeschlossenen Last, immer eine konstante Klemmenspannung U liefern. Dies widerspricht den Erfahrungstatsachen. Vielmehr ist feststellbar, daß ein erhöhter Stromfluß einen nicht unbedeutenden Spannungsrückgang an den Klemmen der Quelle zur Folge hat. Im Inneren einer Gleichspannungsquelle (z.B. Akkumulator, Batterie) befinden sich widerstandsbehaftete Leitungen, wie Wicklungsdrähte, Elektrolyte, ...). In Summe wird daher, abhängig von der Stromstärke I auch im Inneren der Quelle ein Spannungsabfall auftreten, sodaß an den Klemmen der Quelle eine um diesen Spannungsabfall verringerte Spannung U herrschen wird. Im Ersatzschaltbild einer **realen** Spannungsquelle kann man dies durch einen in Reihe geschalteten Innenwiderstand R_i berücksichtigen (Abbildung ??):

Über den Lastwiderstand R_L fließt der Strom I_L . Am Innenwiderstand R_i der Quelle fällt der Spannungsfall U_i ab. Entsprechend der Maschenregel ergibt sich die Klemmen-

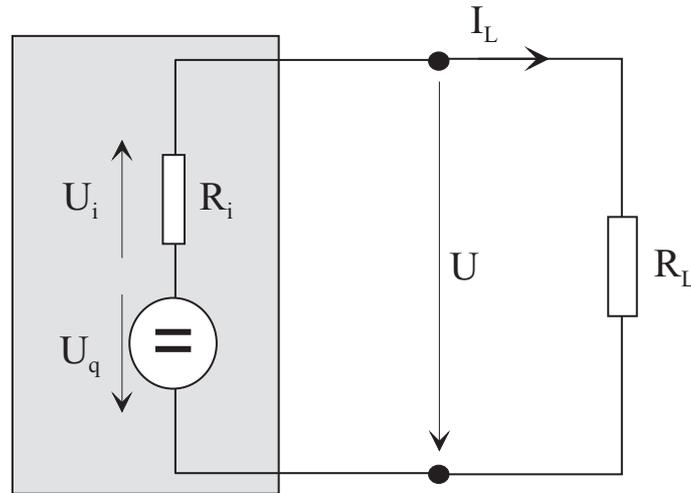


Abbildung 3.10: Elektrische Verhältnisse an einer realen Spannungsquelle bei allgemeiner Belastung.

spannung U aus:

$$U_q = U_i + U \quad \text{bzw.} \quad U_q = I_L(R_i + R_L). \quad (3.20)$$

Der dabei fließende Strom wird durch die beiden Widerstände R_i und R_L begrenzt:

$$I_L = \frac{U_q}{R_i + R_L}. \quad (3.21)$$

Mit dieser Beziehung folgt aus Gleichung ?? für die Klemmenspannung

$$U = I_L R_L = \frac{U_q}{R_i + R_L} R_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_q = U_q - I_L R_i. \quad (3.22)$$

Der Innenwiderstand einer Spannungsquelle soll möglichst klein, im Idealfall Null sein, um die Konstanz der Klemmenspannung bei unterschiedlichen Belastungen zu gewährleisten!

Diskutiert man die Beziehung $U = U_q - I_L R_i$, so erkennt man, daß für den Strom $I_L = 0$ die Klemmenspannung U gleich der Quellenspannung U_q , gleichbedeutend mit der Leerlaufspannung U_L , den größten Wert annimmt. Bei Kurzschluß hingegen wird der Kurzschlußstrom I_K nur durch den inneren Widerstand R_i der Quelle begrenzt. Dieses Quellenverhalten kann in einem Spannungs-Stromdiagramm dargestellt werden (Abbildung ??):

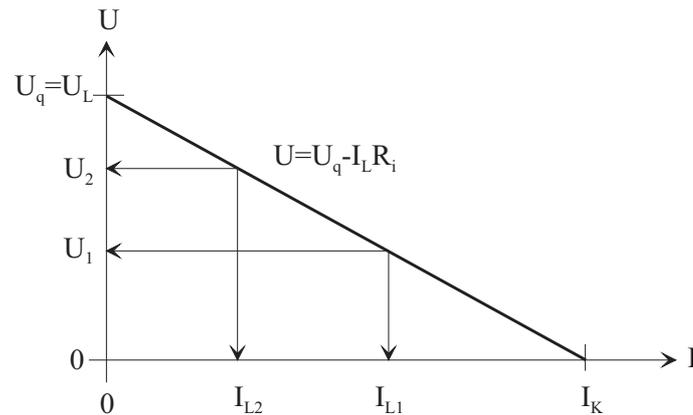


Abbildung 3.11: Belastungskennlinie einer realen Spannungsquelle bei allgemeiner Belastung.

Durch zwei Belastungen mit unterschiedlichen Widerständen R_{L1} und R_{L2} können die Klemmenspannungen U_{L1} und U_{L2} mit den Strömen I_{L1} und I_{L2} gemessen werden. Daraus kann man den Innenwiderstand der Spannungsquelle durch

$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_{L1} - I_{L2}} \quad (3.23)$$

ermitteln.

Die belastete Stromquelle

Bei der Spannungsquelle war gefordert, daß an deren Klemmen eine von der Belastung unabhängige, konstante Spannung vorherrscht. In ähnlicher Weise kann man auch fordern, daß eine Quelle einen konstanten Strom liefern soll. Ein aktiver Zweipol, der einen gleichbleibenden Strom in ein Netzwerk einspeist, nennt man **Stromquelle**. Auch in diesem Fall wird eine, von der Belastung beeinflusste Verkleinerung des Stromes aus der Stromquelle feststellbar sein. Das Verhalten kann mit Hilfe des in Abbildung ?? dargestellten Ersatzschaltbildes beschrieben werden:

Die Stromquelle liefert einen Quellenstrom I_q . Parallel zu dieser wird ein innerer Leitwert $G_i = \frac{1}{R_i}$ geschaltet. Entsprechend der Größe des Lastwiderstandes R_L bzw. dessen Leitwertes G_L wird nun eine Spannung U an den Klemmen vorherrschen, da ja

$$U = I_L R_L = I_L \frac{1}{G_L} \quad (3.24)$$

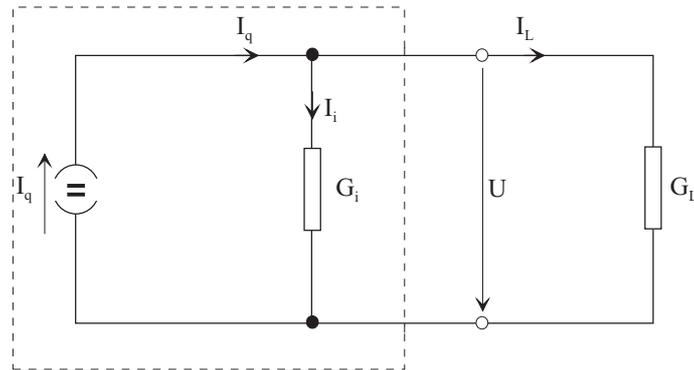


Abbildung 3.12: Elektrische Verhältnisse an einer realen Stromquelle bei allgemeiner Belastung.

gilt. Diese Spannung bestimmt auch den über den inneren Leitwert G_i fließenden Strom I_i :

$$I_i = U G_i. \quad (3.25)$$

Um diesen Wert I_i ist nun der Strom I_L an den Klemmen geringer als der Quellenstrom I_q , da ja am Knoten im Inneren der Quelle die Knotenregel gilt:

$$I_q = I_i + I_L = (G_i + G_L)U. \quad (3.26)$$

Mit der Beziehung für die Klemmenspannung aus Gleichung ??

$$U = \frac{I_q}{G_i + G_L} \quad (3.27)$$

errechnet sich der Strom an den Klemmen zu

$$I_L = G_L U = \frac{G_L}{G_i + G_L} I_q = I_q - G_i U. \quad (3.28)$$

Je höher der Innenwiderstand R_i bzw. je niedriger dessen Leitwert G_i einer Stromquelle ist, umso geringer ist die Abhängigkeit des Klemmenstromes von der Belastung. Bei einer idealen Stromquelle ist der innere Widerstand unendlich groß. Dies wird im Schaltsymbol der Stromquelle durch die Unterbrechung des Kreises dargestellt.

Das allgemeine Verhalten einer Stromquelle bei unterschiedlichen Belastungen läßt sich wieder durch ein Kennline, in diesem Fall durch die Strom- Spannungskennlinie darstellen (Abbildung ??).

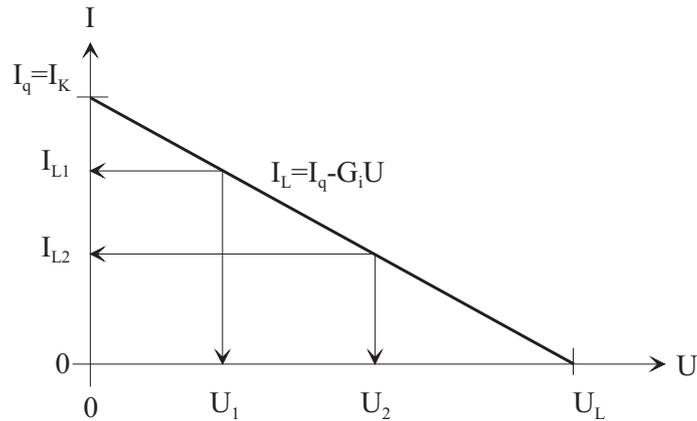


Abbildung 3.13: Belastungskennlinie einer realen Stromquelle bei allgemeiner Belastung.

Auch in diesem Fall kann durch zwei unterschiedlichen Belastungen der Innenwiderstand, im jetzigen Falle der innere Leitwert G_i durch

$$G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{I_{L1} - I_{L2}}{U_2 - U_1} \quad (3.29)$$

ermittelt werden.

3.2.3 Leistungsanpassung

In den vorherigen Abschnitten wurde dargestellt, daß reale Quellen unterschiedlichen Belastungen ausgesetzt werden können. Es ist nun sinnvoll, für eine gegebene Quelle, das heißt, mit vorgegebener Quellenspannung U_q und gegebenem inneren Widerstand R_i eine optimale Belastung zu finden. Das Ziel dabei ist, daß die Quelle dem Verbraucher (der Last) bei möglichst geringen Verlusten eine maximale Leistung abgeben kann. Verluste werden dabei sowohl in der Quelle, bedingt durch R_i und in den Zuleitungen entstehen. Bei der Herleitung des optimalen Belastungspunktes müssen diese Widerstände unbedingt mitberücksichtigt werden.

In Abbildung ?? sind die Zählpfeile bei einem allgemeinen Verbraucherwiderstand R_v dargestellt. Die von der Quelle gelieferte Leistung wird darin mit P_q bezeichnet. Sie errechnet sich zu :

$$P_q = \frac{U_q^2}{R_i + R_v}. \quad (3.30)$$

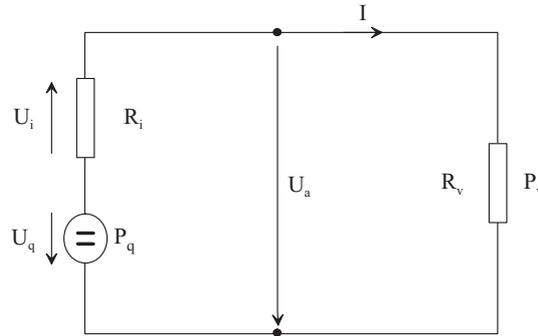


Abbildung 3.14: Reale Spannungsquelle mit Verbraucher.

Der durch alle Widerstände begrenzte Strom I entspricht der Beziehung:

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_v}. \quad (3.31)$$

Daraus folgt die Leistung P_v am Verbraucher:

$$P_v = I^2 R_v = \frac{U_q^2}{(R_i + R_v)^2} R_v. \quad (3.32)$$

Im Verbraucherwiderstand R_v ist auch der Widerstandsanteil der Zuleitungen mitberücksichtigt. Die Leistung am Verbraucher ($P_v = f(R_v)$) ist somit in zweiter Ordnung vom Lastwiderstand R_v abhängig.

Für $R_v = 0$, dem Kurzschlußfall ist die Verlustleistung $P_v = 0$. Ebenso ist die Leistung im Leerlauf, das heißt, bei $R_v = \infty$ gleich Null. Zwischen zwei Nullstellen einer Funktion muß immer ein Extremalwert bestehen. Aus der Differentiation der Verlustleistung P_v (Gleichung ??) nach dem Verlustwiderstand R_v und anschließendem Nullsetzen erhält man den optimalen Wert für R_v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_v}{\partial R_v} &= U_q^2 \left[\frac{1}{(R_i + R_v)^2} + \frac{-2R_v}{(R_i + R_v)^3} \right] \\ &= U_q^2 \frac{R_i + R_v - 2R_v}{(R_i + R_v)^3} = U_q^2 \frac{R_i - R_v}{(R_i + R_v)^3} = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Somit ergibt sich der optimale Belastungswiderstand der Quelle zu

$$R_i = R_v. \quad (3.34)$$

Dieser Belastungszustand wird als Leistungsanpassung bezeichnet. **Bei Widerstandsgleichheit zwischen Quellen-Innenwiderstand und Lastwiderstand, d.h. $R_i =$**

R_v , läßt sich an einem Verbraucher die maximale Leistungsausbeute erzielen!
 Mit diesen Widerstandswerten errechnet sich die maximale Leistung an R_v zu:

$$P_{vmax} = \frac{U_q^2}{4R_i} = \frac{U_q^2}{4R_v}. \quad (3.35)$$

Für diese Leistung am Verbraucher muß die Quellenleistung

$$P_q = \frac{U_q^2}{2R_i} = \frac{U_q^2}{2R_v} \quad (3.36)$$

betragen. Definiert man noch den sogenannten **Wirkungsgrad** η als das Verhältnis der Leistung am Verbraucher zur Leistung der Quelle

$$\eta = \frac{P_v}{P_q} = \frac{R_v}{R_i + R_v}, \quad (3.37)$$

so erhält man einen maximal möglichen Wirkungsgrad von

$$\eta_{max} = \frac{P_{vmax}}{P_q} = 0,5. \quad (3.38)$$

Der Verlauf des Wirkungsgrades, abhängig vom Verhältnis der Widerstände $\frac{R_v}{R_i}$ ist in Abbildung ?? dargestellt.

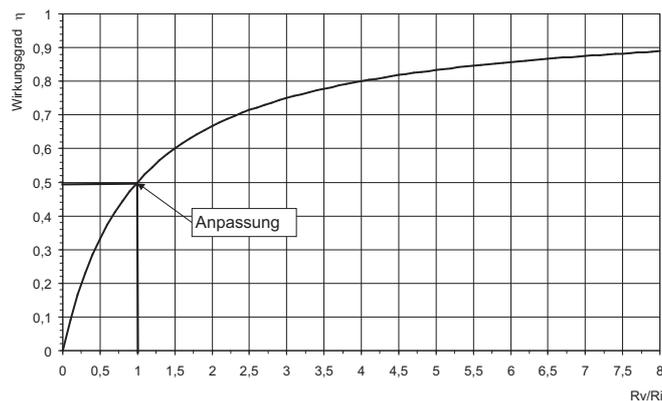


Abbildung 3.15: Abhängigkeit des Wirkungsgrades η vom Widerstandsverhältnis R_v zu R_i .

4 Analyse linearer Gleichstromnetzwerke

Betrachtet man die Strom/Spannungsbeziehungen energiespeichernder Netzwerkelemente, also von Kondensatoren und Spulen, so erscheinen darin *Zeitableitungen* der Spannungen bzw. der Ströme. Eine Analyse des Netzwerkes führt daher immer zu *Integro-differentialgleichungen*. Für das Verstehen der grundsätzlichen Methoden zur Behandlung von Netzwerken kann dies vermieden werden, indem man zunächst nur Netzwerke mit Quellen und ohmschen Widerständen, das heißt *resistive Netzwerke* betrachtet. Beschränkt man sich weiters auch auf Quellen mit Gleichspannungen und Gleichströmen, so erhält man letztendlich reelle algebraische Gleichungssysteme, die dann noch mit geeigneten Methoden zu lösen sind. In diesem Fall werden alle im Netzwerk vorkommenden Ströme und Spannungen, die ja *zeitlich konstant* sind, durch Großbuchstaben dargestellt (U_{R_1}, I, \dots).

4.1 Äquivalenz von Quellen

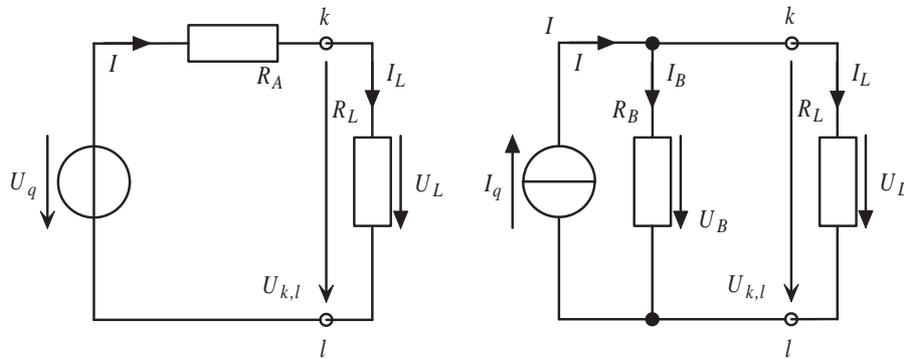


Abbildung 4.1: Äquivalenz von realen Quellen.

$$\begin{aligned}
 U_{k,l} &= U_q \frac{R_L}{R_A + R_L} & I_L &= I_q \frac{R_B}{R_B + R_L} \\
 I_L &= \frac{U_{k,l}}{R_L} = \frac{U_q}{R_A + R_L} & U_{k,l} &= R_L I_L = R_B I_q \frac{R_L}{R_B + R_L}
 \end{aligned}$$

Äquivalenz, wenn $R_A = R_B = R_i$
 und $U_q = R_i I_q$

$$\begin{aligned}
 I_L &= I_q \frac{R_i}{R_i + R_L} & U_{k,l} &= U_q \frac{R_L}{R_i + R_L}
 \end{aligned}$$

Eine Spannungsquelle U_q mit einem Innenwiderstand R_i in Serie ist äquivalent zu einer Stromquelle I_q und einem parallelen Innenwiderstand R_i , wenn bei Verwendung des Verbraucherzählpfeilsystems (VZS) folgender Zusammenhang gilt.

$$U_q = R_i I_q \tag{4.1}$$

4.2 Zusammenschaltung von Quellen

Treten mehrere Quellen in einem Netzwerk auf, so können diese zusammengefaßt werden. Liegen mehrere Spannungsquellen in Serie, so werden die Teilspannungen unter

Berücksichtigung der Zählpfeile addiert (Abb. ??(a)). Liegen mehrere Stromquellen parallel, so könne diese, wieder unter Berücksichtigung der Zählpfeile, zu einer Stromquelle zusammengefaßt werden (Abb. ??(b)).

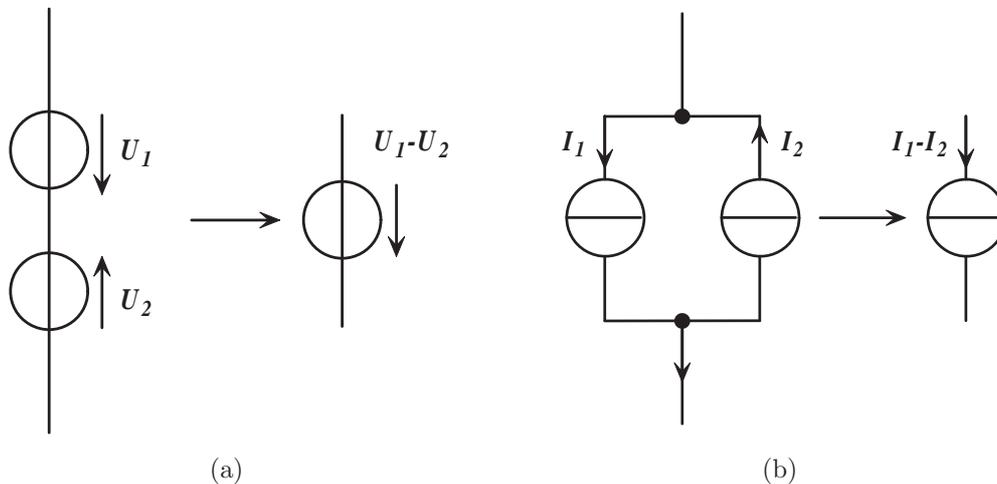


Abbildung 4.2: (a) Serienschaltung (b) Parallelschaltung

4.2.1 Quellenvervielfachung

Spannungsquellen können nur dann *parallel* geschaltet werden, wenn sie dieselbe Quellenspannung besitzen (Abb. ??(a)). Stromquellen können nur dann in *Serie* geschaltet werden, wenn sie dieselbe Stromstärke besitzen (Abb. ??(b)).

4.3 Ersatzquellenverfahren

Sind in einem Netzwerk mehrere Quellen und Widerstände vorhanden, so können diese bezüglich zweier Knoten (k, l) im Netzwerk durch

- eine Spannungsquelle U_{qA} mit einem seriellen Innenwiderstand R_A (*Theveninquelle*)
- eine Stromquelle I_{qA} mit einem parallelen Innenwiderstand R_A (*Nortonquelle*)

ersetzt werden (Abb. ??). Dabei ermittelt man die Quellenspannung U_{qA} der Erstspannungsquelle als *Leerlaufspannung* bezüglich der Klemmen (k, l) , den Quellenstrom I_{qA} der Ersatzstromquelle als den *negativen Kurzschlußstrom* über die Klemmen (k, l) und den Innenwiderstand der Quelle als Gesamtwiderstand der zu ersetzenden Schaltung, wobei alle Spannungsquellen durch *Kurzschlüsse*, alle Stromquellen durch *Leerläufe* ersetzt

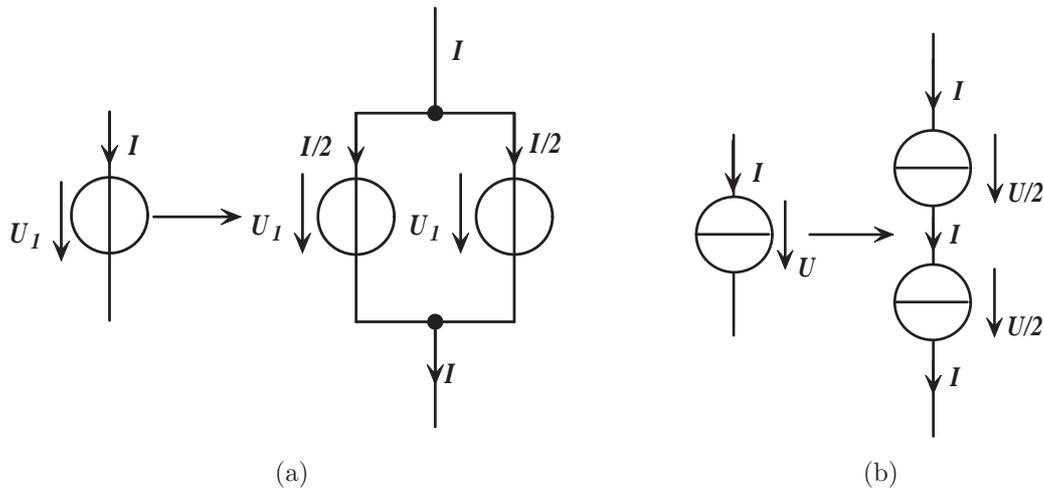


Abbildung 4.3: Quellenvervielfachung (a) Spannungsquellen (b) Stromquellen

werden. Zwischen diesen Größen gilt natürlich wieder der Zusammenhang.

$$U_{qA} = R_i I_{qA} \quad (4.2)$$

4.4 Überlagerungsprinzip, Superpositionsprinzip

Sind in einem *linearen* Netzwerk mehrere Quellen (=Ursachen) vorhanden, die an irgendeiner Stelle des Netzwerkes einen Strom oder eine Spannung (=Gesamtwirkung) erzeugen, so läßt sich diese Gesamtwirkung auch als Summe der Einzelwirkungen, die jede Quelle für sich erzeugt, ermitteln (Abb. ??). In diesem Falle werden alle anderen Quellen durch ihre Innenwiderstände (Kurzschluß bei Spannungsquellen, Leerlauf bei Stromquellen) ersetzt.

Allgemein läßt sich z.B. die Gesamtspannung U_{R_j} an einem Widerstand R_j folgendermaßen als Summe der Wirkungen aller Quellen (n Spannungsquellen U_q , m Stromquellen I_q) darstellen

$$U_{R_j} = \sum_{k=1}^n c_k U_{qk} + \sum_{l=1}^m c_l I_{ql}, \quad (4.3)$$

wobei c_k und c_l entsprechende konstante Koeffizienten darstellen.

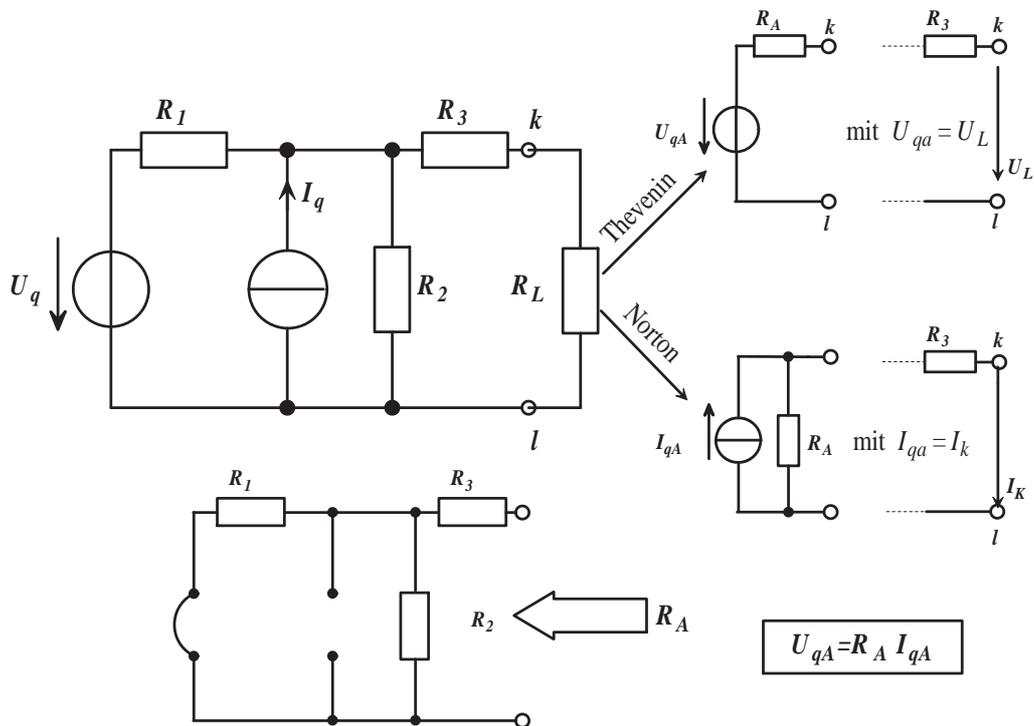


Abbildung 4.4: Thevenin- und Nortonquelle.

4.5 Das elektrische Netzwerk als Graph

4.5.1 Topologische Grundbegriffe

Die Lehre der Anordnung geometrischer Gebilde im Raum wird *Topologie* genannt. Die im Gleichstromfalle aus den Zweipolen *Widerstand*, *reale Quelle* und *ideale Quelle* zusammengesetzten elektrischen Netzwerke können meist zweidimensional dargestellt werden (*planare* Netzwerke).

Abbildung ?? zeigt ein Gleichspannungsnetzwerk mit 4 Quellen und 7 ohmschen Widerständen. Man erkennt in diesem Netzwerk $k=5$ Knoten und $z=7$ Zweige.

Zeichnet man nun nur diese Knoten und Zweige ohne elektrische Bauelemente, so erhält man den *Graphen* des Netzwerkes (Abb. ?? (a)). Ordnet man den Zweigen auch noch eine Richtung zu, so erhält man den *gerichteten Graphen* des Netzwerkes mit $k=5$ Knoten und $z=7$ Zweigen (Abb. ?? (b)).

In einem *Knoten* beginnen oder enden Zweige. (Ausnahme: *isolierter Knoten*)

Der *Grad* eines Knotens entspricht der Anzahl der Zweige, die in ihm beginnen oder enden. Der Grad des Knotens n_1 in Abb. ?? (a) ist gleich 3.

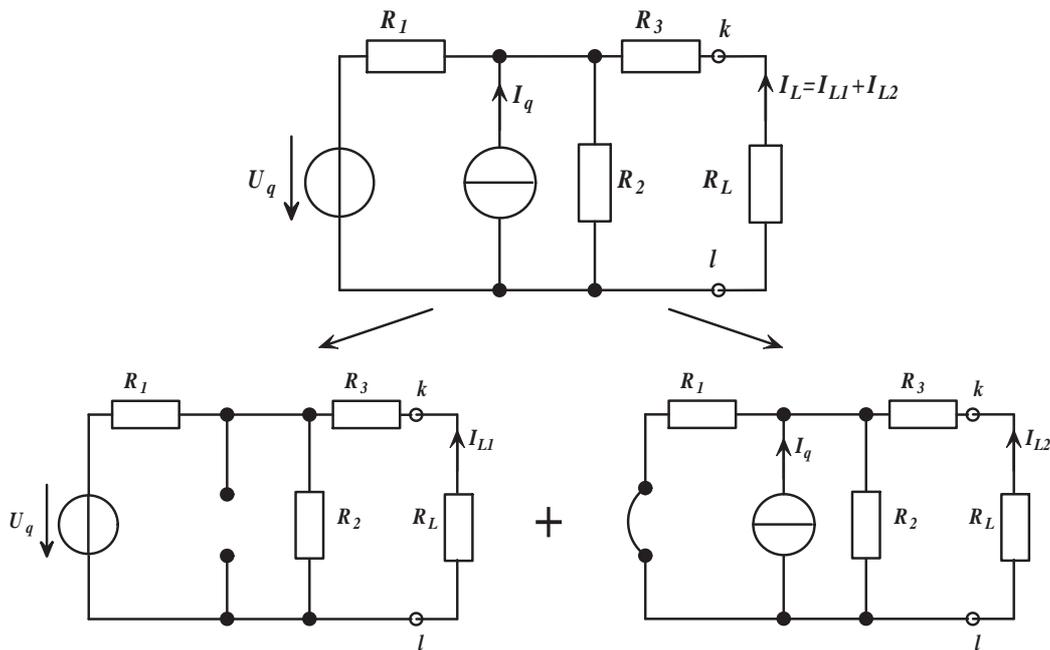


Abbildung 4.5: Überlagerungsprinzip.

Ein *Pfad* ist ein Teilgraph.

Eine *Masche* m (Maschen m_1 in Abb. ?? (a)) ist ein Pfad, der geschlossen ist (Anfangs- und Endknoten sind identisch).

Ein *vollständiger Baum* t des Graphen (Abb. ?? (b)) ist zusammenhängend, verbindet alle Knoten und bildet keine Maschen. Es gibt mehr als einen vollständigen Baum. Die Zweige des Baumes nennt man *Baumzweige* (b_1, b_2, b_3 und b_4), die verbleibenden Zweige nennt man *Co-Baumzweige* oder *Maschenzweige* (b_5, b_6 und b_7). Man erhält immer $k - 1$ Baumzweige und $z - (k - 1)$ Co-Baumzweige.

Eine *Schnittmenge* c (Abb. ??) teilt den Graphen in zwei, nicht zusammenhängende Teilgraphen, indem eine minimale Anzahl an Zweigen geschnitten wird. Jeder Schnittmenge wird eine Richtung zugeordnet.

4.5.2 Fundamentales Schnittmengensystem und fundamentales Maschensystem

Fundamentale Schnittsysteme und fundamentale Maschensysteme lassen sich am einfachsten mit Hilfe eines *vollständigen Baumes* und des dazugehörigen *Co-Baumes* bilden.

Eine *fundamentale Schnittmenge* schneidet genau einen *Baumzweig* und sonst lauter

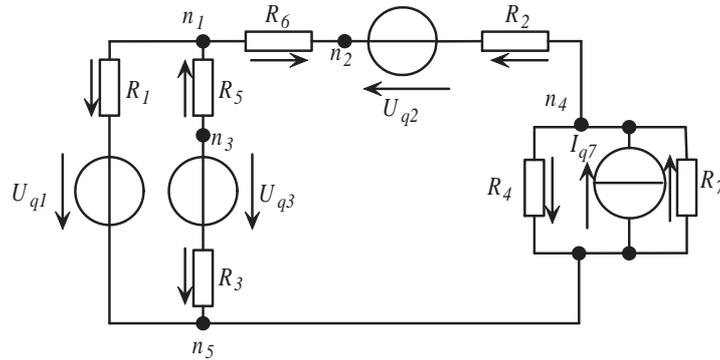


Abbildung 4.6: Gleichspannungsnetzwerk.

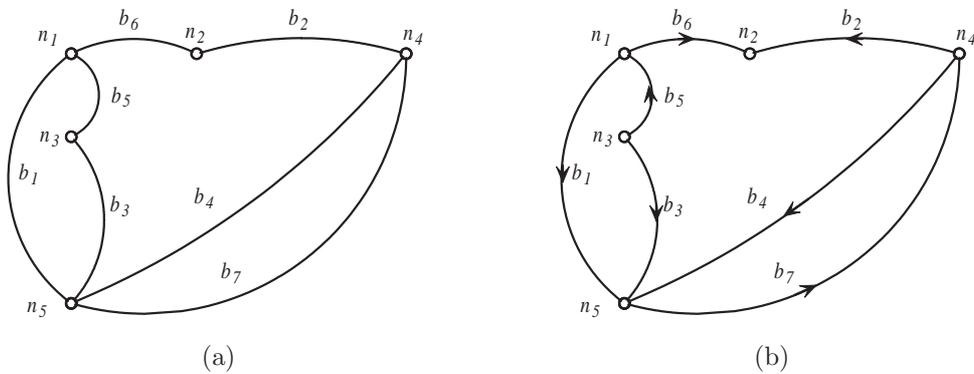


Abbildung 4.7: (a) Graph (b) gerichteter Graph.

Co-Baumzweige (Abb. ?? (a)). Mit diesem Baumzweig dürfen keine weiteren Schnittmengen gebildet werden. Das System dieser $(k-1)$ Schnittmengen ($(k-1)$ ist die Anzahl der Baumzweige) ist ein *fundamentales Schnittmengensystem*.

Eine fundamentale Masche besitzt genau einen *Co-Baumzweig* und sonst lauter Baumzweige (Abb. ?? (b)). Mit diesem Co-Baumzweig dürfen keine weiteren Maschen gebildet werden. Das System dieser $z - (k-1)$ Maschen ($z - (k-1)$ ist die Anzahl der Co-Baumzweige) ist ein *fundamentales Maschensystem*.

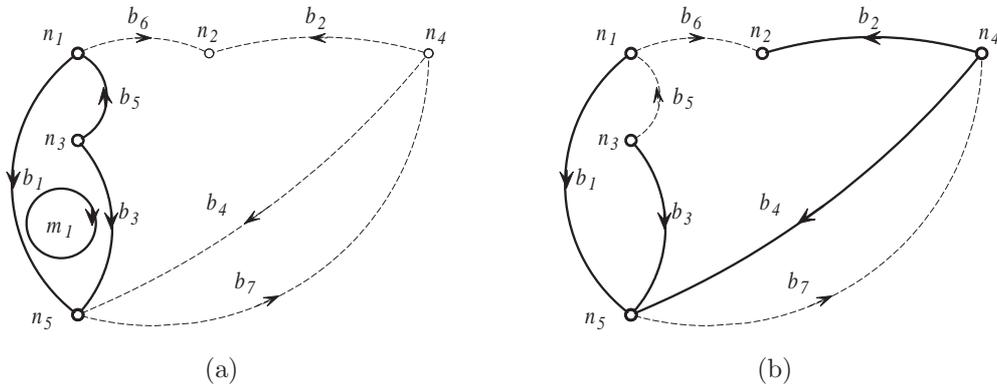


Abbildung 4.8: (a) Masche m (b) vollständiger Baum t .

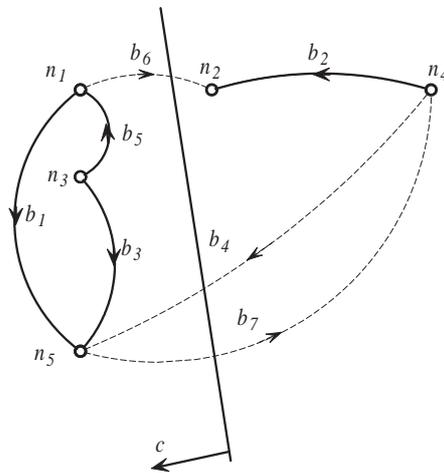


Abbildung 4.9: Schnittmenge c .

4.6 Die Zweigstromanalyse

In einem Netzwerk mit z Zweigen (und k Knoten) gibt es in jedem Zweig j zwei unbekannte elektrische Größen, die Zweigspannung U_{zj} und den Zweigstrom I_{zj} . Im gesamten Netzwerk gibt es daher $2 \times z$ unbekannte Größen, zu deren Lösung man $2 \times z$ linear unabhängige Gleichungen benötigt. Abbildung ?? (a) zeigt ein Netzwerk mit vier Knoten ($k=4$) und sechs Zweigen ($z=6$), Abbildung ?? (b) zeigt den gerichteten Graphen dieses Netzwerkes. Im Zweig z_1 befindet sich eine Spannungsquelle U_{q1} , im Zweig z_6 eine Stromquelle I_{q6} .

Zunächst wird der Knoten n_4 als Bezugsknoten gewählt (beliebig). Danach werden in den restlichen $k - 1$ Knoten die Kirchhoff'schen Knotengleichungen formuliert.

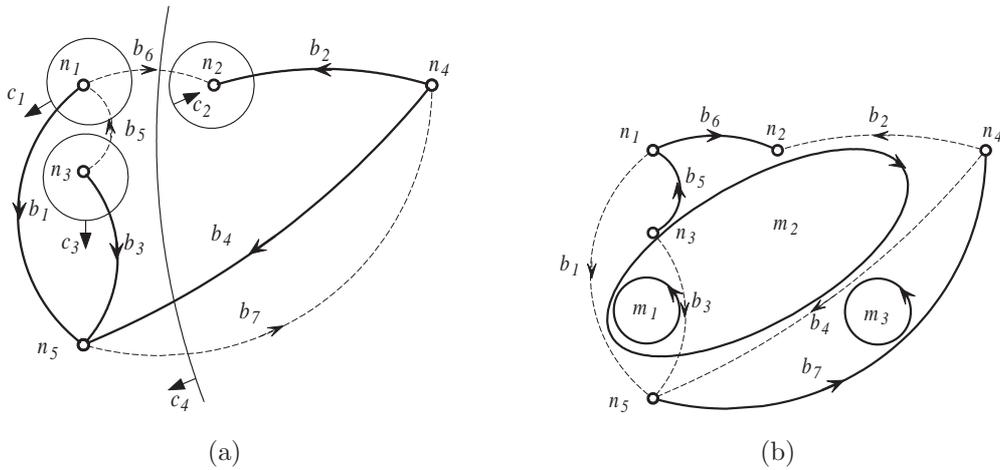


Abbildung 4.10: (a) fundamentale Schnittmengen (b) fundamentale Maschen.

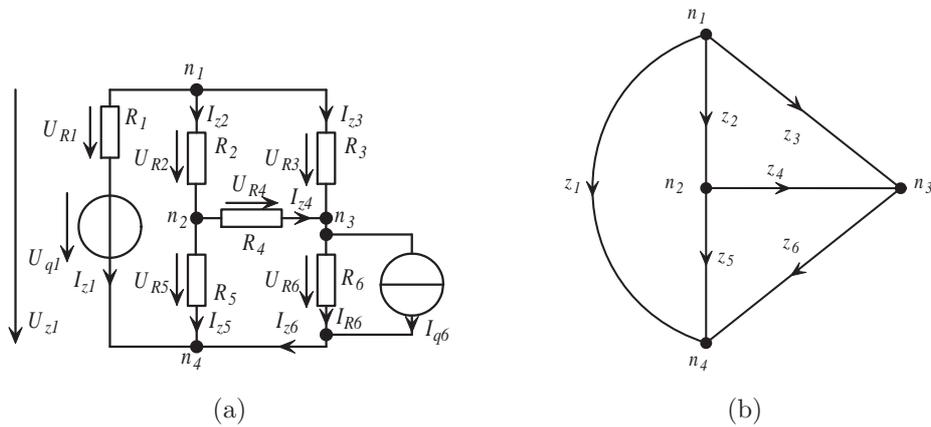


Abbildung 4.11: (a) Netzwerk (b) gerichteter Graph.

$$\begin{aligned}
 n_1 &: I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} = 0 \\
 n_2 &: -I_{z2} + I_{z4} + I_{z5} = 0 \\
 n_3 &: -I_{z3} - I_{z4} + I_{z6} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Dann stellt man in den $z - (k - 1)$ unabhängigen Maschen die Kirchhoff'schen Maschengleichungen auf. Um zu linear unabhängigen Maschen zu gelangen, ermittelt man zunächst einen vollständigen Baum. Danach verwendet man die fundamentalen Maschen (enthalten einen exklusiven Co-Baumzweig, sonst lauter Baumzweige), um zu den Maschengleichungen zu kommen (Abb. ??).

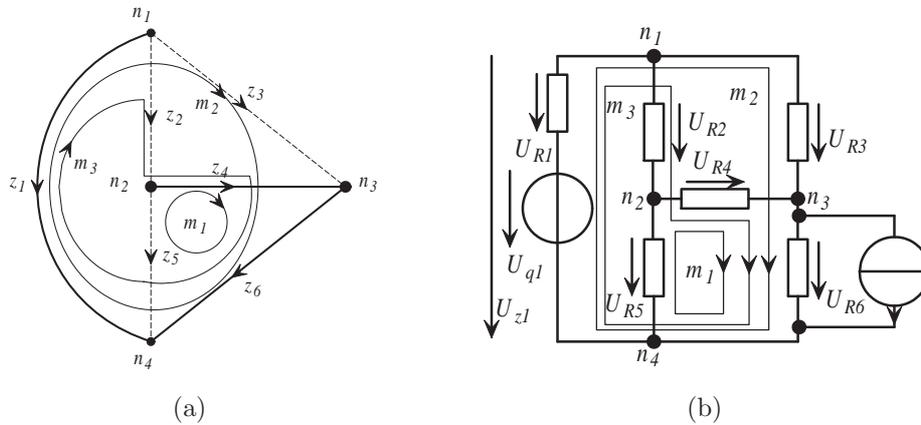


Abbildung 4.12: (a) Baum und fundamentale Maschen (b) Netzwerk mit Maschen.

$$\begin{aligned}
 m_1 &: U_{R4} - U_{R5} + U_{R6} = 0 \\
 m_2 &: -U_{R1} + U_{R3} + U_{R6} = U_{q1} \\
 m_3 &: -U_{R1} + U_{R2} + U_{R4} + U_{R6} = U_{q1}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

In diesen Gleichungen wurde die Quellspannung U_{q1} bereits auf die rechte Seite gebracht. Verwendet man noch die Strom/Spannungsbeziehungen an den passiven Elementen

$$U_{Rj} = R_j I_{Rj} \quad j = 1, \dots, 6 \tag{4.6}$$

in den Maschengleichungen, so erhält man nachfolgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 m_1 &: R_4 I_{R4} - R_5 I_{R5} + R_6 I_{R6} = 0 \\
 m_2 &: -R_1 I_{R1} + R_3 I_{R3} + R_6 I_{R6} = U_{q1} \\
 m_3 &: -R_1 I_{R1} + R_2 I_{R2} + R_4 I_{R4} + R_6 I_{R6} = U_{q1}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Um auch in den Gleichungen (??) die Zweigströme I_{zj} als unbekannte Größen zu erhalten, verwendet man die Knotenregel im Zweig z_6

$$I_{z6} = I_{q6} + I_{R6}, \tag{4.8}$$

ersetzt in den restlichen Zweigen

$$I_{zj} = I_{Rj} \quad j = 1, \dots, 5 \tag{4.9}$$

und erhält folgende Maschengleichungen:

$$\begin{aligned}
 m_1 &: R_4 I_{z4} - R_5 I_{z5} + R_6 I_{z6} = R_6 I_{q6} \\
 m_2 &: -R_1 I_{z1} + R_3 I_{z3} + R_6 I_{z6} = U_{q1} + R_6 I_{q6} \\
 m_3 &: -R_1 I_{z1} + R_2 I_{z2} + R_4 I_{z4} + R_6 I_{z6} = U_{q1} + R_6 I_{q6}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Schreibt man (??) und (3.18) als Gleichungssystem, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur eindeutigen Berechnung der gesuchten Zweigströme $\mathbf{I}_z = \{I_{z1}, \dots, I_{z6}\}^T$.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & R_6 \\
 -R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 \\
 -R_1 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 I_{z1} \\
 I_{z2} \\
 I_{z3} \\
 I_{z4} \\
 I_{z5} \\
 I_{z6}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 R_6 I_{q6} \\
 U_{q1} + R_6 I_{q6} \\
 U_{q1} + R_6 I_{q6} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

4.7 Das Knotenspannungsverfahren

Die Knotenspannungsanalyse reduziert das zu lösende Gleichungssystem von z Gleichungen auf $k - 1$ Gleichungen. Ausgangspunkt ist das nachfolgend dargestellte Netzwerk.

Das Netzwerk wird von drei realen Spannungsquellen $((U_{q1}, R_1), (U_{q4}, R_4), (U_{q6}, R_6))$ und einer realen Stromquelle (I_{q8}, R_8) versorgt. Im ersten Schritt werden alle Zweigströme $(I_{z1}, I_{z2}, \dots, I_{z9})$ festgelegt.

Im Anschluß werden alle Spannungsquellen (nur für die realen möglich) in Stromquellen umgewandelt. Wie bei der Quellenäquivalenz gezeigt, wird die *Richtung* der neuen Quelle geändert und es gilt folgender Zusammenhang: $U_{qi} = R_i I_{qi}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Quelle 1: } I_{q1} &= U_{q1}/R_1 & \text{Quelle 4: } I_{q4} &= U_{q4}/R_4 \\
 \text{Quelle 6: } I_{q6} &= U_{q6}/R_6 & \text{Quelle 8: } I_{q8} &= I_{q8}
 \end{aligned}$$

Danach wird ein Knoten des Netzwerkes zum Bezugsknoten erklärt (Knoten 5 in Abbildung ??, oben). Von jedem verbleibenden Knoten zu diesem Bezugsknoten wird nun eine sogenannte *Knotenspannung* definiert $(U_{n1} - U_{n4})$. Nun stellt man in jedem dieser $k - 1$ Knoten die Kirchhoffsche Knotengleichung auf.

$$\begin{aligned}
 -I_{q1} - I_1 + I_{z2} + I_{z3} &= 0 \\
 -I_{z3} - I_{q4} - I_4 + I_{z5} &= 0 \\
 -I_{z2} + I_{q6} + I_6 + I_{z7} &= 0 \\
 -I_{q6} - I_6 - I_{z7} - I_{q8} - I_8 + I_{z9} &= 0
 \end{aligned}$$

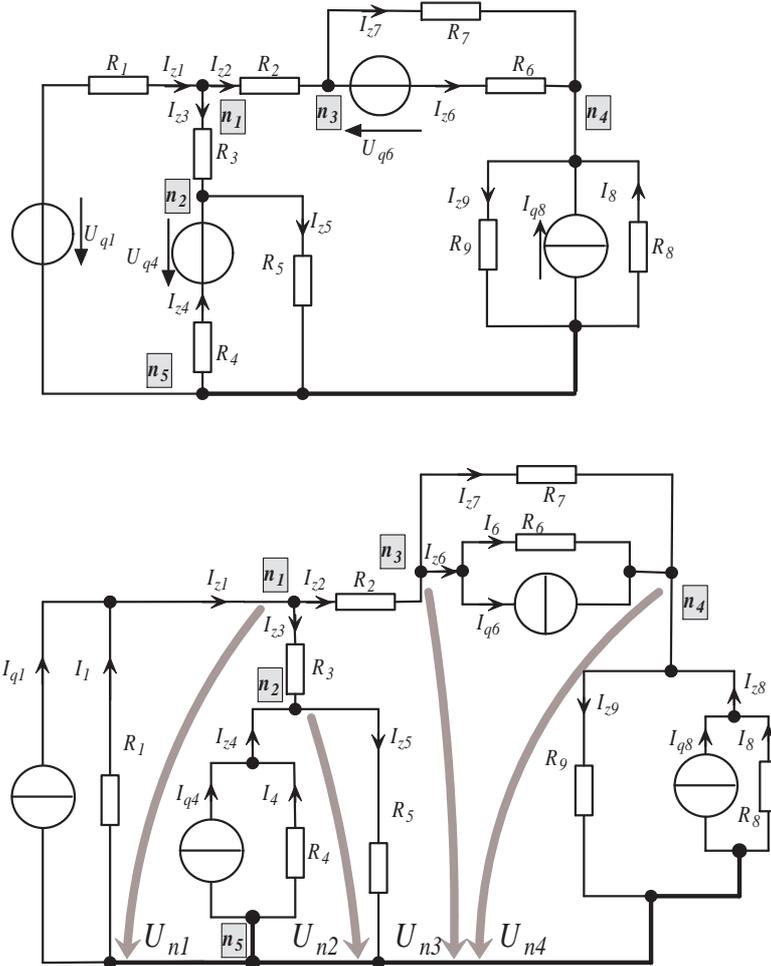


Abbildung 4.13: Ausgangsschaltung und Schaltbild nach Umwandlung der realen Spannungsquellen.

Die Ströme, die über die Widerstände fließen, werden durch die Spannungsabfälle an den Widerständen ausgedrückt, die bekannten Quellströme auf die rechte Seite gebracht.

$$\begin{aligned}
 -\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_{z2}}{R_2} + \frac{U_{z3}}{R_3} &= I_{q1} \\
 -\frac{U_{z3}}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} + \frac{U_{z5}}{R_5} &= I_{q4} \\
 -\frac{U_{z2}}{R_2} + \frac{U_6}{R_6} + \frac{U_{z7}}{R_7} &= -I_{q6} \\
 -\frac{U_6}{R_6} - \frac{U_{z7}}{R_7} - \frac{U_{z8}}{R_8} + \frac{U_{z9}}{R_9} &= I_{q6} + I_{q8}
 \end{aligned}$$

Jetzt werden die einzelnen Spannungsabfälle an den Widerständen durch die Knotenspannungen ersetzt.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= -U_{n1} \\
 U_{z2} &= U_{n1} - U_{n3} \\
 U_{z3} &= U_{n1} - U_{n2} \\
 U_4 &= -U_{n2} \\
 U_{z5} &= U_{n2} \\
 U_6 &= U_{n3} - U_{n4} \\
 U_{z7} &= U_{n3} - U_{n4} \\
 U_{z8} &= -U_{n4} \\
 U_{z9} &= U_{n4}
 \end{aligned}$$

Die Knotenspannungen werden danach in die Knotengleichungen eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 \frac{U_{n1}}{R_1} + \frac{U_{n1} - U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} &= I_{q1} \\
 -\frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_3} + \frac{U_{n2}}{R_4} + \frac{U_{n2}}{R_5} &= I_{q4} \\
 -\frac{U_{n1} - U_{n3}}{R_2} + \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_6} + \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_7} &= -I_{q6} \\
 -\frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_6} - \frac{U_{n3} - U_{n4}}{R_7} + \frac{U_{n4}}{R_8} + \frac{U_{n4}}{R_9} &= I_{q6} + I_{q8}
 \end{aligned}$$

Faßt man die Koeffizienten bei den einzelnen Knotenspannungen zusammen, so erhält man folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned}
 U_{n1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - U_{n2} \frac{1}{R_3} - U_{n3} \frac{1}{R_2} &= I_{q1} \\
 -U_{n1} \frac{1}{R_3} + U_{n2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) &= I_{q4} \\
 -U_{n1} \frac{1}{R_2} + U_{n3} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) - U_{n4} \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) &= -I_{q6} \\
 -U_{n3} \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) + U_{n4} \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} \right) &= I_{q6} + I_{q8}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nun in eine Matrixform gebracht werden.

$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}) & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_3} & (\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}) & -(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}) \\ 0 & 0 & -(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}) & (\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ U_{n3} \\ U_{n4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{q1} \\ I_{q4} \\ -I_{q6} \\ I_{q6} + I_{q8} \end{Bmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix auf der rechten Seite wird als *Knotenadmittanzmatrix* $[G_n]$ bezeichnet. In dem Fall, wenn keine idealen Spannungsquellen vorhanden sind oder gesteuerte Quellen noch nicht berücksichtigt wurden, können die Elemente dieser Matrix folgendermaßen berechnet werden.

- Die Matrix ist quadratisch und symmetrisch
- Elemente der Hauptdiagonale: positive Summe aller Leitwerte an dem Knoten, der dem Hauptdiagonalelement entspricht
- Elemente außerhalb der Hauptdiagonale: negative Koppelleitwerte zwischen zwei Knoten

Der Quellvektor auf der rechten Seite beinhaltet jene Stromquellen, die zum entsprechenden Knoten gehören, und zwar

- $+ I_q$, wenn der Quellenstrom zum betreffenden Knoten hinfließt
- $- I_q$, wenn der Quellenstrom vom betreffenden Knoten wegfließt

Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen wurde von z (= Anzahl der Zweige) auf $k - 1$ (= Anzahl der Knoten weniger eins) reduziert, da die *Knotenspannungen* die Maschengleichungen implizit erfüllen.

4.8 Maschenstromverfahren

Die Maschenstromanalyse reduziert das zu lösende Gleichungssystem von z Gleichungen auf $z - (k - 1)$ Gleichungen. Als Beispiel dient das in Abb. ?? dargestellte Netzwerk, indem die Stromquelle I_{q8} bereits in eine Spannungsquelle umgewandelt wurde. Die *Richtung* der neuen Quelle wurde geändert und für die Umrechnung wurde $U_{q8} = R_8 I_{q8}$ verwendet. Im nächsten Schritt werden alle Zweigströme ($I_{z1}, I_{z2}, \dots, I_{z9}$) festgelegt. Für die Quellen gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{Quelle 1: } & U_{q1} \quad \text{Quelle 4: } U_{q4} \\ \text{Quelle 6: } & U_{q6} \quad \text{Quelle 8: } U_{q8} = I_{q8} * R_8. \end{array}$$

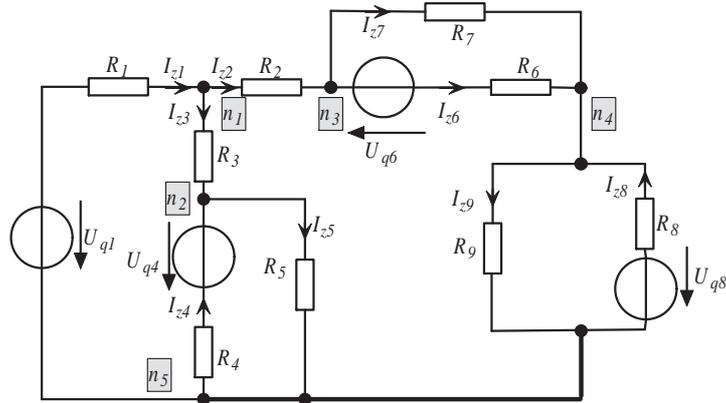


Abbildung 4.14: Netzwerk zum Maschenstromverfahren.

Danach müssen solche Maschen im Netzwerk definiert werden, dass die daraus resultierenden Maschengleichungen linear unabhängig werden. Dazu stellt man am besten den Graphen des Netzwerkes (Abb. ??) auf, bestimmt einen Baum und den zugehörigen Co-Baum und legt die Maschen derart fest, daß jede von ihnen *einen Co-Baumzweig* exklusiv und sonst lauter Baumzweige beinhaltet. Jeder Masche wird danach ein Maschenstrom zugeordnet (I_{m1} bis I_{m5}).

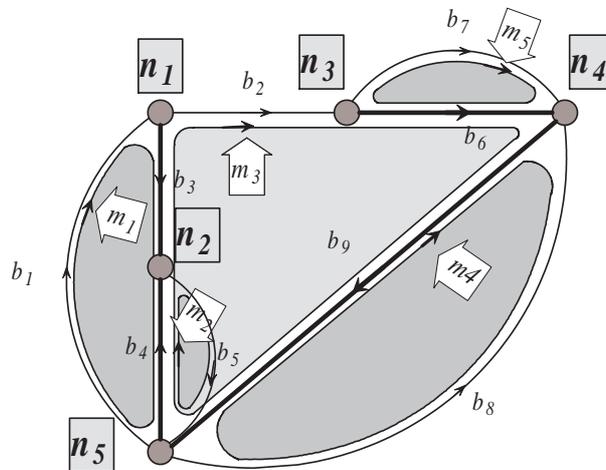


Abbildung 4.15: Vollständiger Graph, Baum t und Maschen $m_1 - m_5$.

Zunächst können in allen Zweigen die Zweigströme I_{zj} durch die Ströme I_j , die über die Widerstände R_j fließen, ersetzt werden. Nun stellt man in jeder dieser $z - (k - 1)$ Maschen die Kirchhoff'sche Maschengleichung auf. Dabei sind die Spannungsabfälle an

den Widerständen bereits als Funktion der Ströme I_j ausgedrückt.

$$\begin{aligned}
 -U_{q1} + U_{q4} + R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 &= 0 \\
 -U_{q4} + R_4 I_4 + R_5 I_5 &= 0 \\
 -U_{q4} - U_{q6} + R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_6 I_6 + R_9 I_9 &= 0 \\
 U_{q8} - R_8 I_8 - R_9 I_9 &= 0 \\
 U_{q6} - R_6 I_6 + R_7 I_7 &= 0.
 \end{aligned}$$

Jetzt werden die einzelnen Ströme an den Widerständen durch die Maschenströme I_{m1} bis I_{m5} ersetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{m1} \\
 I_2 &= I_{m3} & I_6 &= I_{m3} - I_{m5} \\
 I_3 &= I_{m1} - I_{m3} & I_7 &= I_{m5} \\
 I_4 &= -I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} & I_8 &= -I_{m4} \\
 I_5 &= I_{m2} & I_9 &= I_{m3} - I_{m4}.
 \end{aligned}$$

Die Maschenströme werden danach in die Maschengleichungen eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 R_1 I_{m1} + R_3 (I_{m1} - I_{m3}) - R_4 (-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) &= U_{q1} - U_{q4} \\
 R_4 (-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) + R_5 I_{m2} &= U_{q4} \\
 R_2 I_{m3} - R_3 (I_{m1} - I_{m3}) + R_4 (-I_{m1} + I_{m2} + I_{m3}) + \\
 + R_6 (I_{m3} - I_{m5}) + R_9 (I_{m3} - I_{m4}) &= U_{q4} + U_{q6} \\
 -R_8 (-I_{m4}) - R_9 (I_{m3} - I_{m4}) &= -U_{q8} \\
 -R_6 (I_{m3} - I_{m5}) + R_7 I_{m5} &= -U_{q6}.
 \end{aligned}$$

Fasst man die Koeffizienten für die einzelnen Maschenströme zusammen, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 I_{m1} (R_1 + R_3 + R_4) - I_{m2} R_4 + I_{m3} (-R_3 - R_4) &= U_{q1} - U_{q4} \\
 -I_{m1} R_4 + I_{m2} (R_4 + R_5) + I_{m3} R_4 &= U_{q4} \\
 I_{m1} (-R_3 - R_4) + I_{m2} R_4 + I_{m3} (R_2 + R_3 + R_4 + R_6 + R_9) - \\
 -I_{m4} R_9 - I_{m5} R_6 &= U_{q4} + U_{q6} \\
 -I_{m3} R_9 + I_{m4} (R_8 + R_9) &= -U_{q8} \\
 -I_{m3} R_6 + I_{m5} (R_6 + R_7) &= -U_{q6}.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nun in eine Matrixform gebracht werden:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_4 & -(R_3 + R_4) & 0 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & R_4 & 0 & 0 \\ -(R_3 + R_4) & R_4 & R_2 + R_3 + R_4 + R_6 + R_9 & -R_9 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_9 & R_8 + R_9 & 0 \\ 0 & 0 & -R_6 & 0 & R_6 + R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \\ I_{m4} \\ I_{m5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q1} - U_{q4} \\ U_{q4} \\ U_{q4} + U_{q6} \\ -U_{q8} \\ -U_{q6} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Die Koeffizientenmatrix auf der linken Seite wird als *Maschenimpedanzmatrix* $[Z_m]$ bezeichnet. Sind keine idealen Spannungsquellen vorhanden, so können die Elemente dieser Matrix folgendermaßen berechnet werden:

- die Matrix ist quadratisch und symmetrisch
- Elemente der Hauptdiagonale: positive Summe aller Widerstände in der Masche, die dem Hauptdiagonalelement entspricht
- Elemente außerhalb der Hauptdiagonale: Koppelwiderstände zwischen zwei Maschen
 - positiv, wenn die Maschen in dieselbe Richtung zeigen
 - negativ, wenn die Maschen in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Der Quellvektor auf der rechten Seite beinhaltet jene Spannungsquellen, die zur entsprechenden Masche gehören, und zwar

- $+ U_q$, wenn die Quellspannung entgegengesetzt zur Maschenrichtung zeigt
- $- U_q$, wenn die Quellspannung in Maschenrichtung zeigt.

Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen wurde von z (= Anzahl der Zweige) auf $z - (k - 1)$ (=Anzahl der unabhängigen Maschen) reduziert, da die *Maschenströme* die Knotengleichungen implizit erfüllen.

5 Ungleichförmig bewegte Ladungen

5.1 Allgemeines

Elektrische Ladungen können beschleunigt und abgebremst werden. In einem späteren Kapitel wird erläutert, wie diese ungleichförmigen Bewegungen zustande kommen. Im allgemeinen werden in der Elektrotechnik zeitlich periodische Vorgänge auftreten. Zur mathematischen Beschreibung müssen hierzu einige Eigenschaften und Kenngrößen definiert und beschrieben werden. Das Zeitverhalten elektrischer Größen bei Ein- und Ausschaltvorgängen, den sogenannten **transienten Vorgängen**, wird hier nicht berücksichtigt. Alle Betrachtungen erfolgen hier für **stationäre Vorgänge**.

5.2 Periodische Wechselgrößen

Elektrische Größen, welche nach gleichbleibenden Zeitintervallen immer wieder in Größe und Richtung gleich sind, nennt man in der Zeit **periodisch**. In Abbildung ?? ist ein derartiger qualitativer Verlauf am Beispiel einer elektrischen Spannung dargestellt.

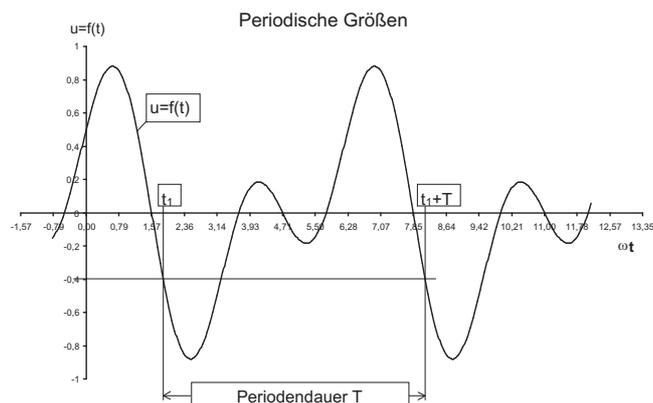


Abbildung 5.1: Zeitlicher Verlauf einer periodischen Spannung.

Der Abstand zwischen zwei Punkten gleichen Zustandes im Zeitdiagramm $u = f(t)$ nennt man Periode oder Periodendauer T . Für ein periodisches Verhalten einer Zeit-

funktion $f(t)$ muß immer

$$f(t) = f(t + nT) \quad (5.1)$$

gelten. n ist darin eine beliebige ganze Zahl größer als Null. Bei periodischen Funktionen unterscheidet man reine Wechselgrößen und Mischgrößen. Bei reinen Wechselgrößen ist je Periode T die Fläche zwischen Funktion und Zeitachse unter der Zeitachse immer gleich der Fläche zwischen Funktion und Zeitachse oberhalb der Zeitachse (z.B. die Funktion in Abbildung ??). Bei Mischgrößen ist der Wechselgröße immer ein Gleichanteil, positiv oder negativ, überlagert (Abbildung ??).

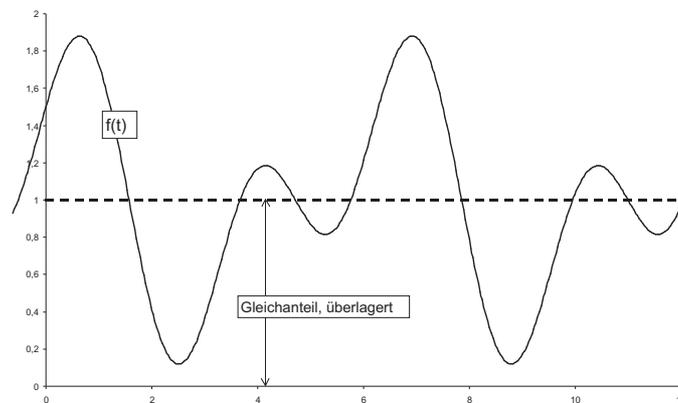


Abbildung 5.2: Periodische Zeitfunktion mit Gleichanteil, Mischgröße

5.3 Kennwerte sinusförmiger Größen

In der Praxis treten häufig reine sinusförmige Wechselgrößen auf. Diese können mathematisch sehr einfach beschrieben werden. Reine sinusförmige Größen bezeichnet man als **zeitharmonische Funktionen**. Man betrachte folgendes Zeitverhalten rein sinusförmiger Wechselgrößen.

Für die Funktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ gilt allgemein:

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \sin [(\omega t) + \varphi_1] \quad (5.2)$$

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \sin [(\omega t) + \varphi_2] \quad (5.3)$$

Die Sinusfunktionen wiederholen sich nach Ablauf eines Winkels von $360^\circ = 2\pi$. Daraus ergibt sich die Periodendauer T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.4)$$

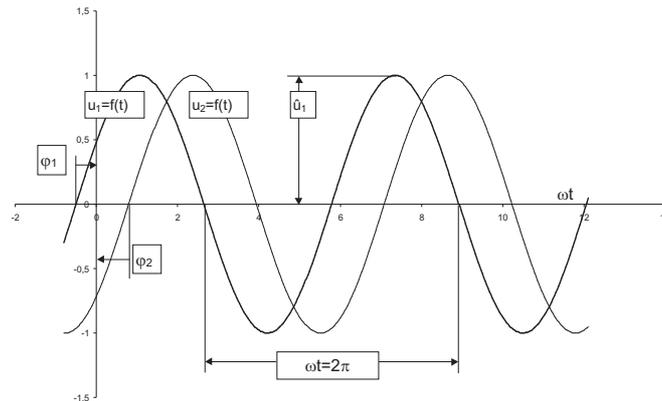


Abbildung 5.3: Reine sinusförmige Wechselgrößen.

ω wird darin als Kreisfrequenz bezeichnet. Der reziproke Wert der Periodendauer wird als Frequenz f bezeichnet.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \left[\frac{1}{s} = Hz \right] \quad \dots \quad \text{Hertz.} \quad (5.5)$$

Die Winkel φ_1 und φ_2 werden als Nullphasenwinkel bezeichnet. Der Nullphasenwinkel gibt die Verschiebung, das heißt, um wieviel Grad eine allgemeine Sinusfunktion zur Zeit $t = 0$ früher oder später gegenüber der reinen Sinusfunktion $f(t) = \sin(\omega t)$ durch Null geht, an.

In Abbildung ?? ist im Falle der Zeitfunktion $u_1(t)$ ist der Nullphasenwinkel positiv und entsprechend dazu der Nullphasenwinkel von $u_2(t)$ negativ. Man sagt, die Spannung $u_1(t)$ eilt der Spannung $u_2(t)$ vor. Aus der Differenz der beiden Nullphasenwinkel ergibt sich die **Phasenverschiebung** oder der **Phasenwinkel** zwischen den beiden Spannungen zu

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (5.6)$$

Eine weitere Kenngröße aus den Gleichungen ?? und ?? sind die mit einem Dächchen gekennzeichneten Maximalwerte der Funktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$.

Man bezeichnet diese Maximalwerte oder Amplituden \hat{u}_1 und \hat{u}_2 auch als **Scheitelwerte** der Zeitfunktionen.

Durch die Angabe von Scheitelwert, Frequenz und Nullphasenwinkel ist eine sinusförmige Größe eindeutig beschrieben!

Zur Beschreibung der Wirkungen periodischer Wechselgrößen ist es zweckmäßiger, mit Begriffen zu arbeiten, welche von der Kurvenform unabhängig sind. Zu deren Festlegung geht man von den Wirkungen des elektrischen Stromes aus.

5.3.1 Der lineare Mittelwert

Wir wissen, daß die elektrische Stromstärke I aus der Änderung der Ladungen pro Zeiteinheit gegeben ist ($I = \frac{dQ}{dt}$, Gleichung ??). Die über eine Zeitspanne transportierte Ladungsmenge Q errechnet sich zu

$$Q = \int_0^t i(\tau) d\tau. \quad (5.7)$$

Will man einen Gleichstrom der Stärke I für diesen Ladungstransport mit einem Wechselstrom $i(t)$ vergleichen, so muß man über die Periodendauer T integrieren. Man erhält den linearen Mittelwert \bar{i} :

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt. \quad (5.8)$$

Für reine Wechselgrößen ergibt die Integration immer Null, da die Flächen unter der positiven und über der negativen Halbschwingung jeweils gleich groß ist. Die Ladung Q wird in der einen Halperiode in die eine Richtung, in der zweiten Halperiode in die andere Richtung bewegt. Es kommt daher zu keinem resultierenden Ladungstransport. Für Mischströme ist der lineare Mittelwert von Null verschieden und entspricht dem überlagerten Gleichanteil.

5.3.2 Der Gleichrichtwert

Mittels Halbleiterbauelementen, z.B. Dioden, kann man eine sogenannte Gleichrichtung einer Wechselgröße erzielen. hernach werden die beiden Halbschwingungen dieselbe Stromrichtung aufweisen.

Der zeitliche Mittelwert dafür ergibt sich aus dem Integral

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt. \quad (5.9)$$

Für sinusförmige Größen wie $i(t) = \hat{i} \sin(\omega t)$ und $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ ergibt sich das Integral zu:

$$\frac{\overline{|i|}}{\hat{i}} = \frac{\overline{|u|}}{\hat{u}} = \frac{1}{\omega T} \int_0^T |\sin(\omega t)| d(\omega t) = \frac{2}{\pi} = 0,6366. \quad (5.10)$$

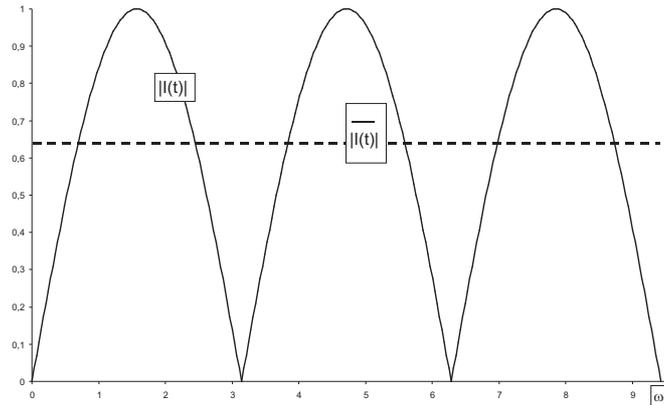


Abbildung 5.4: Gleichrichtung einer sinusförmigen Wechselgröße.

5.3.3 Der Effektivwert oder quadratische Mittelwert

Für den Vergleich der elektrischen Leistung an einem Widerstand, in einem Falle mit Gleichstrom, im anderen Falle mit Wechselstrom durchflossen, müssen folgende Überlegungen gelten. Im Falle von Gleichstrom gilt für die Leistung $P = UI = I^2R = U^2/R$. Für den Wechselstromfall gilt sinngemäß:

$$P = i^2(t)R. \quad (5.11)$$

Führt man darin das Quadrat über den sinusförmigen Strom aus, so folgt:

$$i^2(t) = \hat{i}^2 \sin^2(\omega t). \quad (5.12)$$

In Abbildung ?? sind die Verläufe der einzelnen Größen grafisch dargestellt.

Der Mittelwert des Quadrates der Kurve $i(t)$ wird, da es sich um eine Gleichgröße handelt, mit I^2 bezeichnet. Für das Integral über die Periode T ergibt sich :

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{\hat{i}^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{\hat{i}^2}{\omega T} \int_0^T \sin^2(\omega t) d(\omega t) = \frac{\hat{i}^2}{2}. \quad (5.13)$$

Der Mittelwert I^2 entspricht daher dem halben Quadrat des Scheitelwertes \hat{i}^2 . Der erhaltene quadratische Mittelwert I

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad (5.14)$$

wird als **Effektivwert** bezeichnet.

Der Effektivwert ist jene Kenngröße eines Wechselstromes, der die gleiche Wirkung wie ein Gleichstrom derselben Höhe hervorruft!

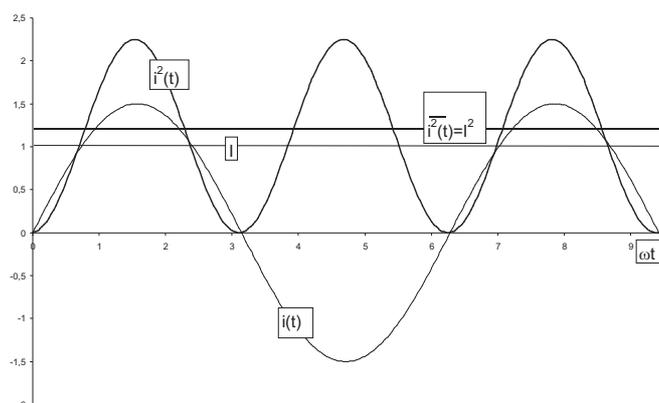


Abbildung 5.5: Zur Herleitung des Effektivwertes.

5.4 Darstellungsformen zeitharmonischer Wechselgrößen

Die Darstellung von elektrischen Größen (z.B. $u = u(t)$, $i = i(t)$) im Zeitdiagramm ist oft sehr umständlich, insbesondere dann, wenn mehrere Größen gleichzeitig diskutiert werden. Zudem sind die mathematischen Operationen oft sehr aufwendig. Es wird daher versucht, die zeitharmonischen Größen in einer symbolischen Weise darzustellen.

5.4.1 Die Zeigerdarstellung oder das Zeigerdiagramm

Am Beispiel einer sinusförmigen Spannung der Form

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

soll diese Form der Darstellung gezeigt werden. Es muß natürlich einen Zusammenhang zwischen Zeitdiagramm und Zeigerdiagramm geben. Dazu betrachte man nachfolgende Abbildung.

In dieser Abbildung wird die Spannung durch einen einfachen Pfeil der Länge \hat{u} dargestellt. Zur Kennzeichnung, daß es sich um einen Zeiger handelt, wird die physikalische Größe durch einen Unterstrich beim Symbol dargestellt. Für den Spannungszeiger gilt damit die Zeigerdarstellung \hat{u} . Definitionsgemäß dreht sich nun der Spannungszeiger \hat{u} entgegen dem Uhrzeigersinn mit der Kreisfrequenz ω . Aus der Projektion des Zeigers auf die y-Achse (oder eine beliebige, dazu parallele Linie) kann für jeden beliebigen Zeitpunkt t der Augenblickswert der Spannung abgelesen werden. Am Papier können nur feststehende Zeiger gezeichnet werden. Ein Zeigerdiagramm gibt also über den Momentanwert der einzelnen dargestellten Größen Auskunft. Werden beispielsweise zwei

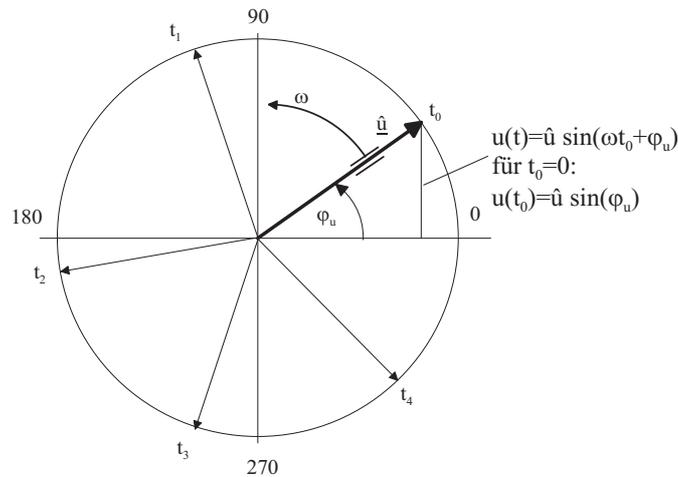


Abbildung 5.6: Zum Zeigerdiagramm.

elektrische Spannungen und eine elektrische Stromstärke

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_{u1}) \\ u_2 &= \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_{u2}) \\ i &= \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \end{aligned}$$

in einem Zeigerdiagramm für einen bestimmten Zeitpunkt t_1 dargestellt, so hat dieses folgendes Aussehen.

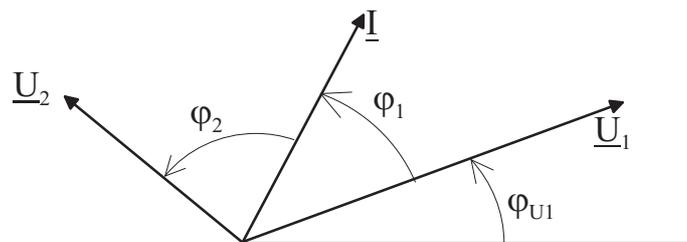


Abbildung 5.7: Zeigerdiagramm für drei elektrische Größen.

In Abbildung ?? wurde schon darauf Bedacht genommen, daß fast ausschließlich mit den Effektivwerten der Wechselgrößen gearbeitet wird. Bei Vorhandensein mehrerer Zeiger ist es zweckmäßig, einen davon als *Bezugszeiger* zu wählen und die Phasenverschiebungen zueinander zu bezeichnen. In der obigen Abbildung wurde der Strompfeil \underline{I} dazu verwendet. Der Winkel φ_1 gibt an, um wieviel die Spannung \underline{U}_1 dem Strom \underline{I} nacheilt. Umgekehrt ist es im Falle der Spannung \underline{U}_2 . Diese eilt dem Strom um φ_2 voraus.

Ein Zeiger ist durch folgende Angaben eindeutig beschrieben:

- Symbol der dargestellten Größe (z.B. \underline{U} , \underline{I} , \hat{u}).
- Betrag der sinusförmigen Größe. Dieser ist proportional der Länge des Zeigers. Dazu ist immer ein Maßstab notwendig, z.B. $1\text{ cm} \hat{=} 5\text{ Volt}$, $1\text{ cm} \hat{=} 3\text{ Ampere}$.
- Frequenz f oder Kreisfrequenz ω der Schwingung.
- Phasenwinkel zu einem Bezugszeiger oder Nullphasenwinkel, z.B. φ_1 , φ_{U1} .

Gemäß der schon hergeleiteten Beziehung zwischen Effektiv- und Scheitelwerten bei sinusförmigen Größen müßten die Zeigerlängen in obigem Zeigerdiagramm um den Faktor $\sqrt{2}$ verlängert werden, um das Zeigerdiagramm für Scheitelwerte zu erhalten.

Die Überlagerung (Addition oder Subtraktion) von sinusförmigen Zeitsignalen gleicher Frequenz ergibt **immer** ein Signal mit sinusförmigem Verlauf bei gleicher Frequenz. Aus diesem Grunde können Zeiger wie Vektoren geometrisch addiert bzw. subtrahiert werden (Abbildung ??).

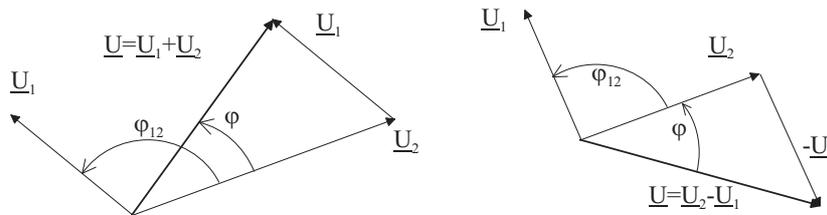


Abbildung 5.8: Geometrische Addition und Subtraktion von Zeigern.

Rechnerisch sind diese beiden Operationen sehr umständlich durchzuführen. Die beiden sinusförmigen Spannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ seien folgend gegeben.

$$u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Die Überlagerung beider Spannungen ergibt:

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Nach Anwendung des Summensatztes $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ erhält man :

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= [\hat{u}_1 \cos \varphi_1 + \hat{u}_2 \cos \varphi_2] \sin(\omega t) + [\hat{u}_1 \sin \varphi_1 + \hat{u}_2 \sin \varphi_2] \cos(\omega t)$$

Damit ergibt sich für die Gesamtspannung u :

$$u \sin \varphi = \hat{u}_1 \sin \varphi_1 + \hat{u}_2 \sin \varphi_2$$

$$u \cos \varphi = \hat{u}_1 \cos \varphi_1 + \hat{u}_2 \cos \varphi_2 \tag{5.15}$$

Aus der Division dieser beiden Gleichungen erhält man über den Arcus-Tangens den resultierenden Phasenwinkel zu:

$$\varphi = \arctan \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\hat{u}_1 \sin \varphi_1 + \hat{u}_2 \sin \varphi_2}{\hat{u}_1 \cos \varphi_1 + \hat{u}_2 \cos \varphi_2} \quad (5.16)$$

Durch Quadrieren und Addieren der sin- und cos-Terme findet man den Scheitelwert \hat{u} der Gesamtspannung.

$$\begin{aligned} \hat{u}^2 &= [\hat{u}_1 \sin \varphi_1 + \hat{u}_2 \sin \varphi_2]^2 + [\hat{u}_1 \cos \varphi_1 + \hat{u}_2 \cos \varphi_2]^2 \\ \hat{u} &= \sqrt{\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + 2\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

In dieser Beziehung ?? wurde noch Gebrauch von der Identität $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ gemacht. Man erkennt die Umständlichkeit dieser einfachen mathematischen Manipulation bereits bei nur zwei zu addierenden/subtrahierenden Größen.

5.4.2 Sinusgrößen als komplexe Zeiger

Bildet man einen Zeiger in der komplexen Zahlenebene ab, so kann dieser Zeiger durch eine komplexe Zahl **eindeutig** beschrieben werden. Es können alle Vorteile aus der komplexen Zahlenrechnung angewandt werden. **Die Sinusschwingung im Zeitbereich wird in die komplexe Ebene transformiert.** Es ist dies lediglich eine einfachere, eine symbolische Darstellungsform der sinusförmigen Größen. Ein komplexer Zeiger wird ebenfalls durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Auch hier hat sich die Verwendung des Effektivwertes durchgesetzt. In Abbildung ?? ist für eine Spannung und für einen Strom deren komplexer Effektivwert \underline{U} , bzw. \underline{I} dargestellt. Man sagt dazu auch die komplexe Spannung bzw. der komplexe Strom.

Die dargestellte Spannung \underline{U} kann durch die Exponentialform oder Eulersche Form

$$\underline{U} = U e^{j(\omega t + \varphi)} = U e^{j\omega t} e^{j\varphi} \quad (5.18)$$

mathematisch beschrieben werden. Unter Verwendung des *Satztes von Moivre* kann daraus die trigonometrische Form erstellt werden:

$$\underline{U} = U [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (5.19)$$

Die bekannte Frequenz f bzw. Kreisfrequenz ω der harmonischen Größe ist nur für die Bestimmung von Zeitwerten notwendig. In allen anderen Fällen wird auch in der komplexen Darstellung eines Zeigers auf die Drehung des Zeigers mit der Kreisfrequenz ω

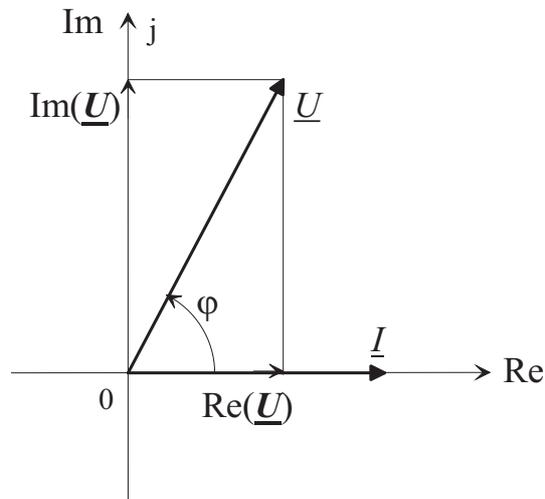


Abbildung 5.9: Zeiger in der komplexen Zahlenebene.

verzichtet. Man läßt in diesen Fällen den Term $e^{j\omega t}$ aus Gleichung ?? weg. Dies entspricht dem Momentanzustand zum Zeitpunkt $t = 0$.

Man bezeichnet die in Abbildung ?? eingezeichneten Größen, den auf der reellen Achse aufgetragenen Anteil von \underline{U} als Realteil und den auf der imaginären Achse aufgetragenen Anteil von \underline{U} als Imaginärteil.

Der Real- und der Imaginärteil einer komplexen Größe berechnet sich durch

$$\begin{aligned} \text{Re}(\underline{U}) &= U \cos(\omega t + \varphi) \\ \text{Im}(\underline{U}) &= U \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Mit diesen Beziehungen ist der Zusammenhang zur Zeitfunktion der Sinusgröße gegeben. Aus diesen Komponenten kann nun der Betrag und der Winkel φ nachfolgend berechnet werden:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\underline{U}) &= a; \quad \text{Im}(\underline{U}) = b \quad \longrightarrow \quad \underline{U} = a + jb \\ U &= |\underline{U}| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Zur komplexen Größe \underline{U} gibt es eine dazu **konjugiert komplexe** Größe. Diese hat ein zur komplexen Größe umgekehrtes Vorzeichen im Imaginärteil und demzufolge auch im Winkel (Abbildung ??).

Die konjugiert komplexe Größe wird mit einem hochgestellten Stern am Größensymbol gekennzeichnet.

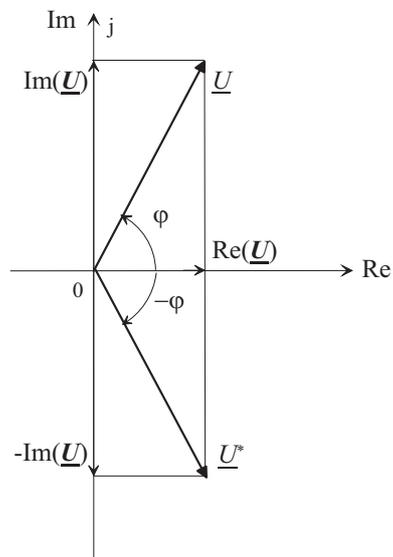


Abbildung 5.10: Komplexe und dazu konjugiert komplexe Größe.

6 Das magnetische Feld

6.1 Grunderscheinungen

Bereits im Altertum war die anziehende bzw. abstoßende Wirkung von in der Natur vorkommenden Eisenerzen bekannt (Magneteisen, Magnetkies). Der Namen der **magnetischen** Wirkung entstand nach der Stadt *Magnesia* in Kleinasien, in deren Nähe derartige Erze gefunden wurden. Die Erde selbst ist ein weiterer natürlicher Magnet, dessen Wirkung beispielsweise bei der Magnetnadel eines Kompasses ausgenutzt wird. In Versuchen zeigte sich die stärkste Wirkung eines magnetischen Stabes (Anziehung, Abstoßung) an dessen beiden Enden. In der Mitte eines Stabes ist praktisch keine Wirkung festzustellen. Man spricht von einer neutralen Zone des Stabes. Die beiden Enden werden als **Pole** bezeichnet. Gemäß der Drehung der Magnetnadel eines Kompasses wird jenes Ende der Nadel, welches zum geografischen Nordpol zeigt, als Nordpol bezeichnet und vice versa. Bei Annäherung zweier Magnete kann folgendes festgestellt werden:

Gleichnamige Pole stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an!

Die magnetische Kraftwirkung ist davon unabhängig, ob sich der Magnet im Vakuum oder in Luft befindet. Überall im Raum kann jedoch eine Kraftwirkung festgestellt werden. Der Zustand des Raumes wird durch das **magnetische Feld** beschrieben.

6.1.1 Elektromagnetismus

Eine wesentliche Entdeckung machte der dänische Physiker Oerstedt 1820. Er erkannte, daß eine Magnetnadel, welche sich in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters befindet, abgelenkt wird. Damit gelangte man zu einer der wichtigsten Erkenntnisse der Elektrotechnik, daß nämlich eine bewegte elektrische Ladung (Strom) immer von einem Magnetfeld begleitet wird. Das magnetische Feld kann dabei vergrößert werden, wenn man die Stromstärke durch den Leiter erhöht. Ebenso erkannte man, daß die Stromumkehr im Leiter zu einer Umkehrung der Kraftwirkung führt. Das bedeutet, daß das magnetische Feld durch gerichtete Größen beschrieben werden muß.

6.1.2 Feldvektoren und Feldbilder

Für die folgenden Betrachtungen wird angenommen, daß neben stromführenden elektrischen Leitern nur luftleerer Raum bzw. Luft vorhanden ist. Das magnetische Feld kann durch einen Vektor, welcher **magnetische Induktion** genannt und mit dem Symbol \vec{B} bezeichnet wird, beschrieben werden. Wie im Falle des elektrischen Feldes, kann auch die Darstellung des magnetischen Feldes mit Hilfe von Feldlinien in übersichtlicher Weise erfolgen. In Abbildung ?? ist die Magnetfeldverteilung eines stromdurchflossenen Leiters mit den Feldlinien dargestellt.

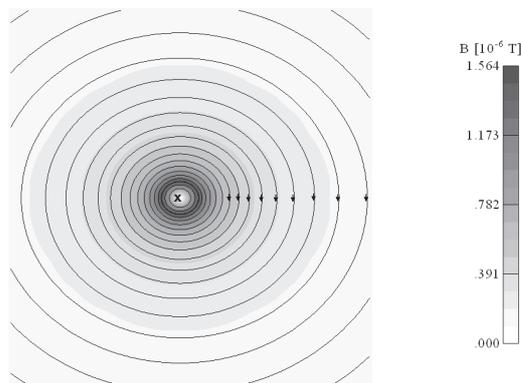


Abbildung 6.1: Magnetfeld einer stromführenden Leiters.

Zur Darstellung des Stromflusses im Leiter gilt folgende Konvention:

- ⊗ Der Strom fließt in die Zeichenebene hinein.
- ⊙ Der Strom fließt aus der Zeichenebene heraus.

Je dunkler die Hintergrundfarbe ist, umso größer ist der Betrag der magnetischen Induktion \vec{B} . Es besteht ein definierter Zusammenhang zwischen der Stromrichtung durch den Leiter und der Richtung der Feldlinien.

Dreht man eine Rechtsschraube in Richtung der bei den Feldlinien angegebenen Pfeile, so bewegt sich die Schraube in Richtung des Stromes (Rechtsschraubenregel)!

In Abbildung ?? ist für eine kreisförmige Stromschleife ein entsprechendes Feldbild dargestellt.

Das magnetische Feld einer Spule mit mehreren Windungen ergibt sich nachfolgend (Abbildung ??):

Auch Im Falle des magnetischen Feldes gibt es den Begriff Homogenität des Feldes. Im Vergleich zwischen den Abbildungen ?? und ?? ersieht man schon, daß durch die

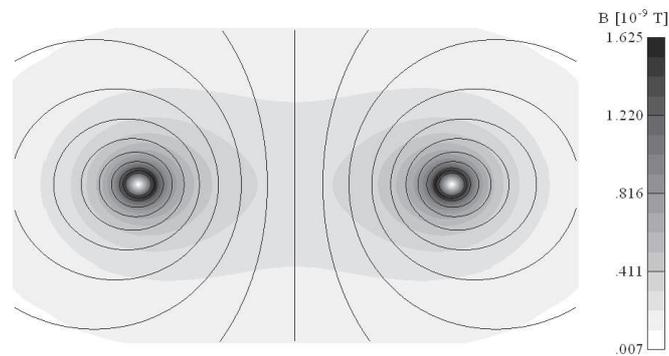


Abbildung 6.2: Magnetfeld einer kreisförmigen Stromschleife.

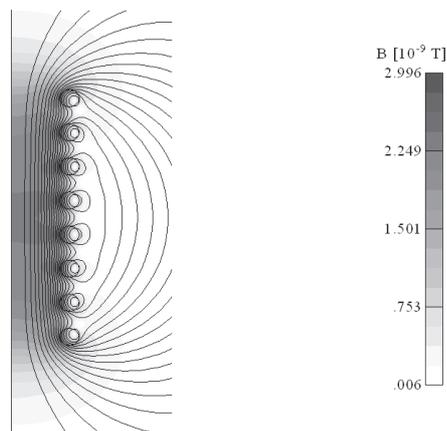


Abbildung 6.3: Magnetfeld einer Spule mit mehreren Windungen.

Verlängerung der Spule (von einer Windung auf acht Windungen) das Feld im Inneren der Spule dem homogenen Fall immer näher kommt. Je Länger die Spule, je dichter bewickelt und je dünner sie ist, umso *homogener* wird das Feld werden.

6.1.3 Vergleich zum elektrischen Feld

Aus den Felddarstellungen kann man einen wesentlichen Unterschied zu den Feldbildern des elektrischen Feldes erkennen. Im elektrischen Feld beginnen und enden die Feldlinien bei den Ladungen (Quellen und Senken).

Die Feldlinien der magnetischen Induktion \vec{B} sind immer in sich geschlossen !

Man kann daraus ableiten, daß es im Gegensatz zum elektrischen Feld keine magnetischen Ladungen gibt. Das magnetische Feld ist stets **quellenfrei**.

6.2 Kraft auf bewegte Ladungen

Der magnetische Feldvektor \vec{B} wird aus der Kraftwirkung des Feldes abgeleitet. Dazu betrachte man folgendes Experiment. Unter der Annahme, daß kein elektrisches Feld \vec{E} vorhanden ist, wird ein Probeladung mit der positiven Ladung Q_0 in ein homogenes magnetisches Feld \vec{B} mit einer Geschwindigkeit \vec{v} eingebracht (Abbildung ??):

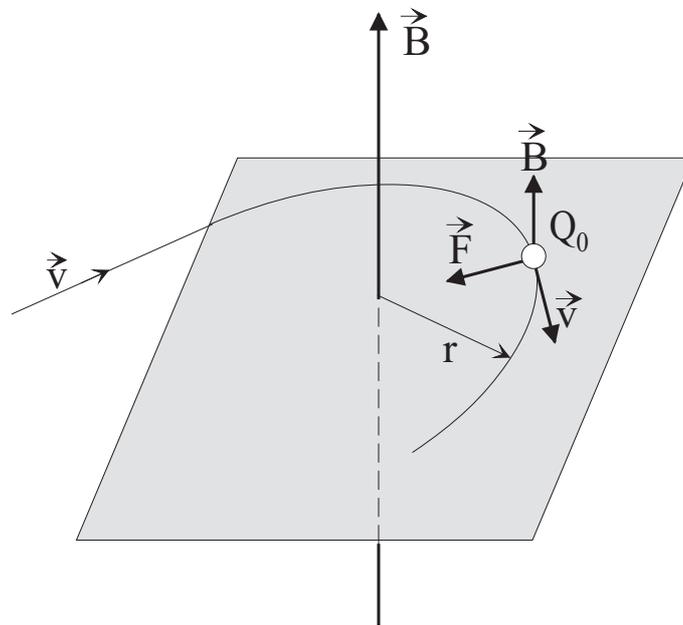


Abbildung 6.4: Kraftwirkung auf eine bewegte Ladung Q_0 .

Man stellt nun fest, daß die Probeladung Q_0 unter dem Einfluß des magnetischen Feldes eine Ablenkung aus der ursprünglich geraden Bahn in eine Kreisbahn erfährt. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt dabei immer gleich. Auf die Probeladung Q_0 wirkt folglich eine Kraft gleichbleibender Größe in radialer Richtung zur Mitte eines gedachten Kreismittelpunktes. Schießt man hingegen die Probeladung Q_0 in gleicher oder gegengleicher Richtung zur Richtung des Magnetfeldes ein, so erfolgt **keine** Kraftwirkung auf Q_0 . Die Größe der Kraft \vec{F} kann aus dem Radius r der Bahnkurve zusammen mit der Geschwindigkeit \vec{v} der Ladung und deren Masse m bestimmt werden. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$|\vec{F}| = m \frac{|\vec{v}|^2}{r}. \quad (6.1)$$

Aus diesem Experiment wird deutlich, daß bei bekannter Masse und bekannter Geschwindigkeit eines Teilchens durch die Messung des Halbmessers r der Bahnkurve die Größe der Kraft F bestimmt werden kann. Weitere Versuche mit demselben Teilchen (gleichbleibende Masse m), mit jedoch unterschiedlicher Ladung und verschiedenen Geschwindigkeiten ergeben folgende Proportionalität:

$$|\vec{F}| = Q_0 |\vec{v}||\vec{B}|. \quad (6.2)$$

Mit dem Wissen der sich ergebenden Richtung der Kraft aus dem Experiment kann unter Verwendung des vektoriiellen Kreuzproduktes die Definitionsgleichung für den magnetischen Vektor \vec{B} gefunden:

$$\vec{F} = Q_0(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.3)$$

In der folgenden Abbildung wird nochmals die Richtung der Kraftwirkung verdeutlicht: Die Einheit der magnetischen Induktion \vec{B} ergibt sich aus

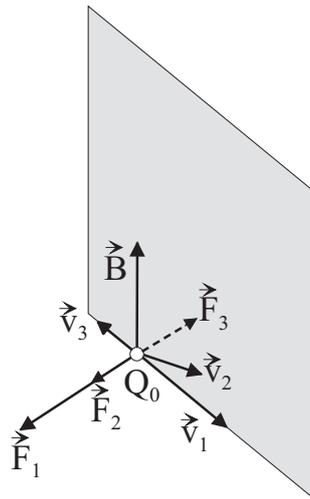


Abbildung 6.5: Bestimmung der Krafterichtung auf eine Ladung Q_0 in einem Punkt P.

$$\begin{aligned} [\vec{B}] &= \frac{[\vec{F}]}{[Q][\vec{v}]} = \left[\frac{N}{As \frac{m}{s}} = \frac{N}{Am} = \frac{VAs}{m} = \frac{Vs}{m^2} \right] \\ [\vec{B}] &= \left[\frac{Vs}{m^2} = T \right] \quad \dots \quad Tesla \\ [1T] &\hat{=} [10^4 G] \quad \dots \quad Gau\beta. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Die Einheit *Gauß* wird nicht mehr häufig verwendet. In der Größenordnung von einem *Gauß* liegt das Magnetfeld der Erde. Im Elektromaschinenbau werden magnetische Induktionswerte im Bereich um 1 *Tesla* verwendet. Bei supraleitenden Luftspulen erreicht

man bis zu 4 *Tesla*. Aufgrund der Tatsache, daß die magnetische Kraft stets senkrecht zur Richtung der Bewegung des geladenen Teilchens steht, wird keine Arbeit an der Ladung verrichtet. Andernfalls müßte sich der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens ändern. Folglich gilt:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = 0. \quad (6.5)$$

Bei Vorhandensein einer elektrischen Feldstärke \vec{E} und eines Magnetfeldes \vec{B} überlagern sich die Kraftwirkungen aus den unterschiedlichen Feldern zu

$$\vec{F} = Q_0 \vec{E} + Q_0 (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.6)$$

Diese Beziehung wird als **Lorentz-Gleichung** bezeichnet [Hendrick A. Lorentz, holländischer Physiker]. In dieser Beziehung wird der erste Ausdruck Coulomb-Kraft, der zweite als Lorentz-Kraft benannt. Mit den nun bekannten Beziehungen der magnetischen Kraftauswirkung auf bewegte Ladungen kann die Auswirkung auf stromdurchflossene Leiter beschrieben werden.

6.3 Magnetische Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter

Ein zylinderförmiger Draht wird von einem Strom I durchflossen, wobei sich der Leiter in einem Magnetfeld \vec{B} befindet (Abbildung ??). Auf jede, sich mit der Driftgeschwindigkeit

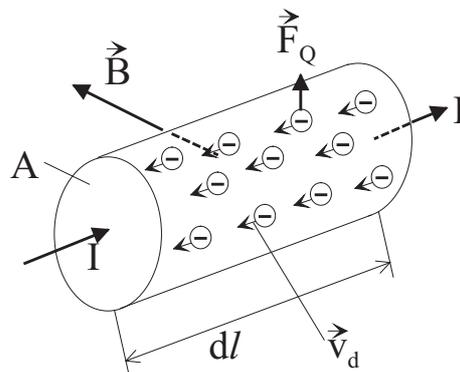


Abbildung 6.6: Teil eines stromdurchflossenen Leiters im Magnetfeld.

\vec{v}_d bewegende Ladung der Größe $Q = -e$ wird eine Kraft \vec{F}_q ausgeübt.

$$\vec{F}_q = -e (\vec{v}_d \times \vec{B}). \quad (6.7)$$

Bei einer Ladungsträgerdichte N [Ladungen pro Volumseinheit] und dem Drahtstück der differentiellen Länge dl mit dem Querschnitt A ergibt sich die Summe aller Einzelkräfte \vec{F}_q zu

$$d\vec{F} = NA dl \vec{F}_q = -NAe (\vec{v}_d \times \vec{B}) dl. \quad (6.8)$$

Mit den bekannten Größen

$$\begin{aligned} \rho &= -Ne \\ \vec{J} &= \rho \vec{v}_d \\ dV &= A dl \end{aligned}$$

folgt daraus:

$$d\vec{F} = (\vec{J} \times \vec{B}) dV. \quad (6.9)$$

Die Kraft pro Volumseinheit des Drahtes ergibt sich damit aus dem Kreuzprodukt der Stromdichte \vec{J} mit der magnetischen Induktion \vec{B} . Unter Zuhilfenahme des Richtungsvektors $d\vec{l}$ der Länge dl , in Richtung der Stromdichte \vec{J} zeigend und der Berücksichtigung, daß die Flächenrichtung von A in dieselbe Richtung wie $d\vec{l}$ weist, kann Gleichung ?? folgend umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} dV \vec{J} &= \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot d\vec{l} &= I d\vec{l} \\ d\vec{F} &= I(d\vec{l} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Bezieht man Gleichung ?? auf den Betrag dl , erhält man schließlich:

$$\frac{d\vec{F}}{dl} = I \left(\frac{d\vec{l}}{dl} \times \vec{B} \right) = I(\vec{e}_l \times \vec{B}). \quad (6.11)$$

6.4 Die Erregung des magnetischen Feldes

Aus dem Bisherigen haben wir die qualitative Wirkung, die Kraftwirkung des Magnetfeldes diskutiert und daraus die magnetische Induktion definiert. Die Abhängigkeit der Größe des Magnetfeldes vom verursachenden Strom wird im Folgenden anhand eines geraden Stromfadens gefunden.

6.4.1 Das magnetische Feld eines Stromfadens

Ist die Annahme gültig, daß ein stromführender Leiter einen sehr kleinen Durchmesser hat im Verhältnis zu dessen Länge, so spricht man von einem **Stromfaden**. Von einem derartigen Leiter wissen wir bereits, daß die Feldlinien durch konzentrische Kreise um den Stromfaden nachgebildet werden können. Die Richtung wurde der Rechtsschraubenregel entsprechend zugeordnet. In der folgenden Untersuchung wird noch der Einfluß der Stromstärke I auf die Größe des Feldes und dessen Abhängigkeit vom Radius r im Experiment ermittelt. Die prinzipielle Anordnung ist in Abbildung ?? dargestellt: Drei

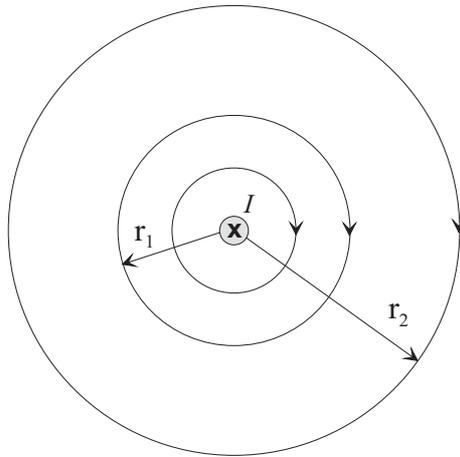


Abbildung 6.7: Magnetfeld eines Stromfadens.

wichtige Aussagen können aus dieser Anordnung erkannt werden:

1. Entlang der konzentrischen Kreise ist der Betrag der magnetischen Induktion $|\vec{B}|$ immer gleich. Dies kann beispielsweise durch eine Magnetnadel nachvollzogen werden.
2. Auf den unterschiedlichen Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 sind die Beträge der $|\vec{B}|$ magnetischen Induktion umgekehrt proportional den Radien.
3. Eine Änderung des Stromes I hat eine proportionale Änderung der magnetischen Induktion zur Folge.

Zusammenfassend können diese Erfahrungstatsachen in der Beziehung

$$|\vec{B}| = k \frac{I}{r}. \quad (6.12)$$

Der Proportionalitätsfaktor wird unter Einführung der sogenannten **Permeabilitätskonstanten** μ_0 definiert und für den Betrag der magnetischen Induktion ergibt sich

hernach:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi 10^{-7} \left[\frac{Vs}{Am} \right] \\ k &= \frac{\mu_0}{2\pi} \\ |\vec{B}| &= \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \end{aligned} \tag{6.13}$$

In ähnlicher Weise zum elektrischen Feld wird auch hier eine weitere vektorielle Größe definiert, um später auch die Materialeigenschaften des Raumes, welche ungleich denen von Vakuum bzw. Luft sind, berücksichtigen zu können. Dazu wird die magnetische Erregung \vec{H} definiert

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \tag{6.14}$$

Der Vektor \vec{H} wird, historisch bedingt, häufig als magnetische Feldstärke, analog zur elektrischen Feldstärke \vec{E} bezeichnet. An einem beliebigen Ort können somit die Ursache durch die magnetische Erregung \vec{H} und die Wirkung durch die magnetische Induktion \vec{B} beschrieben werden. Aus der Definitionsgleichung für \vec{H} ergibt sich die magnetische Erregung des Fadenstromes zu

$$|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r} \left[\frac{A}{m} \right]. \tag{6.15}$$

6.4.2 Magnetische Spannung und Durchflutung

In Analogie zum elektrischen Feld kann auch hier eine Spannung, die **magnetische Spannung** U_{mag} aus dem Integral der magnetischen Erregung \vec{H} entlang des Weges l

$$U_{mag} = \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{s} \tag{6.16}$$

berechnet werden. Im Falle eines homogenen Magnetfeldes kann, bei Integration entlang einer Feldlinie, das vektorielle In-Produkt durch die Skalare der parallel gerichteten Größen ersetzt werden, sodaß für n Wegstücke

$$U_{mag} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_n l_n = \sum_{i=1}^n H_i l_i \tag{6.17}$$

gilt (Abbildung ??, links). Die Einheit der magnetischen Spannung ist das Ampere [A].

Betrachtet man beispielsweise die schon beschriebene Magnetfeldverteilung eines Stromfadens und integriert dabei entlang einer **geschlossenen** Feldlinie (ist **nur** in diesem Falle ein Kreis), so erhält man den Strom I (Abb. ??, links).

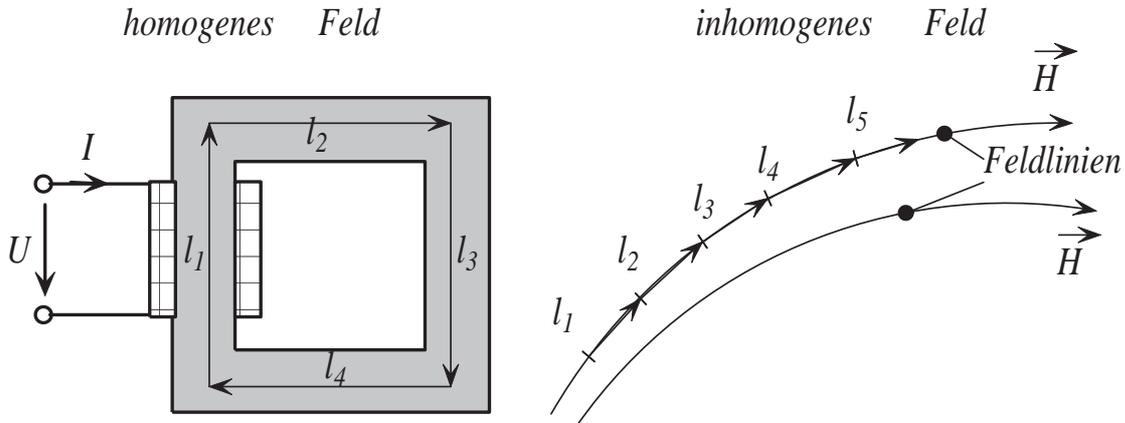


Abbildung 6.8: Integration von \vec{H} entlang eines Weges l .

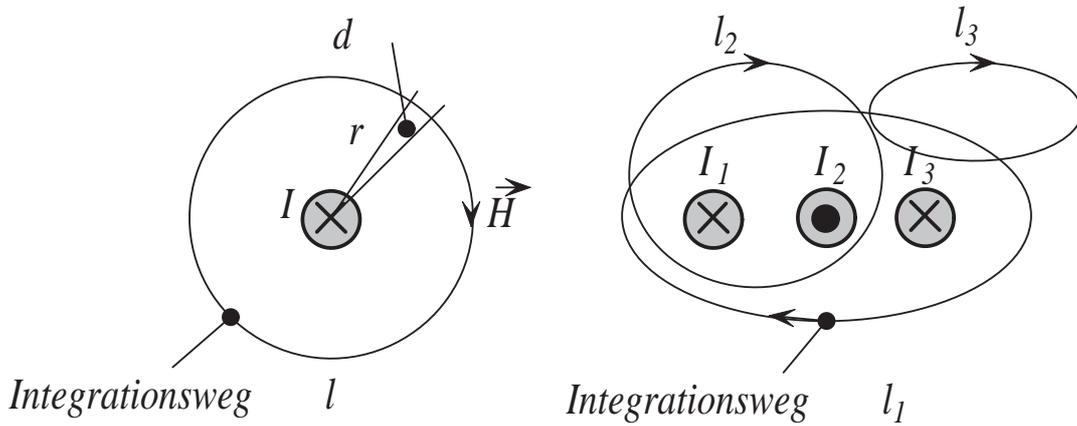


Abbildung 6.9: Integration von \vec{H} entlang eines Weges l , Durchflutungssatz.

Mit Gleichung ?? wird

$$\oint_{\varphi=0}^{2\pi} H_{\varphi} r d\varphi = \oint_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi = I \quad (6.18)$$

Legt man nun N Stromfäden zusammen und führt wieder die Integration über eine geschlossene Feldlinie aus, so erhält man daraus NI . Dieses Produkt aus NI wird als Durchflutung Θ bezeichnet.

$$\Theta = \Sigma I = NI = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad [A] \quad (6.19)$$

Bei Leitern mit endlichem Radius bzw. endlichem Querschnitt ergibt sich der Gesamtstrom I auch aus dem Integral der Stromdichte \vec{J} über den Querschnitt A .

6.4.3 Der Durchflutungssatz

Mit dem **Durchflutungssatz** wird das geschlossene Wegintegral oder Umlaufintegral über die magnetische Erregung \vec{H} allgemein beschrieben:

$$U_{mag} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{\text{eingeschl.}} I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (6.20)$$

Wendet man dies auf die in der Abb. ??, rechts dargestellten, beliebig gewählten geschlossenen Wege l_1 , l_2 und l_3 an so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \oint_{l_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_1 + I_3 - I_2 \\ \oint_{l_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_1 - I_2 \\ \oint_{l_3} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= 0 \end{aligned}$$

Integriert man über einen geschlossenen Weg, welcher keinen stromführenden Leiter umfaßt, so ergibt dieses Integral stets den Wert **N U L L** !

Der Durchflutungssatz gilt immer, sowohl für homogene als auch inhomogene Felder und auch bei Anwesenheit beliebiger Materie. Gleichung ?? besagt weiter, daß die magnetische Erregung die Durchflutung wie Wirbel umschließt. **Die Durchflutung Θ stellt die Wirbel des magnetischen Feldes dar.**

6.4.4 Der magnetische Fluß Φ

In völliger Analogie zum elektrischen Strömungsfeld ist es auch hier sinnvoll, eine integrale Größe zur Beschreibung der magnetischen Strömung zu definieren. Der **magnetische Fluß Φ** , ist folgend definiert:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \left[\frac{Vs}{m^2} m^2 = Vs = Wb \right] \quad \dots \quad \text{Weber} \quad (6.21)$$

Der magnetische Fluß durch einen Querschnitt A entspricht der Integration der magnetischen Induktion über diesen Querschnitt A . Die magnetische Induktion \vec{B} wird daher oftmals als **magnetische Flußdichte** bezeichnet. Der magnetische Fluß Φ ist eine **skalare** Größe!

6.5 Materie im magnetischen Feld

Bei sehr vielen praktischen Anwendungen ist es nicht ausreichend, den magnetischen Fluß nur in Luftgebiet strömen zu lassen. Es ist vielmehr vorteilhaft, den magnetischen Fluß mit Materialien, welche wesentlich bessere magnetische Eigenschaften als Luft oder Vakuum aufweisen, zu führen. Für diesen Fall kann der Erregerbedarf (die Durchflutung oder die Amperewindungen) wesentlich verringert werden. Analog zum elektrischen Feld wird hier eine Größe, die **relative Permeabilitätszahl** eingeführt, welche das Materialverhalten repräsentativ beschreiben kann. Aus Gleichung ?? wird dadurch

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (6.22)$$

μ_0 Permeabilitätskonstante $4\pi \cdot 10^{-7} [\frac{Vs}{Am}]$
 μ_r relative Permeabilitätszahl, **dimensionslos**
 μ Permeabilität $[\frac{Vs}{Am}]$

Entsprechend der Größe der relativen Permeabilitätszahl gibt es folgende Fallunterscheidungen:

- Stoffe mit ferromagnetischen Eigenschaften, $10^2 \leq \mu_r \leq 10^6$ z.B.: Fe, Ko, Ni.
- Stoffe mit diamagnetischen Eigenschaften, $\mu_r < 1$ z.B.: Cu, Ag, H, H_2O , Glas.
- Stoffe mit paramagnetischen Eigenschaften, $\mu_r > 1$ z.B.: Si, Al, Luft.

Sehr viele Materialien weisen in den einzelnen geometrischen Richtungen ein unterschiedliches Feldverhalten auf. Diese Eigenschaft wird als **Anisotropie** bezeichnet. Richtungsunabhängige Materialeigenschaften werden als **isotrop** bezeichnet. Zudem kann das Magnetfeldverhalten **nichtlinear** sein, das heißt, eine Erhöhung der magnetischen Erregung wird keine proportionale Erhöhung der magnetischen Induktion bzw. des Flusses zur Folge haben. Nichtlineare, ferromagnetische Stoffe (Eisen, Stahlbleche,...) kommen industriell sehr häufig zur Anwendung.

6.5.1 Ferromagnetisches Material im Magnetfeld

Es ist sehr schwierig, genaue Aussagen über die Materialeigenschaften von ferritischen Stoffen zu treffen. Zum einen zeigt das Feldverhalten einen nichtlinearen Verlauf, welcher nur indirekt durch Messungen gefunden werden kann. Andererseits spielt die Vorgesichte des Materials eine bedeutende Rolle. Man kann sich dies folgend vorstellen. Bei ferromagnetischen Stoffen weisen einige Atome und Molekülgruppen einen nicht neutralen Zustand auf. Die sogenannten *Weißschen Bezirke* sind bereits in eine bestimmte Richtung orientiert. Erst oberhalb einer Temperatur von 763° Grad Celsius, dem Curie-Punkt, geht diese Orientierung verloren. Die Orientierung der einzelnen Bezirke ist dann

völlig unregelmäßig, sodaß keine bevorzugte Magnetisierung feststellbar ist. Legt man hingegen eine magnetische Erregung \vec{H} an, so wird durch Wandverschiebungen und Drehungen der Weißschen Bezirke entsprechend der äußeren Erregung ein Magnetisierungszustand erreicht (Abbildung ??). Der Vorgang der Magnetisierung ist reversibel.

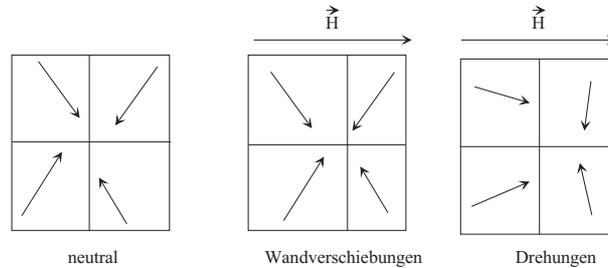


Abbildung 6.10: Illustration zur Magnetisierung.

Man denke sich einen unmagnetisierten ferritischen Eisenring, um welchen Windungen sehr eng bewickelt sind (Abbildung ??). Erhöht man nun die elektrische Stromstärke

Strom I , N Windungen

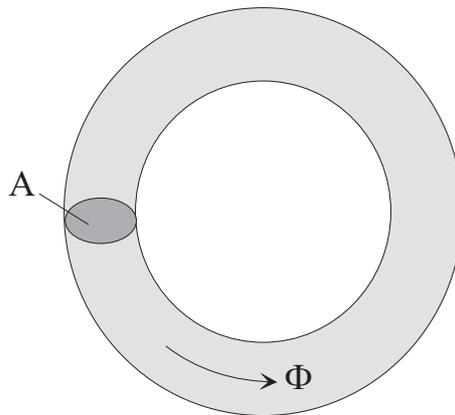


Abbildung 6.11: Bewickelter Ringkern.

durch diese Spule sukzessive, so wird die magnetische Erregung in gleichem Maße erhöht werden. Mißt man zu jedem Stromwert I die magnetische Flußdichte im Eisenkern, so erkennt man, daß ab einer bestimmten magnetischen Erregung der Zuwachs der Induktion B nicht mehr proportional mit der Erregung H wächst. Das Material erreicht eine Sättigungszustand. Dabei sind die Weißschen Bezirke schon bis zu einem sehr hohen Grad ausgerichtet. Verringert man nun den Strom wieder auf Null und erhöht ihn in die andere Richtung, so wird eine, wie in Abbildung ?? dargestellte Schleife durchlaufen. Nachdem auch im negativen Bereich eine Sättigung erreicht wurde, regelt man den

Strom wieder zurück und in die andere Richtung wieder auf. Die so vervollständigte Schleife wird als Hysteresisschleife bezeichnet. Der dargestellte Kurvenverlauf ist für je-

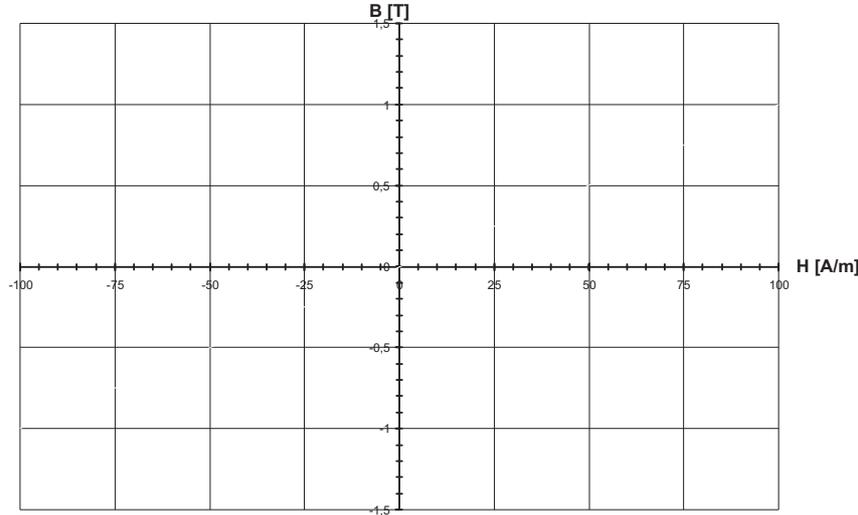


Abbildung 6.12: Magnetisierungskennlinie.

des ferritische Material unterschiedlich. Schaltet man beim Stromdurchlauf genau dann ab, wenn die Erregung H Null ist, so wird trotzdem eine magnetische Flußdichte, die Remanenzflußdichte B_r verbleiben. Jenachdem, ob man vom positiven oder vom negativen Sättigungspunkt kommt, wird das Vorzeichen von B_r entsprechend positiv oder negativ sein. Andererseits wird man beim Durchlaufen der Schleife feststellen, daß beim Nulldurchgang der magnetischen Induktion B eine magnetische Erregung, die sogenannte **Koerzitivfeldstärke** H_c vorhanden sein wird. Zum Erreichen eines induktionsfreien Zustandes im Eisen muß daher eine magnetische Erregung aufgebracht werden, welche die Remanenzflußdichte kompensiert. Die Neukurve wird nur beim erstmaligen Aufmagnetisieren eines ferritischen Stoffes durchschritten. Für die Berechnung magnetischer Kreise ist es notwendig, die Hysteresis-Kurven genau zu kennen. Magnetische Stoffe, die eine sehr breite Hysteresisschleife aufweisen werden als **hartmagnetisch**, solche die eine sehr schmale Schleife aufweisen als **weichmagnetisch** bezeichnet.

Wandelt man die Beziehung ?? um, so erhält man für kleine Änderungen der Feldgrößen

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (6.23)$$

und für infinitesimale Änderungen folgt

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}. \quad (6.24)$$

Die Ableitung der $B(H)$ -Kennlinie (Abbildung ??) ist somit ein Maß für die relative Permeabilität im betrachteten Erregungszustand. Zeichnet man diese Ableitung in ein eigenes Diagramm, so erkennt man, daß nach dem Erreichen eines Maximums ab einem gewissen Erregungszustand fast keine Änderung mehr vorkommt. Die Eigenschaft, daß nach dem

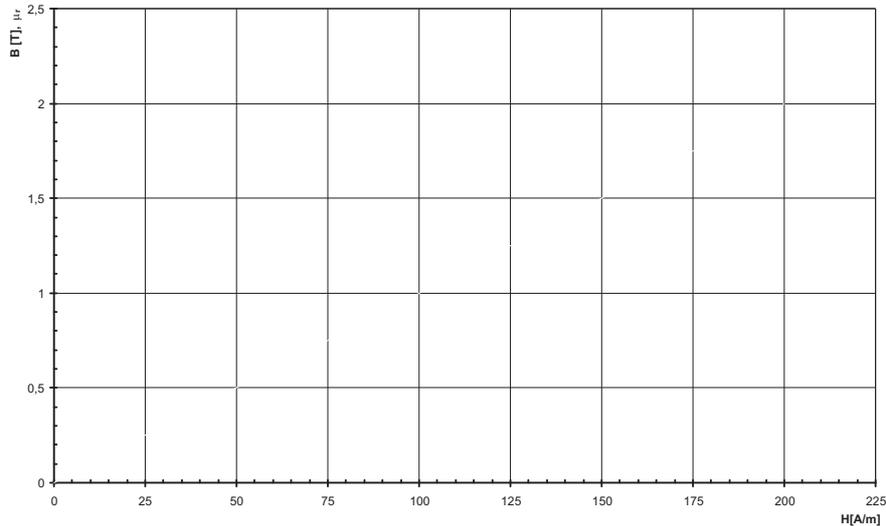


Abbildung 6.13: Relative Permeabilität μ_r .

Abschalten des Erregerstromes (bei $H = 0$) noch eine Remanenzinduktion vorhanden bleibt, macht man sich bei einigen Werkstoffen gezielt zunutze. Bei den sogenannten **Dauermagneten** oder auch **Permanentmagneten** (Eisen,- Kobald- und Nickellegerungen, Seltene Erd- Verbindungen, wie Neodym-Eisen-Bor Legierung $Nd_{12}Fe_{14}B$) lassen sich Remanenzfeldstärken B_r von bis zu 1,3 Tesla bzw. H_c von etwa -2000 [kA/m] verwirklichen. Die hohen Koerzitivfeldstärken sind notwendig, um nicht ein sofortiges Entmagnetisieren durch Anlegen einer Durchflutung Θ zu erwirken. Die Aufmagnetisierung von Dauer- oder Permanentmagneten erfolgt einmalig mittels einer äußerst hohen magnetischen Erregung. Der Arbeitspunkt von magnetischen Kreisen mit Dauermagneten ist in der Regel im zweiten Quadranten der Hysterisis-Kennlinie.

6.6 Das Ohmsche Gesetz für magnetische Kreise

Es wurde erläutert, daß die Durchflutung Θ ein Maß für die Ursache des magnetischen Feldes ist. Betrachten wir den Ringkern aus Abbildung ?? mit dem kreisförmigen Querschnitt A . Da der Querschnitt überall gleich ist wird im gesamten magnetischen Kreis ein gleichbleibender magnetischer Fluß Φ fließen. Demzufolge ist auch die magnetische

Induktion B dem Betrage nach überall gleich. Die mittlere Länge der Feldlinien sei l . Der magnetische Fluß Φ errechnet sich aus

$$\Phi = B A = \mu H A = \mu \frac{N I}{l} A = \frac{\mu A}{l} \Theta = \Lambda \Theta. \quad (6.25)$$

Mit Λ ist darin der magnetische Leitwert, der Kehrwert des magnetischen Widerstandes R_{mag} bezeichnet.

$$R_{mag} = \frac{1}{\Lambda} = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \left[\frac{m}{\frac{Vs}{Am} m^2} = \frac{A}{Vs} = \frac{1}{H} \right] \dots \text{Henry} \quad (6.26)$$

Mit dieser Definition des magnetischen Widerstandes R_{mag} kann das Ohmsche Gesetz für magnetische Kreise folgend ausgedrückt werden:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{mag}} = \Theta \Lambda \quad \longrightarrow \quad \Theta = \Phi R_{mag}. \quad (6.27)$$

Für die Berechnung magnetischer Kreise mit n hintereinanderliegenden unterschiedlichen Abschnitten ergibt sich:

$$\Theta = \Phi (R_{mag,1} + R_{mag,2} + R_{mag,3} + \dots + R_{mag,n}) = \Phi \sum_{i=1}^n R_{mag,i}. \quad (6.28)$$

6.7 Analogie zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld

In der nachfolgenden Tabelle sind die analogen elektrischen und magnetischen Größen gegenübergestellt.

elektrische Größe	analoge magnetische Größe
Spannung U	magnetische Spannung U_{mag}
Quellenspannung U_q	Durchflutung Θ
Strom I	Fluß Φ
Widerstand R	magnetischer Widerstand R_{mag}
elektrische Leitfähigkeit γ	magnetische Permeabilität μ
elektrische Erregung \vec{D}	magnetische Erregung \vec{H}

6.8 Wirkungen im Magnetfeld

Durch die gezielte Führung des magnetischen Flusses durch magnetisch gut leitende Werkstoffe (z.B. Eisen) ist es möglich, an entsprechenden Stellen des Magnetkreises - meist in Luftspalten - äußerst hohe magnetische Felder zu erreichen. Damit läßt sich in derartigen Gebieten gezielt eine sehr effiziente Umwandlung elektrischer in mechanische Energie oder umgekehrt durchführen. So wird zum einen die schon besprochene Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld angewandt (**motorisches Prinzip**), zum anderen kommt das **generatorische Prinzip**, beruhend auf dem Induktionsgesetz zum tragen.

6.8.1 Das Induktionsgesetz

Die Erzeugung elektrischer Spannung, das heißt, der Ladungstrennung von positiven und negativen Ladungen unter Zuhilfenahme des magnetischen Feldes kann auf zweierlei Weise erfolgen. Eine Leiterschleife kann mechanisch in einem Magnetfeld bewegt werden. Erfolgt dabei eine Zu- oder Abnahme des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife, so kann eine elektrische Spannung an den Enden der Leiterschleife festgestellt werden. Man spricht von der sogenannten **Bewegungsinduktion**. Bei der zweiten Möglichkeit der Spannungserzeugung mit dem Magnetfeld ist eine ruhende, ortsfeste Leiterschleife gegeben. Tritt nun durch diese Schleife ein zeitlich nicht gleichbleibender magnetischer Fluß, so kann an den Schleifenenden wiederum eine elektrische Spannung festgestellt werden. Diese Wirkung bezeichnet man als **Ruheinduktion**. Nachfolgend werden diese beiden Grundprinzipien eingehend beschrieben. Beiden Induktionsarten ist die Änderung des magnetischen Flusses gemein, welche mathematisch durch das Induktionsgesetz

$$u_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (6.29)$$

beschrieben werden kann. Mit $\Delta\Phi$ wird die Flußänderung pro Zeitintervall Δt bzw. bei infinitesimalen Änderungen deren Differentialquotient bezeichnet. Nimmt der Fluß Φ zeitlich ab ($\frac{d\Phi}{dt} < 0$), so entsteht eine Kraftwirkung auf die positiven Ladungen entsprechend einer Rechtsschraubenregel zu \vec{B} .

6.8.2 Die Bewegungsinduktion

In Abbildung ?? ist eine entsprechende Anordnung dargestellt. Führt man eine gleichförmige Bewegung der Leiterschleife in eingezeichneter Richtung \vec{v} normal zu einem homogenen, gleichbleibenden Magnetfeld \vec{B} aus, so ergibt sich, dem Induktionsgesetz entspre-

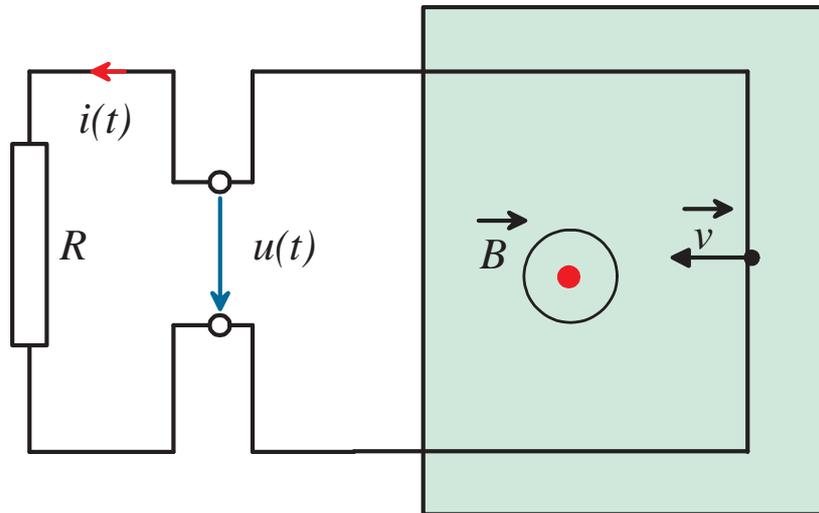


Abbildung 6.14: Bewegung eines Leiters im Magnetfeld.

chend eine Quellenspannung u_q :

$$u_q = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{-dA}{dt} = Bl \frac{ds}{dt} = Blv. \quad (6.30)$$

Die Ladungstrennung erfolgt, wie in Abbildung ?? dargestellt: Aufgrund der Kraftwirkung des magnetischen Feldes auf die mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegten Ladungen im Leiter, entsprechend

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

werden die positiven Ladungen nach oben, die negativen nach unten gedrängt. Innerhalb des Stabes der Länge l wird sich daher eine elektrische Feldstärke \vec{E} und demgemäß eine elektrische Quellenspannung u_q zu

$$u_q = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (6.31)$$

einstellen. Diese wird über den geschlossenen Stromkreis mit dem Widerstand R einen Strom i treiben. Dieser wiederum hat ein magnetisches Feld zur Folge, welches den durch die Schleifenfläche hindurchtretenden Fluß Φ verringert. Ursache und Wirkung sind daher entgegengesetzt gerichtet. Mit der **Lenzschen Regel** wird genau dieses Verhalten beschrieben. Sie besagt daß die Wirkung, - in diesem Falle der Strom i - immer so gerichtet sein muß, daß sie der Ursache - in diesem Falle der Fluß Φ - entgegengerichtet

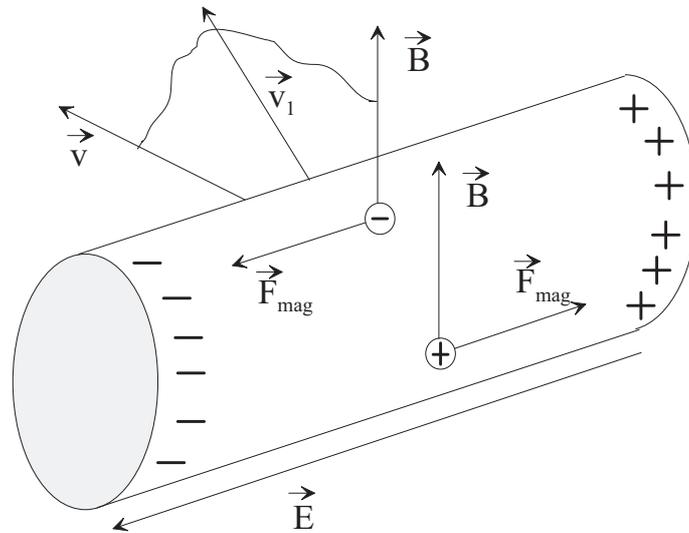


Abbildung 6.15: Kraftwirkungen und Feldgrößen.

ist. Stehen die Vektoren \vec{B} und \vec{v} in einem Winkel α zueinander, so muß die Gleichung ?? mit dem Sinus dieses Winkels multipliziert werden:

$$u_q = B l v \sin \alpha. \quad (6.32)$$

Diese Art der Induktion wird häufig bei Generatoren angewendet. In den meisten Fällen werden Leiterschleifen durch mechanische Kräfte in eine Rotationsbewegung versetzt. Dies geschieht beispielsweise durch ein wasser- oder dampfbetriebenes Turbinenrad. Die Leiterschleifen und der magnetische Kreis sind so ausgeführt, daß sich die Leiterschleifen in einem radialen Luftspalt bewegen ???. Aufgrund der Winkelabhängigkeit der Quellen-

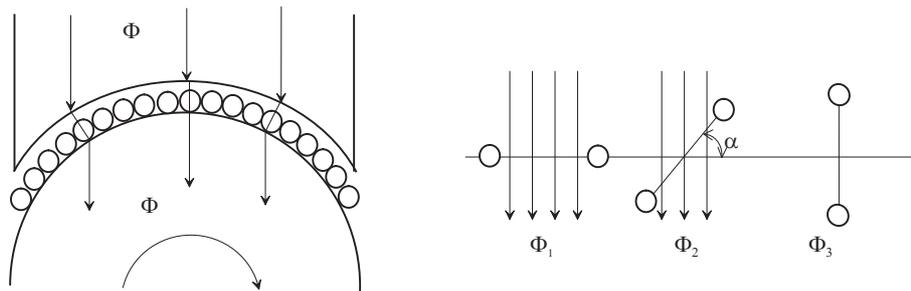


Abbildung 6.16: Drehbewegung von Leiterschleifen im Magnetfeld.

spannung u_q von α wird dabei eine sinusförmige elektrische Spannung zu erwarten sein. Der Fluß Φ durch die Schleifenfläche \vec{A} ergibt sich bei einer homogenen Induktion \vec{B} zu

$$\Phi = B A \cos \alpha = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (6.33)$$

Daraus ergibt sich für die Quellenspannung aus dem Induktionsgesetz (Gleichung ??) ein sinusförmiger Verlauf. Die Zeitabhängigkeit des Winkels α kann dabei durch ωt ausgedrückt werden.

$$u_q = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B A \cos(\omega t))}{dt} = \omega B A \sin(\omega t). \quad (6.34)$$

Sind in einer Anordnung N Windungen in Reihe geschaltet und wird jede Schleife zu einem Zeitpunkt vom gleichen Fluß durchsetzt, so ergibt sich eine N -mal vergrößerte Quellenspannung u_q :

$$u_q = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d(B A \cos(\omega t))}{dt} = N \omega B A \sin(\omega t). \quad (6.35)$$

6.8.3 Die Ruheinduktion

Induktion ist auch bei ruhenden Objekten immer dann möglich, wenn leitende Gebilde, zB. Stromschleifen in Bereichen sich zeitlich ändernder magnetischer Flüsse vorkommen. Ein typischer Anwendungsfall ist dabei der Transformator oder Übertrager. Im Prinzip sind dabei zwei, elektrisch voneinander getrennte Leiterschleifen über einen magnetischen, sich zeitlich ändernden Fluß (Wechselfluß) miteinander verkoppelt. Man spricht bei einer derartigen Trennung zweier elektrischer Kreise von einer **galvanischen** Trennung. Zum Zwecke einer besseren Kopplung zwischen beiden Leiterschleifen (im allgemeinen Spulen) wird der magnetische Fluß über einen magnetisch gut leitenden Eisenweg, dem Transformator Kern geführt. In Abbildung ?? ist das transformatorische Prinzip dargestellt. Legt man an Spule 1 eine zeitlich veränderliche Spannung $u_1(t)$ an,

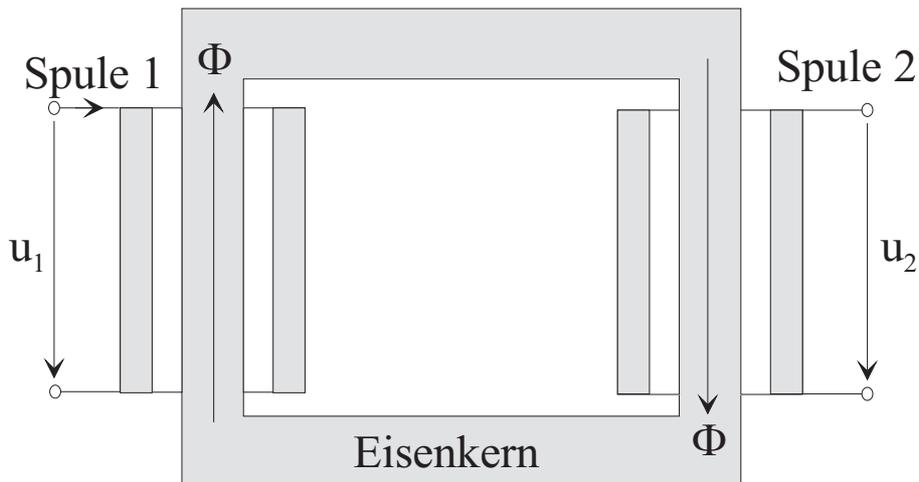


Abbildung 6.17: Grundprinzip eines Transformators.

so wird ein Strom durch die Spule 1 fließen. Dieser wird einen magnetischen Wechselfluß $\Phi(t)$ durch den Eisenweg treiben. Infolge der Flußänderung wird in der Spule 2, entsprechend ihrer Windungszahl N eine Spannung $u_2(t)$ induziert. Aus Gleichung ?? folgt für den Effektivwert der Spannung in Spule 2:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= N \omega \hat{\Phi} \sin(\omega t) = \hat{U}_2 \sin(\omega t) \\ U_2 &= \frac{\hat{U}_2}{\sqrt{2}} = \frac{N 2\pi f \hat{\Phi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi f N \hat{\Phi} \\ U_2 &= 4,44 f N \hat{\Phi}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Die letzte Gleichung wird als Transformatorgleichung bezeichnet. Naturgemäß wird sich bei einem sich zeitlich ändernden Fluß Φ und bei Vorhandensein elektrisch leitfähiger Materialien **immer** ein zusätzlicher Effekt einstellen. Man denke sich die Spule 2 an deren Enden kurzgeschlossen. Es wird dann die in den Windungen induzierte Spannung $u_2(t)$ einen Strom $i_2(t)$ treiben. In gleicher Weise passiert dies auch im elektrisch zwar geringen, jedoch noch immer leitfähigen Eisenweg. Die solcherart entstehenden Ringströme werden als **Wirbelströme** bezeichnet. Um diese gering zu halten, werden die Eisenkerne sehr häufig aus dünnen Blechen, die gegenseitig elektrisch isoliert sind, gefertigt. Dadurch erreicht man einen für die Wirbelströme hohen elektrischen Widerstand bei gleichzeitig guten Eigenschaften zur Leitung des magnetischen Flusses.

6.8.4 Die Induktivität

Aus den prinzipiellen Betrachtungen der Wirkungsweise eines Transformators oder Übertragers wurde klar, daß eine Verkopplung zwischen den Spulen 1 und 2 über das magnetische Feld besteht. Diese Kopplung ist allgemein auch dann gegeben, wenn es sich nicht um zeitlich veränderliche Größen, also für stationäre Vorgänge handelt. Um diese Kopplung zu beschreiben wurde der Begriff der Induktivität eingeführt. Man betrachte dazu zwei Leiterschleifen s_1 und s_2 . Der Strom I_1 durch die Schleife s_1 erzeugt einen magnetischen Fluß Φ_1 durch diese Schleife. Ein Teil dieses Flusses wird auch die Schleife s_2 durchsetzen. Dieser Anteil wurde in Abbildung ?? mit Φ_{12} bezeichnet. Er ist proportional dem Strom I_1 in der Schleife s_1 .

$$\Phi_{12} = M_{12} I_1 \tag{6.37}$$

Der Proportionalitätsfaktor zwischen dem Strom i_1 und dem durch diesen Strom verursachten Fluß Φ_{12} in s_2 wird als **Koeffizient der gegenseitigen Induktion** oder **Gegeninduktionskoeffizient**, kurz auch als **Gegeninduktivität** bezeichnet. Es zeigt sich wenn der umgekehrte Weg eingeschlagen wird, nämlich wenn ein Strom i_2 durch die Schleife s_2 fließt, und dessen Flußanteil Φ_{21} durch die Schleife s_1 berechnet wird, daß ein

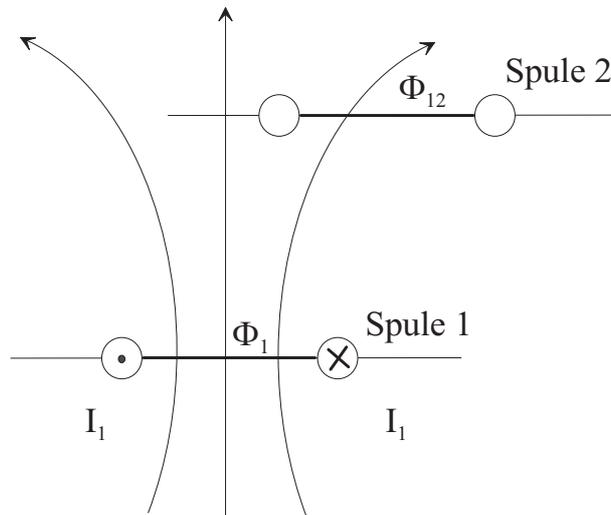


Abbildung 6.18: Gegeninduktion zweier Leiterschleifen.

Proportionalitätsfaktor derselben Größe erreicht wird. Es gilt somit:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{12} &= M_{12} I_1 \\
 \Phi_{21} &= M_{21} I_2 \\
 M_{12} &= M_{21} = M \quad \longrightarrow \quad \left[\frac{Vs}{A} = H \quad \dots \quad \text{Henry} \right]
 \end{aligned}
 \tag{6.38}$$

Betrachtet man hingegen die Verkopplung des Stromes I einer Schleife s und den durch diesen Strom hervorgerufenen Fluß Φ , der diese Schleife durchsetzt, so erhält man als Proportionalitätsfaktor den **Koeffizienten der Selbstinduktion** oder **Selbstinduktivitätskoeffizienten**, kurz auch die **Selbstinduktivität** L :

$$\Phi = L I; \longrightarrow L = \frac{\Phi}{I}.
 \tag{6.39}$$

Mit dieser Beziehung kann das Induktionsgesetz zu

$$u_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}
 \tag{6.40}$$

umgeschrieben werden. Liegen zeitlich veränderliche Verhältnisse vor, so kann bei Kenntnis dieser Koeffizienten jederzeit die induzierte Spannung in einer entsprechenden Anordnung angegeben werden.

6.8.5 Energie im Magnetfeld

Das magnetische Feld ist in der Lage Energie zu speichern. Schaltet man eine Spannungsquelle an zB. eine Spule, so wird, bedingt durch das Fließen des elektrischen Stromes teilweise elektrische Energie im magnetischen Feld gespeichert. Es zeigt sich, daß die Umwandlung von elektrischer Energie in magnetische Energie ein reversibler Vorgang ist. Das erkennt man, wenn man die Spannungsquelle abschaltet und an dessen Stelle eine kurzschließende Verbindung gibt. Nun wird das magnetische Feld nicht schlagartig zu Null werden. Bedingt durch die Abnahme des magnetischen Flusses durch das Wegschalten der Quelle wird ein negatives $\frac{d\Phi}{dt}$ entstehen. Dadurch wird eine Spannung induziert. Diese ergibt, nun über die kurzgeschlossene Spule einen Strom und die gespeicherte magnetische Energie wird wieder in elektrische Energie umgeformt. Zur quantitativen Beschreibung betrachte man einen Ausschnitt eines magnetischen Kreises mit einem Luftspalt. Im Luftspalt der Länge l_L sei ein homogener magnetischer Feldverlauf über

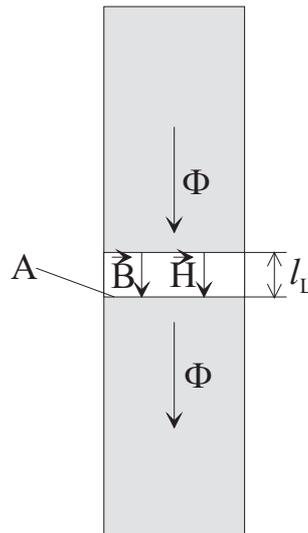


Abbildung 6.19: Zur magnetischen Energie.

den gesamten Querschnitt A gegeben. Damit können die Vektoren \vec{B} und \vec{H} als Skalare weiter behandelt werden. Der magnetische Fluß wird durch einen Strom $i(t)$ generiert. Ein größer werdender Strom $i(t)$ hat ein proportionales Feld $H(t)$ bzw. bei linearen Materialeigenschaften $B(t)$ zur Folge. Die in einem infinitesimalen Zeitintervall dt zugeführte elektrische Energie errechnet sich aus

$$dW = u(t) i(t) dt. \quad (6.41)$$

Mit dem Induktionsgesetz folgt

$$dW = i(t) N d\Phi = i(t) N A dB. \quad (6.42)$$

Über den Durchflutungssatz folgt die Beziehung

$$H l_L = i(t) N, \quad (6.43)$$

wodurch Gleichung ?? zu

$$dW = H l_L A dB = H V_L dB. \quad (6.44)$$

wird. Die Energiedichte dw kann daher durch

$$dw = \frac{dW}{V_L} = H dB. \quad (6.45)$$

dargestellt werden. Die magnetische Energiedichte w errechnet sich daraus durch

$$w = \int_0^{B_m} H dB. \quad (6.46)$$

Setzt man nun die Materialbeziehungen zwischen B und H ein, so ergibt sich

$$w = \frac{1}{2} H B = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{\mu}{2} H^2. \quad (6.47)$$

Integriert man die Energiedichte über das gesamte im Luftspaltvolumen V_L , so erhält man die in diesem Volumen gespeicherte magnetische Energie:

$$W = \int_{V_L} \left[\int_0^{B_m} H dB \right] dV. \quad (6.48)$$

Die Integration der magnetischen Energiedichte über das Volumen kann im vorliegenden Fall separiert durchgeführt werden. Entsprechend erhält man :

$$W = \frac{1}{2} \int_V H B dV = \frac{1}{2} \oint_{l_{mag.}} H dl \int_A B dA = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} I L I = \frac{L I^2}{2}. \quad (6.49)$$

7 Verhalten Passiver Bauelemente bei zeitharmonischen Vorgängen

7.1 Allgemeines

Das Verhalten der Bauelemente R , C und L im Falle zeitlich gleichbleibender elektrischer Größen (Gleichstrom/Gleichspannung) wurde bereits beschrieben. Hierbei wurde erläutert, daß der Kondensator C ein Bauteil zur Speicherung elektrischer Energie darstellt. Ein Maß dafür ist durch seinen Kapazitätswert (in *Farad*) gegeben. Betrachtet man dabei das Verhalten des elektrischen Stromes, so erkennt man, daß der Kondensator eine Unterbrechung darstellt. Im Gleichstromfalle fließt über den Kondensator kein Strom.

Ebenso wurde erkannt, daß eine Spule mit der Induktivität L ein Bauelement mit dem Vermögen zur Speicherung magnetische Energie ist. Ein Maß dafür ist dessen Induktivitätswert (in *Henry*). Im Gleichstromfall wird sich an der Spule kein Spannungsabfall einstellen. Sie stellt somit einen Kurzschluß dar.

Im Falle sich zeitlich ändernder Größen werden Kondensator und Spule ein wesentlich verändertes Verhalten aufweisen, welches im Folgenden diskutiert wird.

7.2 Der Ohm'sche Widerstand

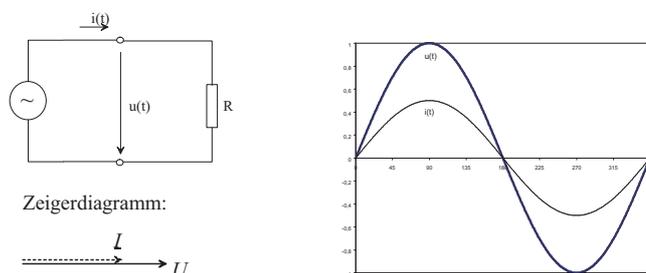


Abbildung 7.1: Ohmscher Widerstand an sinusförmiger Wechselspannungsquelle.

Gemäß dem Ohmschen Gesetz wird eine sinusförmige Spannung $u(t)$ (Abb. ??) der

Form

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) \quad (7.1)$$

an einem Ohmschen Widerstand R einen sinusförmigen Strom $i(t)$:

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t) = \frac{\hat{u}}{R} \sin(\omega t) \quad (7.2)$$

zur Folge haben. Der sich ergebende Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom ist immer Null. Im Zeigerdiagramm liegen der Strom- und Spannungszeiger in derselben Linie. Deren Längen sind durch den Widerstandswert R festgelegt.

An einem Ohmschen Widerstand sind Strom und Spannung immer in Phase!

Im Widerstand R wird lediglich elektrische Energie irreversibel in Wärmeenergie übergeführt. Der rein Ohmsche Widerstand R wird *Wirkwiderstand* oder *Resistanz*, bzw. dessen Kehrwert $G = 1/R$ Wirkleitwert oder Konduktanz genannt.

7.2.1 Die Wirkleistung

Der Zeitwert der Leistung $P(t)$ ergibt sich aus der Multiplikation

$$P(t) = u(t) i(t) = \hat{u} \sin(\omega t) \hat{i} \sin(\omega t) = \hat{u} \hat{i} \sin^2(\omega t). \quad (7.3)$$

In Abb. ?? ist dieser zeitliche Verlauf dargestellt. Die Summe der elektrischen Leistung

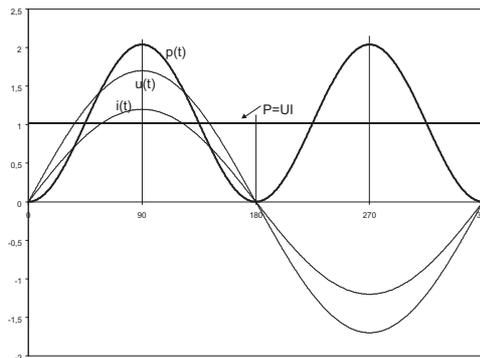


Abbildung 7.2: Leistung an einem Ohmschen Widerstand.

über eine Periode T ergibt die, in dieser Zeitspanne umgesetzte elektrische Energie:

$$W = \int_0^T u(t) i(t) dt = \int_0^T \hat{u} \sin(\omega t) \hat{i} \sin(\omega t) dt = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i} T = U I T. \quad (7.4)$$

Wiederum ist es sinnvoll, die mittlere Leistung, dh. die auf die Periode T bezogene Energieumsetzung, zu betrachten. Mit (??) folgt:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = UI. \quad (7.5)$$

Die so erhaltene **Wirkleistung** P entspricht also dem Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung. Setzt man in (??) das Ohmsche Gesetz verschiedentlich ein, folgt schlußendlich:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (7.6)$$

7.3 Die Induktivität

Es wird hier eine reine Induktivität behandelt. Der ohmsche Widerstand der Spulenwicklung wird dabei vernachlässigt. Wird entsprechend Abb. ?? an eine reine Induktivität

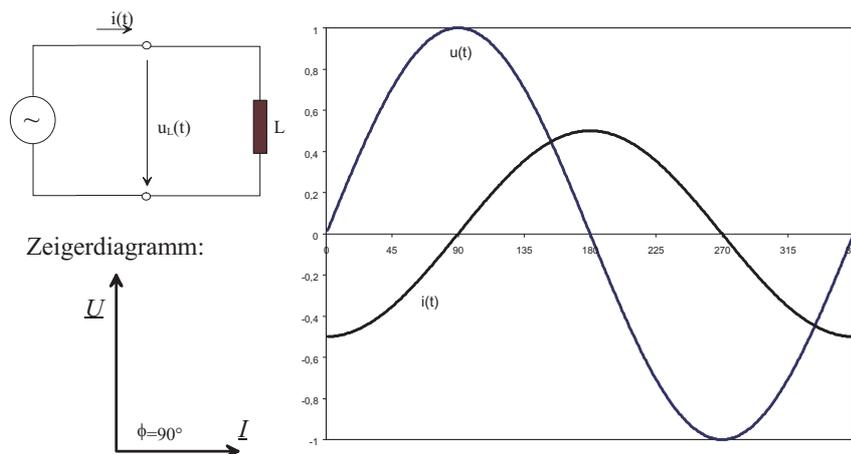


Abbildung 7.3: Strom und Spannung an einer reinen Induktivität.

eine Wechselquelle gelegt, so besteht zwischen Strom und Spannung der aus dem Induktionsgesetz abgeleitete Zusammenhang:

$$u_L = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (7.7)$$

Nimmt man willkürlich an, dass der zeitliche Verlauf des Stromes durch

$$i(t) = -\hat{i} \cos(\omega t) \quad (7.8)$$

beschrieben wird, so folgt mit (??) für die Spannung

$$u_L = L \frac{di(t)}{dt} = -L \hat{i} \frac{d \cos(\omega t)}{dt} = \omega L \hat{i} \sin(\omega t) = \hat{u} \sin(\omega t). \quad (7.9)$$

Zeichnet man den Verlauf von $u(t)$ und $i(t)$ in ein Liniendiagramm, so erkennt man, dass die Spannung zum Strom um 90° phasenverschoben sind.

An der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um 90° voraus!

Für die Zeigerdarstellung läßt sich der Strom durch

$$\underline{i} = \hat{i} e^{j\omega t} \quad (7.10)$$

darstellen. Damit folgt für die Spannung

$$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} = L \hat{i} \frac{d e^{j\omega t}}{dt} = j\omega L \hat{i} e^{j\omega t} = j\omega L \underline{i} \quad (7.11)$$

Unter der Annahme, dass der Stromzeiger in der reellen Achse liegt, folgt aus (??) für den Spannungszeiger eine Multiplikation mit j , womit die 90° Phasenverschiebung ebenfalls ersichtlich wird.

7.3.1 Der induktive Blindwiderstand

Dividiert die beiden rechten Ausdrücke in (??) durch $\sin(\omega t)$, so folgt:

$$\omega L \hat{i} = \hat{u}. \quad (7.12)$$

Formal kann wieder eine Proportionalität zwischen Strom und Spannung gefunden werden, indem man für

$$\omega L = X_L \quad - \frac{1}{X_L} = B_L \quad (7.13)$$

einführt. X_L wird als **induktiver Blindwiderstand oder induktive Reaktanz**, dessen Kehrwert als **induktiver Blindleitwert oder induktive Suszeptanz** bezeichnet. Es folgt somit, sowohl für die Scheitelwerte, als auch für die Effektivwerte (Division durch $\sqrt{2}$):

$$\hat{u} = X_L \hat{i} \quad U = X_L I \quad (7.14)$$

In komplexer Schreibweise folgt dementsprechend:

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I} \quad \underline{I} = \frac{1}{jX_L} \underline{U} = jB_L \underline{U} \quad (7.15)$$

7.3.2 Die induktive Blindleistung

Bildet man wiederum das Produkt aus $u(t)$ und $i(t)$ zu jedem Zeitpunkt, so ergibt der in Abb. ?? dargestellte Verlauf. Wiederum pulsiert der Zeitwert mit doppelter Frequenz.

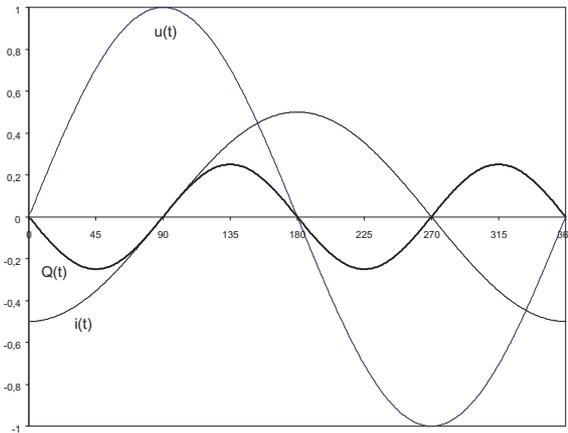


Abbildung 7.4: Leistung an einer Induktivität.

Die Flächen über der Zeitachse und unter der Zeitachse sind jedoch immer gleich groß. Je Viertelperiode nimmt die Induktivität alternierend Energie auf bzw. gibt diese wieder ab. Im Mittel über eine Periode ergibt sich keine Wirkleistung. P ist somit immer 0. Es wird keine Energie in Wärme umgewandelt. Als Unterscheidung zur Wirkleistung wird nun der Zeitwert der Leistung mit Q , der Blindleistung bezeichnet.

Für die Blindleistung ergibt sich, analog zur Wirkleistung P beim ohmschen Widerstand:

$$Q = UI = I^2 X_L = -U^2 B_L \quad [\text{Einheit : var(VoltAmpereReaktanz)}] \quad (7.16)$$

7.4 Der Kondensator

Wiederum wird ein reiner Kondensator betrachtet. Im Inneren des Kondensators befindet sich somit ein ideales (=elektrisch nichtleitendes) Dielektrikum. Die Strom- Spannungsverhältnisse sind in Abb. ?? dargestellt. Ausgehend von der für Gleichstrom gülti-

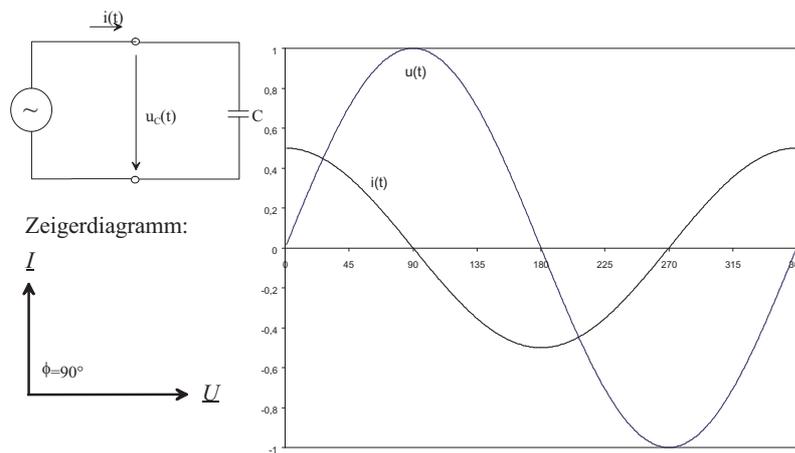


Abbildung 7.5: Strom und Spannung am Kondensator.

gen Beziehung

$$Q = CU, \quad (7.17)$$

kann für zeitlich veränderliche Vorgänge die differentielle Ladungsänderung $dq(t)$ zu

$$dq(t) = Cdu(t) \quad (7.18)$$

geschrieben werden. Die Ladung ist immer das Produkt aus Strom und Zeit, sodass aus (??)

$$dq(t) = i(t)dt = Cdu(t) \quad \text{bzw.} \quad i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (7.19)$$

folgt. Die Spannung am Kondensator sei nun durch

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) \quad (7.20)$$

gegeben. Mit (??) folgt für den Strom

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C\hat{u} \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \omega C \hat{u} \cos(\omega t) = \hat{i} \cos(\omega t). \quad (7.21)$$

Ein sinusförmiger Verlauf der Spannung am Kondensator hat daher einen cosinusförmigen Verlauf des Stromes durch denselben zur Folge (vgl. Abb. ??).

Am Kondensator eilt der Strom der Spannung um 90° voraus!

Für die komplexe Zeigerdarstellung folgt:

$$\underline{u} = \hat{u}e^{j\omega t}. \quad (7.22)$$

Mit (??) folgt daraus

$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = C \hat{u} \frac{e^{j\omega t}}{dt} = j\omega C e^{j\omega t} = j\omega C \underline{u}. \quad (7.23)$$

Legt man den Spannungszeiger in die reelle Achse, so ergibt sich für den Stromzeiger durch die Multiplikation mit j eine Phasenverschiebung um 90° , bzw. eine Drehung in die positive imaginäre Achse.

7.4.1 Der kapazitive Blindwiderstand

In Effektivwerten lautet diese Gleichung

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U} \quad \text{bzw.} \quad \underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}. \quad (7.24)$$

Die Proportionalität zwischen Strom und Spannung erfolgt wiederum über den Blindwiderstand:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad \text{bzw.} \quad B_C = -\frac{1}{X_C} = \omega C. \quad (7.25)$$

Mit dem kapazitiven Blindwiderstand X_C bzw. dem kapazitiven Blindleitwert B_C lässt sich (??) zu

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I} = j X_C \underline{I}. \quad (7.26)$$

7.4.2 Die kapazitive Blindleistung

Aus dem Produkt von $u(t)$ mit $i(t)$ ergibt sich der nachfolgend dargestellte Verlauf. Die mittlere Leistung ist auch in diesem Falle Null, sodass keine Wirkleistung entsteht ($P = 0$). Es gibt auch hier nur Blindleistung. Diese schwingt wiederum mit doppelter Frequenz, jedoch entgegengesetzt der Blindleistung bei der Induktivität. Für die Blindleistung am Kondensator folgt demgemäß:

$$Q = -UI = I^2 X_C = -U^2 B_C \quad [\text{Einheit : var(Volt Ampere Reaktanz)}]. \quad (7.27)$$

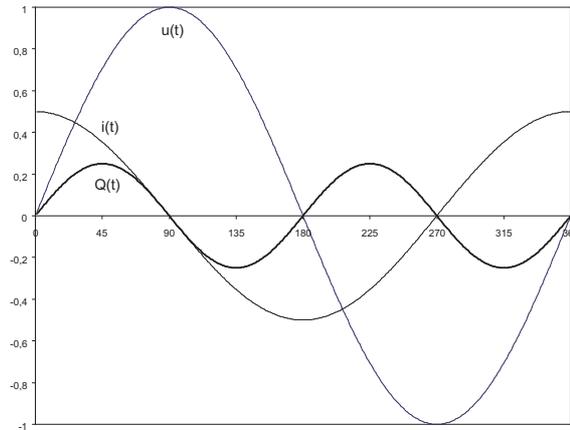


Abbildung 7.6: Leistung an einem Kondensator.

7.5 Zusammenschaltung von passiven Bauelementen

Bisher wurden die Bauelemente R , L und C als ideale Bauelemente behandelt. Im Allgemeinen werden dies Bauelemente jedoch in gemischter Zusammenschaltung vorkommen. In diesem Abschnitt werden nun derartige Zusammenschaltungen behandelt.

7.5.1 Die Impedanz

Man betrachte zunächst die Zusammenschaltung eines ohmschen Widerstandes R mit einer Spule der Induktivität L , welche von einer sinusförmigen Spannungsquelle gespeist wird (Abb. ??). Infolge der Serienschaltung von R mit L wird der sich einstellende Strom

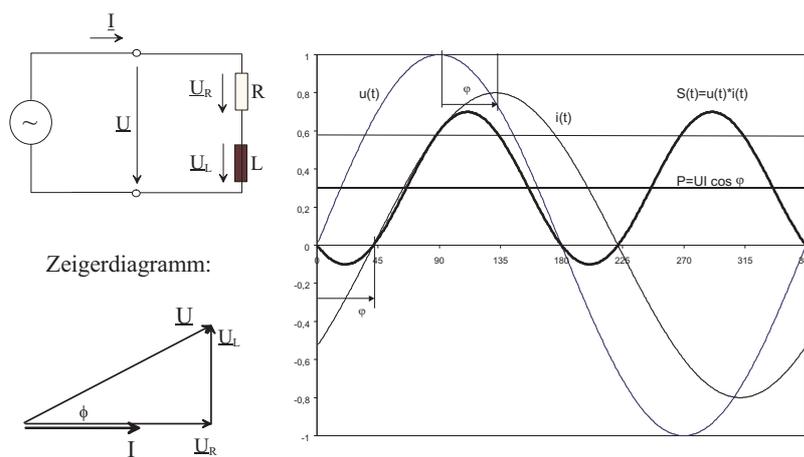


Abbildung 7.7: Serienschaltung von R und L .

\underline{I} durch den Wirkwiderstand R und dem Blindwiderstand X_L begrenzt. Der gesamte wirksame Widerstand wird als Scheinwiderstand oder Impedanz Z bezeichnet. Z ist im allgemeinen eine komplexe Größe.

$$\underline{Z} = R + j\omega L = Z e^{j\varphi} \quad [Ohm]. \quad (7.28)$$

mit

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}. \quad (7.29)$$

Für den Strom \underline{I} folgt daraus:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L}. \quad (7.30)$$

Zur Zeichnung des komplexen Zeigerdiagrammes beginnt man immer mit der gemeinsamen Größe. Bei obiger Serienschaltung ist dies der Strom \underline{I} . Diesen legt man in die reelle Achse. Als nächstes zeichnet man den Spannungsabfall über dem ohmschen Widerstand R ein. Der zeiger \underline{U}_R liegt in Phase mit dem Strom \underline{I} . Dessen Länge ergibt sich aus

$$U_R = R I. \quad (7.31)$$

An dessen Spitze wird anschließend der Spannungszeiger \underline{U}_L gezeichnet. Dessen Richtung ist auch bekannt, da man weiss, dass die Spannung an der Induktivität um 90° voreilt. Die Länge des Zeigers \underline{U}_L ergibt sich aus

$$U_L = \omega L I. \quad (7.32)$$

Damit folgt die Gesamtspannung \underline{U} aus der geometrischen Summe beider Spannungsabfälle. der sich einstellende Phasenwinkel ist mit φ bereits bestimmt.

7.5.2 Die auftretenden Leistungen

Aus dem Zeigerdiagramm ersieht man eine Vorauseilung der Spannung $u(t)$ gegenüber dem Strom $i(t)$. Demgemäß gilt für die Zeitfunktionen:

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t) \quad \text{bzw.} \quad i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi). \quad (7.33)$$

Die Bildung des Zeitwertes der Leistung führt zu

$$S(t) = u(t) i(t) = \hat{u} \hat{i} \sin(\omega t) \sin(\omega t + \varphi); \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)). \quad (7.34)$$

Durch Anwendung trigonometrischer Beziehungen lässt sich dies zu

$$S(t) = \frac{\hat{u}\hat{i}}{2} [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) \quad (7.35)$$

umformen. Das Produkt der Effektivwerte aus U und I wird als Scheinleistung S definiert:

$$S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z}. \quad (7.36)$$

Diskutiert man Gleichung (??), so ersieht man darin einen von der Zeit t unabhängigen Term. Dieser Anteil entspricht der verrichteten Wirkleistung P :

$$P = UI \cos \varphi = S \cos \varphi. \quad (7.37)$$

Der Ausdruck $\cos \varphi$ wird als Leistungsfaktor oder Wirkfaktor bezeichnet. Der zweite Ausdruck in (??) ist jener Leistungsanteil welcher mit doppelter Frequenz schwingt. Das Mittel über eine Periode ist Null. Dieser Anteil entspricht der Blindleistung Q im System. Nach Anwendung eines weiteren trigonometrischen Additionstheorems folgt dafür:

$$Q = UI \sin \varphi = S \sin \varphi. \quad (7.38)$$

$\sin \varphi$ wird darin als Blindleistungsfaktor bezeichnet. Quadriert und addiert man anschließend die beiden Gleichungen (??) und (??), so erhält man wegen $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (7.39)$$

Aus der komplexen Schreibweise folgt

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = UI e^{j\varphi} = P + jQ. \quad (7.40)$$

Auch mit den Zeigern P und Q kann somit ein Zeigerdiagramm in der komplexen Zahlenebene erstellt werden:

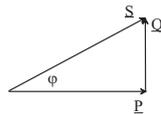


Abbildung 7.8: Leistungsdiagramm.

7.5.3 Parallelschaltung von R und C

Man betrachte nachfolgend die Zusammenschaltung eines ohmschen Widerstandes R mit einem Kondensator C (Abb. ??). Der Gesamtwiderstand der Schaltung entspricht

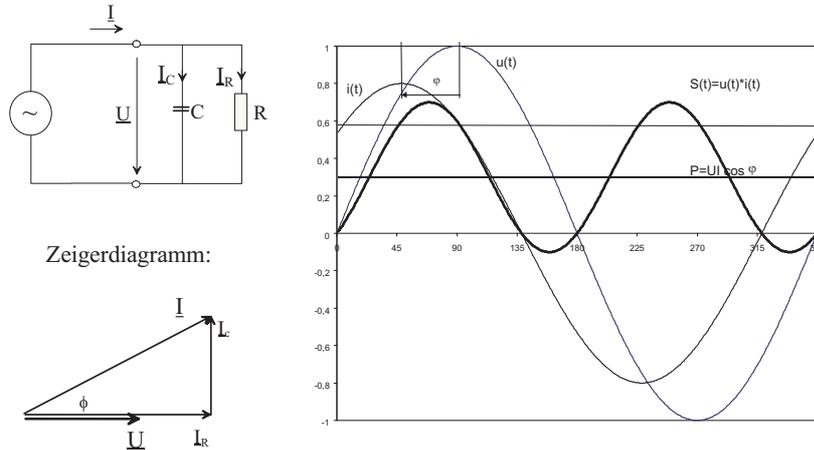


Abbildung 7.9: Parallelschaltung von R und C .

einer Parallelschaltung von R mit X_C , sodass für die Impedanz \underline{Z}

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{j\omega C + 1} = \frac{R}{1 + (j\omega CR)^2} = \text{Re}\underline{Z} + j\text{Im}\underline{Z} \quad (7.41)$$

folgt. Der Winkel ergibt sich aus

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}\underline{Z}}{\text{Re}\underline{Z}}\right). \quad (7.42)$$

Mit dem Betrag von \underline{Z}

$$Z = \sqrt{(\text{Re}\underline{Z})^2 + (\text{Im}\underline{Z})^2} \quad (7.43)$$

folgt für \underline{Z} :

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}. \quad (7.44)$$

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist wieder durch

$$\underline{U} = \underline{I}\underline{Z} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{Z} e^{-j\varphi}. \quad (7.45)$$

gegeben. Für die Zeichnung des Zeigerdiagramms beginnt man wieder mit der gemeinsamen Größe, in diesem Falle mit der Spannung \underline{U} . Die Teilströme I_R und I_C sind dazu entsprechend phasenverschoben. Für die Leistungsbetrachtungen gelten dieselben Beziehungen wie vorher.

7.5.4 Blindstromkompensation

Ziel der Blindstromkompensation ist es, den einem Verbraucher zuzuführenden Strom auf den Wirkanteil zu reduzieren. Dadurch können die Ohm'schen Verluste entlang der Zuleitungen minimiert werden.

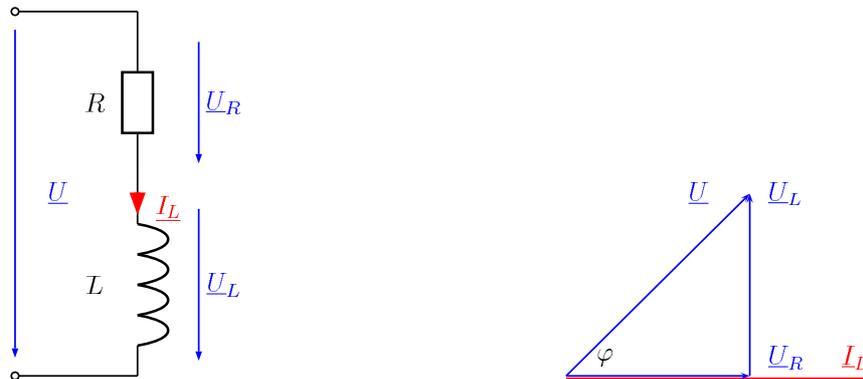


Abbildung 7.10: Zur Blindstromkompensation, ohmsch-induktive Last.

In Abb. ?? ist eine ohmsch-induktive Schaltung dargestellt. Aus dem Zeigerdiagramm ersieht man ein Voreilen der Spannung \underline{U} gegenüber dem Strom \underline{I}_L . Der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ dieser Konfiguration ergibt sich aus dem Winkel φ zwischen Strom und Spannung.

Schaltet man nun einen Kondensator beispielsweise parallel zu dieser Anordnung, so ergeben sich die nachfolgend dargestellten Verhältnisse. Der Winkel φ zwischen Strom

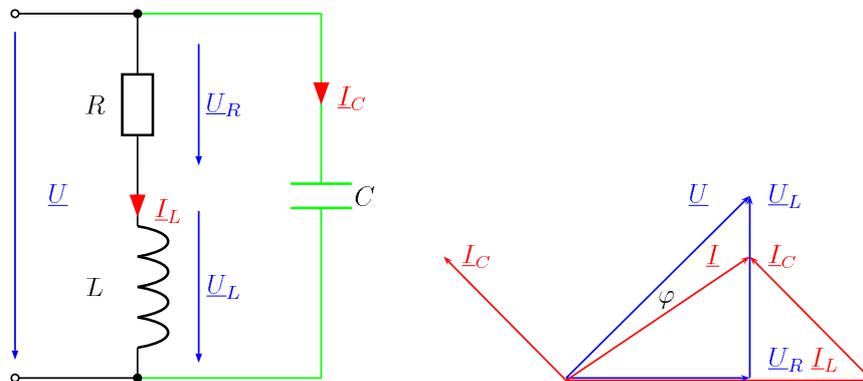


Abbildung 7.11: Blindstromkompensation, unvollständige Kompensation.

und Spannung ist deutlich geringer geworden. Auch die Länge des Stromzeigers \underline{I} hat sich verringert, wodurch sich die Leitungsverluste ($\sim I^2$) entsprechend verringern.

Im Falle einer vollständigen Kompensation werden Strom und Spannung in Phase sein ($\varphi = 0$). Die Schaltung verhält sich dann wie ein Ohm'scher Widerstand. Die Bedin-

gung für vollständige Kompensation erhält man, indem man die Impedanz \underline{Z} allgemein darstellt und anschließend deren Imaginärteil Null setzt.

7.5.5 Leistungsanpassung

In Abb. ?? ist ein allgemeines Netzwerk für zeitharmonische Größen dargestellt. Es besteht aus einer realen Spannungsquelle mit der Quellspannung \underline{U}_q , einer Quellenimpedanz \underline{Z}_q (vergleichbar mit dem Innenwiderstand R_i im Gleichstromfalle) sowie einer Impedanz \underline{Z} , welche die Last darstellt.

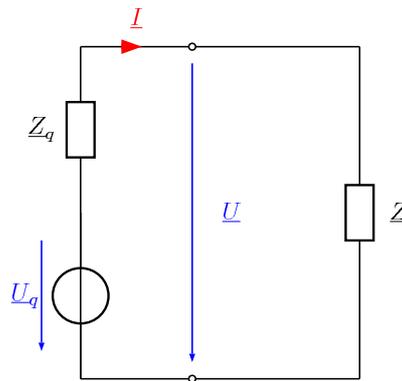


Abbildung 7.12: Leistungsanpassung.

Es gilt nun die Bedingungen zu finden, bei welchen die Leistung an der Last ein Maximum erreicht. Für Quellenimpedanz und für Lastimpedanz gilt:

$$\underline{Z}_q = R_q + j X_q, \quad \underline{Z} = R + j X \quad (7.46)$$

Damit lässt sich der Strom \underline{I} durch

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z} + \underline{Z}_q} \quad (7.47)$$

ausdrücken. Die Wirkleistung an der Last kann mit dem Realteil der Last-Impedanz folgend ausgedrückt werden:

$$P = I^2 \operatorname{Re}(\underline{Z}). \quad (7.48)$$

Setzt man für den Betrag des Stromes aus Gleichung ?? ein, ergibt sich:

$$P = |\underline{U}_q|^2 \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{|\underline{Z} + \underline{Z}_q|^2} = U_q^2 \frac{R}{(R + R_q)^2 + (X + X_q)^2} \quad (7.49)$$

Die Leistung am Verbraucher wird dann maximal, wenn die Bedingungen

$$R_q = R \quad (7.50)$$

$$X_q = -X \quad (7.51)$$

gelten. Damit folgt für Leistungsanpassung im Wechselstromfalle:

$$R + j X = R_q - j X_q \quad (7.52)$$

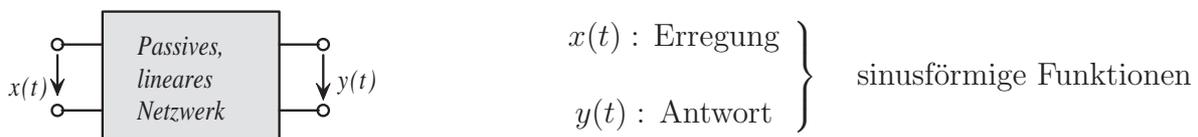
$$\underline{Z}_{max} = \underline{Z}_q^* \quad (7.53)$$

8 Die Frequenzabhängigkeit passiver Schaltungen

8.1 Allgemeines

In sehr vielen praktischen Fällen ist das Verhalten eines $R - L - C$ -Netzwerkes bei unterschiedlichen Frequenzen interessant. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten der Darstellung. Allen ist dabei gemeinsam, dass aus der Darstellungsform über einen sehr großen Frequenzbereich (einige Hz bis in den GHz-Bereich) sowohl der Amplitudenverlauf als auch der Phasenverlauf ablesbar sind.

8.2 Übertragungsfunktion und Bode-Diagramm



Komplexe Effektivwerte: $\underline{X}, \underline{Y}$

Das Verhältnis $\underline{F} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$ hängt nur von der Struktur des Netzwerkes und von der Frequenz ab: Zwischen den komplexen Effektivwerten des Stromes und der Spannung jedes einzelnen Zweipols besteht eine lineare, algebraische Beziehung. Die Koeffizienten hängen von $j\omega$ ab. Die Funktion $\underline{F}(j\omega)$ ist die **Übertragungsfunktion** des Netzwerkes. Ist die Übertragungsfunktion bekannt, so kann die Antwort auf eine beliebige Erregung einfach bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \text{z.B.: } x(t) &= \sqrt{2}X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \\ \underline{X} &= X_0 e^{j\varphi_x} \end{aligned}$$

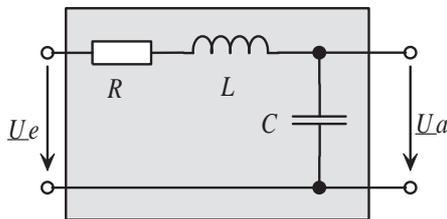
$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{F}(j\omega_0) \underline{X} = Y_0 e^{j\varphi_y} \\ Y_0 &= |\underline{F}(j\omega_0)| X_0, \quad \varphi_y = \varphi_x + \arg(\underline{F}(j\omega_0)) \\ y(t) &= \sqrt{2}Y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_y) \end{aligned}$$

Da die Impedanzen und Admittanzen der Elemente R , L und C gebrochene rationale Funktionen von $j\omega$ sind und die Übertragungsfunktion durch Addition, Multiplikation und Division von Impedanzen und Admittanzen erstellt wird, ist die Übertragungsfunktion selbst auch eine gebrochene rationale Funktion von $j\omega$:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + a_3(j\omega)^3 + \dots + a_m(j\omega)^m}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + b_3(j\omega)^3 + \dots + b_n(j\omega)^n} = \frac{\underline{Z}(j\omega)}{\underline{N}(j\omega)}.$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ des Zählerpolynoms $\underline{Z}(j\omega)$ und $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ des Nennerpolynoms $\underline{N}(j\omega)$ sind reelle Konstanten.

Beispiel:



$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} = \frac{\underline{Z}(j\omega)}{\underline{N}(j\omega)}. \end{aligned}$$

Die Darstellungen der Übertragungsfunktion können im Pol-Nullstellen-Plan (PN-Plan) oder im Bode-Diagramm erfolgen.

Das Bode-Diagramm ist die graphische Darstellung der Übertragungsfunktion (??).

$$\underline{F}(j\omega) = |\underline{F}(j\omega)| e^{j \arg(\underline{F}(j\omega))}. \quad (8.1)$$

Das Bode-Diagramm besteht aus zwei Abbildungen. In der einen wird der Amplitudenverlauf über der Frequenz aufgetragen. Diese Abbildung wird auch als **Amplitudengang** bezeichnet. In einer zweiten Abbildung wird die Phasenverschiebung über der Frequenz aufgetragen, dem **Phasengang** entsprechend. Der zu überstreichende Frequenzbereich ist allgemein sehr groß. Ein linearer Maßstab für die Frequenz ist daher wenig sinnvoll. Sowohl für den Amplitudengang als auch für den Phasengang wird die Frequenz auf der horizontalen Achse im logarithmischen Maß aufgetragen. Somit entspricht der Abstand von beispielsweise 10 Hz auf 100 Hz gleich viele cm am Papier wie der Abstand zwischen 100 kHz und 1 MHz. Beim Amplitudengang hat sich als zweckmäßig erwiesen, auch den Amplitudenwert im logarithmischen Maß aufzutragen.

Im zweiten Diagramm wird die Phase der Übertragungsfunktion ($\arg(\underline{F}(j\omega))$) über der Frequenz aufgetragen, dem **Phasengang** entsprechend.

Falls alle Pole und Nullstellen reell sind, kann die Übertragungsfunktion in folgende Form umgewandelt werden:

$$\underline{F}(j\omega) = K \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{m_1} \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_1}\right) \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_2}\right) \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_3}\right) \dots \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_{m-m_1}}\right)}{\left(\frac{j\omega}{\Omega_0}\right)^{n_1} \left(1 + \frac{j\omega}{\Omega_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\Omega_2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{\Omega_3}\right) \dots \left(1 + \frac{j\omega}{\Omega_{n-n_1}}\right)}.$$

Die Frequenzen $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{m-m_1}$ und $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_{n-n_1}$ sind positiv reell. Im Zähler gilt das positive Vorzeichen, falls die Nullstelle negativ ist und umgekehrt. Der Betrag wird logarithmisch in **Dezibel [dB]**, gemäß nachfolgender Definition, dargestellt.

$$|\underline{F}(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |\underline{F}(j\omega)|.$$

Entsprechend der Rechenregeln für die logarithmische Funktion können sowohl Betrag als auch Phase als Summe von linearen Termen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 |\underline{F}(j\omega)|_{dB} &= \underbrace{|K|}_{\underline{E}_1(j\omega)}_{dB} + \underbrace{\left| \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{m_1} \right|}_{\underline{E}_2(j\omega)}_{dB} \\
 &+ \underbrace{\left| \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_1} \right) \right|}_{\underline{E}_4(j\omega)}_{dB} + \underbrace{\left| \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_2} \right) \right|}_{dB} + \dots + \underbrace{\left| \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_{m-m_1}} \right) \right|}_{dB} \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{\left| \left(\frac{j\omega}{\Omega_0} \right)^{n_1} \right|}}_{\underline{E}_3(j\omega)}_{dB} + \underbrace{\frac{1}{\left| \left(1 + \frac{j\omega}{\Omega_1} \right) \right|}}_{\underline{E}_5(j\omega)}_{dB} + \dots + \frac{1}{\left| \left(1 + \frac{j\omega}{\Omega_{n-n_1}} \right) \right|}_{dB}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \arg \underline{F}(j\omega) &= \arg(K) + \arg \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{m_1} + \arg \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_1} \right) + \dots + \arg \left(1 \pm \frac{j\omega}{\omega_{m-m_1}} \right) \\
 &+ \arg \left(\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\Omega_0} \right)^{n_1}} \right) + \arg \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\Omega_1}} \right) + \dots + \arg \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\Omega_{n-n_1}}} \right).
 \end{aligned}$$

Es reicht, die folgenden 5 charakteristischen Terme eingehend zu behandeln:

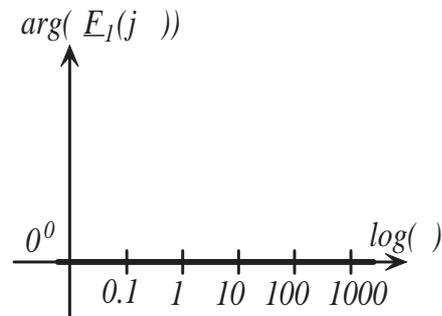
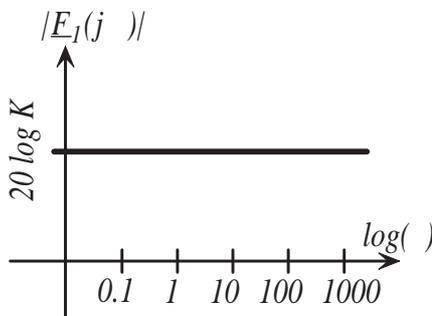
$$\underline{E}_1(j\omega) = K, \quad \underline{E}_2(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{m_1}, \quad \underline{E}_3(j\omega) = \left(\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\Omega_0} \right)^{n_1}} \right)$$

$$\underline{E}_4(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_1}, \quad \underline{E}_5(j\omega) = \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\Omega_1}} \right)$$

- $\underline{E}_1(j\omega)$:

$$|\underline{E}_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log K$$

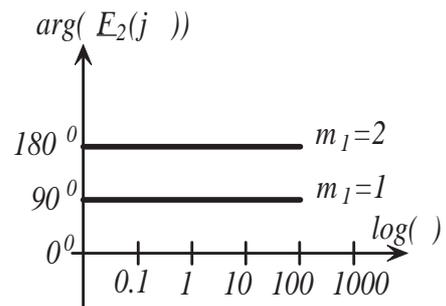
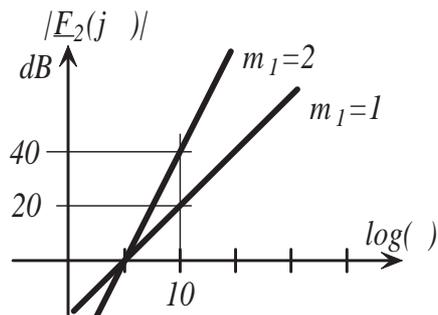
$$\arg(\underline{E}_1(j\omega)) = 0^\circ$$



- $\underline{F}_2(j\omega)$:

$$\begin{aligned} |\underline{F}_2(j\omega)|_{dB} &= 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{m_1} \\ &= 20 \log \omega^{m_1} - 20 \log \omega_0^{m_1} = \\ &= m_1 20 \log \omega - m_1 20 \log \omega_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(\underline{F}_2(j\omega)) &= m_1 90^\circ \\ -180^\circ &\leq \arg(\underline{F}_2(j\omega)) \leq 180^\circ \end{aligned}$$

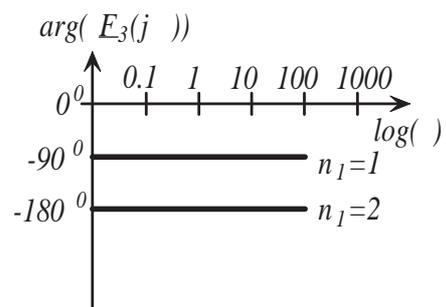
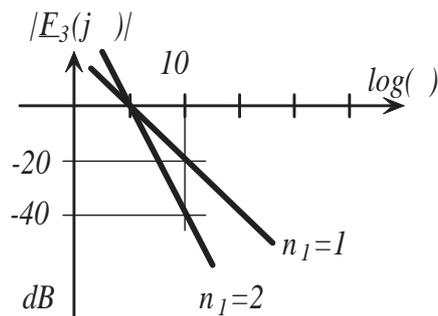


Gerade mit einer Steigung von m_1 mal 20 dB je Dekade. Bei $\omega = \omega_0$ ist $\underline{F}_2(j\omega) = 0$ dB.

- $\underline{F}_3(j\omega)$:

$$\begin{aligned} |\underline{F}_3(j\omega)|_{dB} &= 20 \log \left(\frac{\Omega_0}{\omega} \right)^{n_1} \\ &= 20 \log \Omega_0^{n_1} - 20 \log \omega^{n_1} = \\ &= n_1 20 \log \Omega_0 - n_1 20 \log \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(\underline{F}_3(j\omega)) &= n_1 \cdot (-90^\circ) \\ -180^\circ &\leq \arg(\underline{F}_3(j\omega)) \leq 180^\circ \end{aligned}$$



Gerade mit einer Steigung von n_1 mal -20 dB je Dekade. Bei $\omega = \Omega_0$ ist $\underline{F}_3(j\omega) = 0$ dB.

- $\underline{F}_4(j\omega)$:

$$|\underline{F}_4(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$$\arg(\underline{F}_4(j\omega)) = \arctan \frac{\omega}{\omega_1}$$

Näherung für $\omega \ll \omega_1$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \approx 1 \Rightarrow 20 \log 1 = 0dB$$

Näherung für $\omega \ll \omega_1$:

$$\arctan \frac{\omega}{\omega_1} \approx 0^\circ$$

Näherung für $\omega \gg \omega_1$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \approx \frac{\omega}{\omega_1}$$

Näherung für $\omega \gg \omega_1$:

$$\arctan \frac{\omega}{\omega_1} \approx 90^\circ$$

$$\Rightarrow 20 \log \frac{\omega}{\omega_1} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_1 |_{dB}$$

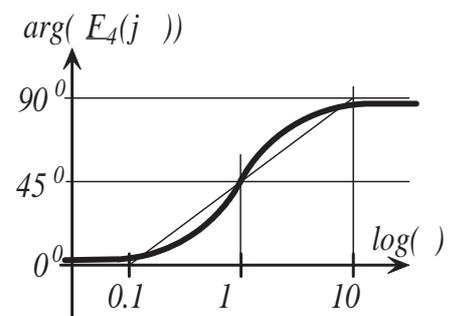
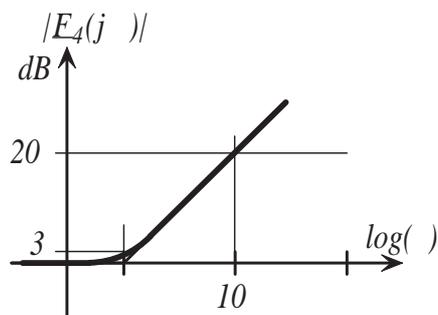
$\omega = \omega_1$:

$\omega = \omega_1$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 20 \log \sqrt{2} = 10 \log 2 \approx 3 |_{dB}$$

$$\arctan \frac{\omega}{\omega_1} = \arctan 1 = 45^\circ$$



Anstelle der genauen Kurven werden Näherungen durch Geradenstücke verwendet. Dies erleichtert die Addition der Kurven wesentlich.

- $\underline{F}_5(j\omega)$:

$$\begin{aligned} |\underline{F}_5(j\omega)|_{dB} &= 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2}} \\ &= -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\arg(\underline{F}_5(j\omega)) = -\arctan \frac{\omega}{\Omega_1}$$

Näherung für $\omega \ll \Omega_1$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2} \approx 1 \Rightarrow -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Näherung für $\omega \ll \Omega_1$:

$$-\arctan \frac{\omega}{\Omega_1} \approx 0^\circ$$

Näherung für $\omega \gg \Omega_1$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2} \approx \frac{\omega}{\Omega_1}$$

Näherung für $\omega \gg \Omega_1$:

$$-\arctan \frac{\omega}{\Omega_1} \approx -90^\circ$$

$$\Rightarrow -20 \log \frac{\omega}{\Omega_1} = 20 \log \Omega_1 - 20 \log \omega|_{dB}$$

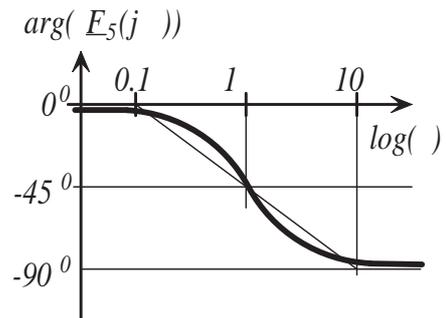
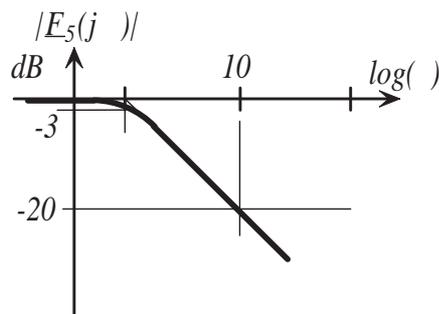
$\omega = \Omega_1$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_1}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$\omega = \Omega_1$:

$$-\arctan \frac{\omega}{\Omega_1} = -\arctan 1 = -45^\circ$$

$$\Rightarrow -20 \log \sqrt{2} = -10 \log 2 \approx -3|_{dB}$$

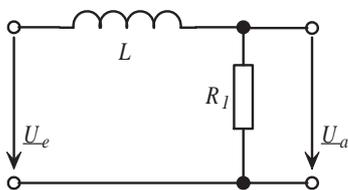


Vertiefendes Beispiel:

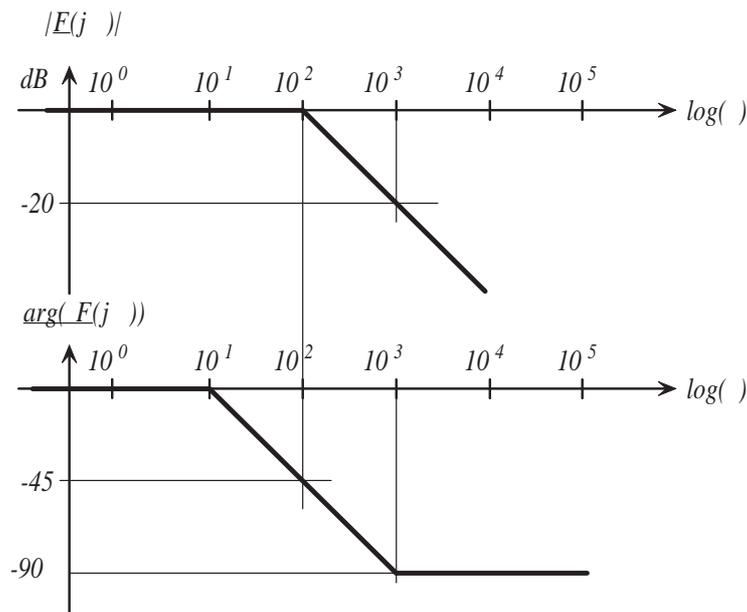
a) Mit den Bauteilen $R_1 = 10 \Omega$ und $L = 100 \text{ mH}$ soll ein Tiefpass entworfen werden (lässt vorzugsweise tiefe Frequenzen durch). Finden Sie die Übertragungsfunktion und zeichnen Sie das Bode-Diagramm.

b) In einem zweiten Schritt soll mit den Bauelementen $R_2 = 10 \Omega$ und $C = 10 \text{ mF}$ ein Hochpass gefunden werden. Finden Sie auch für diesen die Schaltung entwickeln Sie die Übertragungsfunktion.

ad a) Tiefpass:

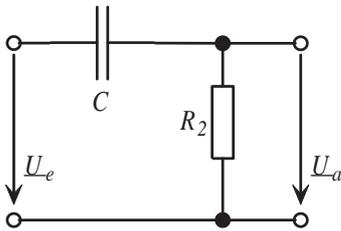


$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1}{R_1 + j\omega L} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\frac{R_1}{L}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\Omega_1}} \Rightarrow \Omega_1 = \frac{R_1}{L} = \frac{10}{0.1} \\ &\Omega_1 = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]} \end{aligned}$$



Bode-Diagramm für den Tiefpass, angenähert durch Geradenstücke.

ad b) Hochpass:



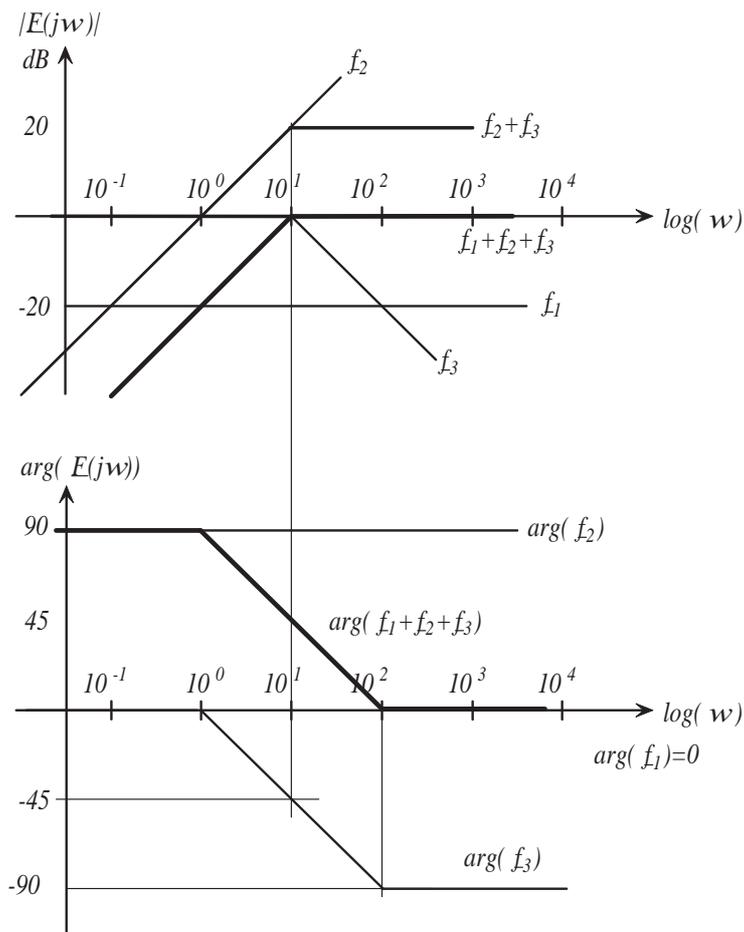
$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2 j\omega C}{1 + R_2 j\omega C} \\ &= R_2 C \frac{(j\omega)^1}{1 + \frac{j\omega}{\frac{1}{R_2 C}}} = K \frac{(j\omega)^1}{1 + \frac{j\omega}{\Omega_2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = R_2 C = 10 \cdot 0.01 = 0.1 \quad 20 \log(0.1) = -20 \text{ dB}$$

$$(j\omega)^1 = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{m_1} \Rightarrow \omega_0 = 1 [\text{s}^{-1}], m_1 = 1$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{R_2 C} = \frac{1}{10 \cdot 0.01} = 10 [\text{s}^{-1}]$$

$$\underline{f}_1 = K; \quad \underline{f}_2 = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{m_1}; \quad \underline{f}_3 = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\Omega_2}}$$

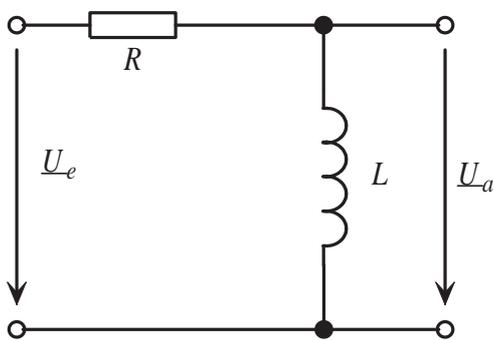


8.3 Beispiele

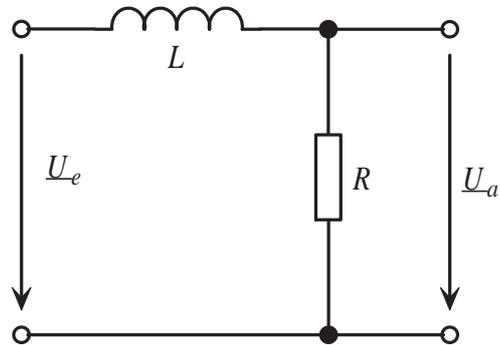
Stellen Sie die Übertragungsfunktionen nachfolgend abgebildeter Schaltungen auf. Zeichnen Sie dazu jeweils Amplituden- und Phasengang auf. Durch die Hintereinanderschaltung welcher Schaltungen kann man einen Bandpaß bzw. eine Bandsperre erreichen? Folgende Bauteilwerte sind gegeben:

$$R = 10\ \Omega, \quad L = 15.9155\ \text{mH}, \quad C = 15.9155\ \mu\text{F}.$$

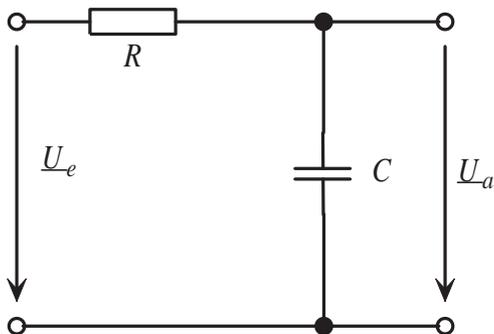
1. R und L Schaltung



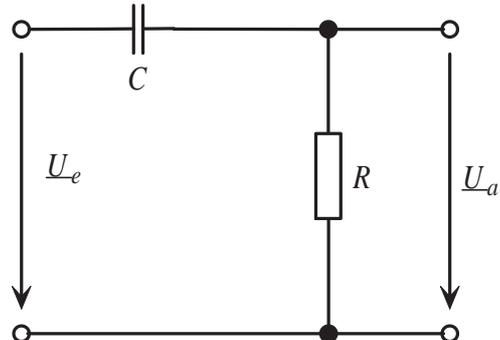
2. L und R Schaltung



3. R und C Schaltung



4. C und R Schaltung



9 Messung elektrischer Größen

9.1 Die Messung von Strom, Spannung und Leistung

Ein Meßgerät, welches zur Messung elektrischer Ströme geeignet ist, bezeichnet man als Strommesser oder Amperemeter, jene Instrumente zur Messung elektrischer Spannungen werden als Spannungsmesser oder Voltmeter, Instrumente zur Messung elektrischer Leistung als Leistungsmesser oder Wattmeter bezeichnet. Die prinzipielle Wirkungsweise eines Strom-, Spannungs- bzw. Leistungsmessers beruht in der Kraftwirkung eines stromdurchflossenen Leiters in einem Magnetfeld. Im Allgemeinen müssen sowohl Gleich- als auch Wechselgrößen gemessen werden. Für die unterschiedlichen Größen (Gleichwert, zeitlicher Mittelwert, Effektivwert, Scheitelwert) müssen verschiedene Bauarten von Meßgeräten herangezogen werden.

9.1.1 Drehspul- und Dreheisenmeßwerk

In der nachfolgenden Abbildung ist die prinzipielle Anordnung eines Drehspul- und eines Dreheisenmeßwerkes dargestellt. Beim Drehspulmeßwerk erfolgt die Erzeugung eines

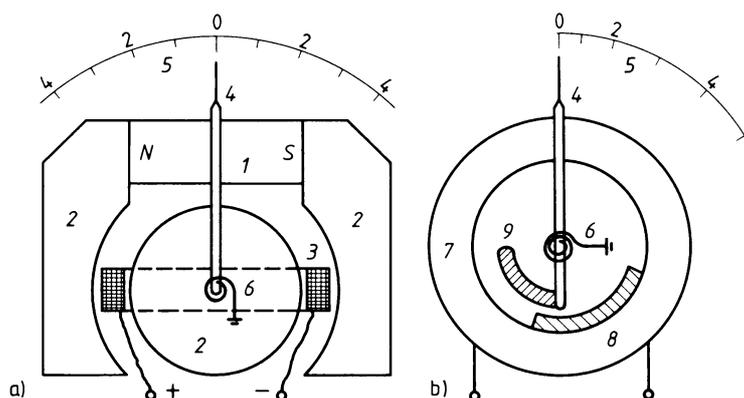


Abbildung 9.1: a) Drehspulmeßwerk b) Dreheisenmeßwerk.

magnetischen Gleichfeldes mittels eines Dauermagneten (1) im ansonsten weichmagnetischen Eisenkreis. Zwischen Eisenkern (2) und den Polschuhen (2) befindet sich eine

drehbar gelagerte Spule (3). Diese ist mit einem Zeiger (4) fest verbunden. Erfolgt nun ein Stromfluß (der Meßstrom) durch die Drehspule, so ergibt sich, abhängig von dessen Stromflußrichtung ein Ausschlag auf der Skala (5). Der Drehwinkel ist, da die magnetische Induktion B konstant ist (Dauermagnet), proportional dem durch die Spule fließenden Strom.

$$\alpha \sim I. \tag{9.1}$$

Infolge der Stromrichtungsabhängigkeit des Zeigerausschlages kann auch die Stromflußrichtung in einem Netzwerk ermittelt werden. Dieses Meßwerk ist für die Messung von Wechselgrößen ungeeignet.

Beim Dreheisenmeßwerk wird eine Zylinderspule (8) von einem Meßstrom durchflossen. Durch das entstehende Magnetfeld im inneren der Spule werden die beiden Eisenteile (8 und 9) gleichsinnig magnetisiert. Es kommt zu einer abstoßenden Kraftwirkung zwischen diesen beiden Eisenteilen. Das Eisenblech (9) ist drehbar gelagert und mit einem Zeiger verbunden. Der Drehwinkel ist vom Magnetfeld B und vom Strom I abhängig. Da das erzeugte Magnetfeld B jedoch auch dem Strom I proportional ist, ist der Drehwinkel diesem quadratisch proportional.

$$\alpha \sim I^2. \tag{9.2}$$

Das Magnetfeld und der Meßstrom werden bei Wechselgrößen dabei immer in gleichbleibender Weise ihre Richtung ändern, sodaß die abstoßende Wirkung immer gleichgerichtet sein wird. Mit diesem Meßwerk können demgemäß auch Wechselgrößen gemessen werden.

9.1.2 Elektrodynamisches Meßwerk

Ein elektrodynamisches Meßwerk besteht aus zwei Spulen unterschiedlicher Größen. Innerhalb einer großen, ortsfesten Spule (1) kann sich eine kleinere Spule (2) drehend bewegen. Durch die Spule (1) fließt ein Strom I_1 und erzeugt ein, diesem Strom proportionales Magnetfeld B_1 . Die Kraftwirkung aufgrund des Stromes I_2 in diesem Magnetfeld B_1 bestimmt den Drehwinkel des Zeigers und damit den Ausschlag auf einer Skala.

$$\alpha \sim I_1 I_2. \tag{9.3}$$

9.2 Schaltung von Meßgeräten

Die Messung elektrischer Größen kann meistens nur durch einen Eingriff in die Schaltung selbst erfolgen. Meßinstrumente müssen deshalb so beschaffen sein, daß durch diesen

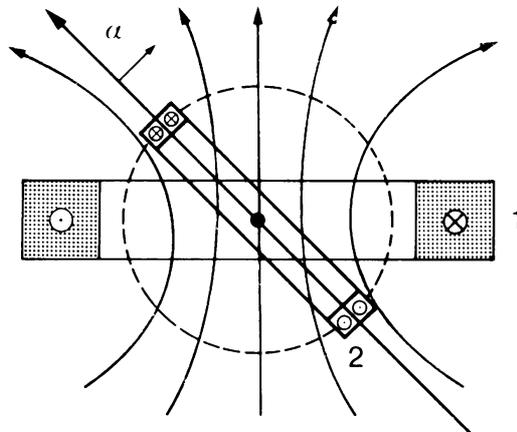


Abbildung 9.2: Elektrodynamisches Meßwerk.

Eingriff der Charakter der Schaltung nicht oder möglichst wenig verändert wird. Dies bedeutet, daß z.B. der Innenwiderstand eines Voltmeters sehr groß sein sollte. Je mehr die Instrumente von diesen Eigenschaften abweichen, umso ungenauer ist die Messung.

9.2.1 Schaltung eines Strommessers

Zum Messen muß der Strom durch das Meßinstrument fließen. Man trennt dazu den Stromkreis auf und schaltet den Strommesser in den Stromkreis. Man führt also den zum Verbraucher gehenden Strom durch das Meßgerät hindurch.

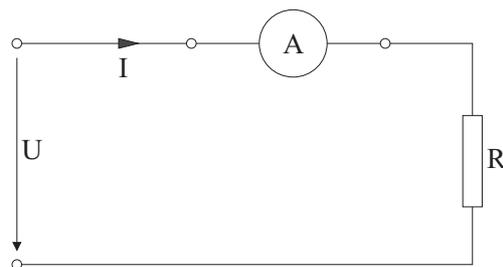


Abbildung 9.3: Schaltung eines Strommessers

9.2.2 Schaltung eines Spannungsmessers

Der Spannungsmesser muß zur Messung an die zu messende Spannung angelegt sein. Man mißt z.B. die Spannung an einem Verbraucher durch Verbinden der Klemmen des

Verbrauchers mit den Klemmen des Spannungsmessers.

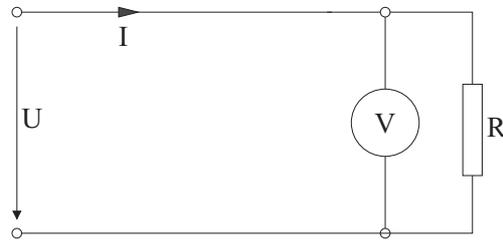


Abbildung 9.4: Schaltung eines Spannungsmessers

9.2.3 Bestimmung eines Widerstandes aus gleichzeitiger Messung von Strom und Spannung

Es gibt zwei Schaltungsmöglichkeiten.

Strommesser zwischen Quelle und Voltmeter (spannungsrichtige Schaltung)

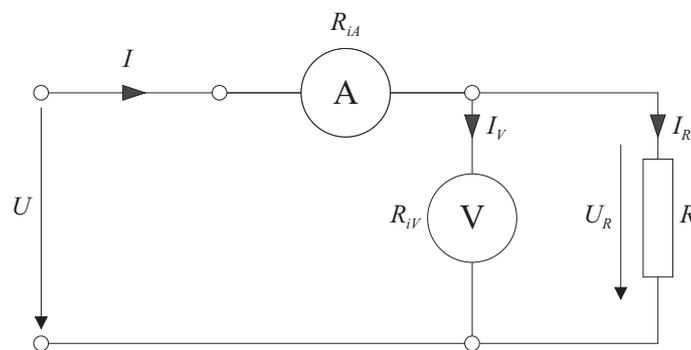


Abbildung 9.5: Spannungsrichtige Schaltung

R	unbekannter Widerstand	$[\Omega]$
R_{iV}	Innenwiderstand des Voltmeters	$[\Omega]$
R_{iA}	Innenwiderstand des Strommessers	$[\Omega]$
I_R	Strom im Widerstand R	$[A]$
U_R	Spannung am Widerstand R	$[V]$
I_V	Strom im Voltmeter	$[A]$
I	Gesamtstrom	$[A]$
U	Quellenspannung	$[V]$

Es gelten die Beziehungen:

$$R = \frac{U_R}{I_R}$$

$$I_R = I - I_V$$

$$I_V = \frac{U_R}{R_{iV}}$$

daraus folgt:

$$R = \frac{U_R}{I - I_V}$$

Bei dieser Schaltung wird die Spannung U_R richtig, der Strom I_R jedoch verfälscht gemessen. Ohne Berücksichtigung der Korrektur würde man einen zu kleinen Widerstand R erhalten.

Strommesser zwischen Voltmeter und Last (stromrichtige Schaltung)

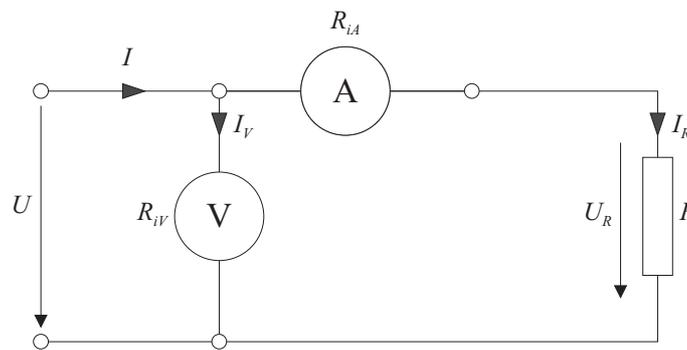


Abbildung 9.6: Stromrichtige Schaltung

Es gilt:

$$R = \frac{U_R}{I_R}$$

$$U_R = U - I_R R_{iA}$$

und es gilt:

$$R = \frac{U - I_R R_{iA}}{I_R}$$

Bei dieser Schaltung wird der Strom I_R richtig, die Spannung U_R jedoch verfälscht gemessen. Ohne Berücksichtigung der Korrektur würde man einen zu großen Widerstand R erhalten.

Regel: Bei niederohmigen Lastwiderständen verwendet man die Schaltung nach Abbildung ??, bei hochohmigen Lastwiderständen die Schaltung nach Abbildung ?? (immer bezogen auf die Innenwiderstände der verwendeten Meßgeräte!).

9.2.4 Schaltung eines Leistungsmessers

Beim Leistungsmesser wird der Strompfad wie ein Strommesser angeschlossen, der Spannungspfad wie ein Spannungsmesser (siehe Abbildung ??).

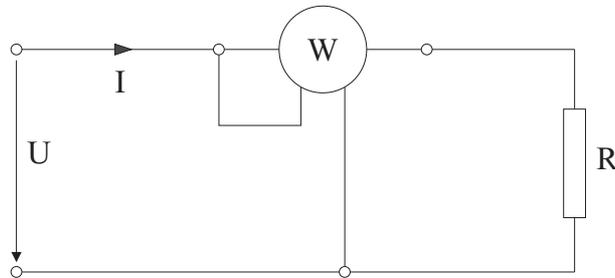


Abbildung 9.7: Meßschaltung zur Leistungsmessung

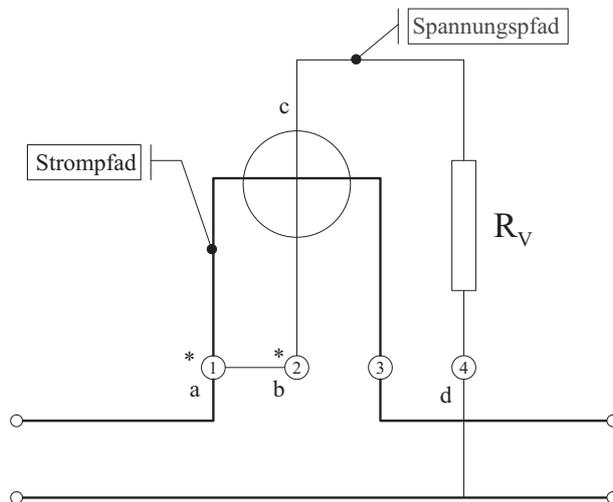


Abbildung 9.8: Schaltung eines Leistungsmessers mit vereinfachter Innenschaltung

Ein in den Spannungspfad geschalteter Vorwiderstand R_V muß zwischen den Punkten c und d liegen (Abbildung ??). Die unmittelbar zu verbindenden Anschlußklemmen a und b sind häufig mit einem Stern * oder Pfeil \downarrow gekennzeichnet. Durch diese Verbindung wird eine zu hohe Spannung zwischen Strom- und Spannungsspule vermieden. Bei Gleichstrom ist der Wattmeterausgang vom Produkt der Spannung und dem Strom, bei Wechselspannung vom Produkt der Spannung, Strom und Leistungsfaktor ($\cos(\varphi)$) abhängig. In beiden Fällen wird also die Wirkleistung gemessen. Bei Wechselstrom kann der Leistungsfaktor sehr klein oder aber auch Null werden. Im letzten Fall zeigt das Gerät keinen Ausschlag, auch wenn ihm volle Spannung und voller Strom zugeführt werden. Während bei Geräten für Strom- und Spannungsmessung bei kleinem Ausschlag stets der nächst kleinere Meßbereich gewählt werden darf, um einen möglichst großen Ausschlag

zu erhalten, trifft dies beim Leistungsmesser nicht zu. Die Stromstärke ist daher stets durch einen Strommesser und die Spannung durch einen Spannungsmesser zu überwachen und nur der ihren Anzeigen entsprechende Meßbereich für die Strom und Spannung am Leistungsmesser zu benutzen. Nur Sondergeräte zur Messung von Leistungen mit sehr kleinem Leistungsfaktor besitzen Endausschlag bei $\cos(\varphi)=0,1$ oder $0,3$. Spannung und Strom dürfen aber auch hier nicht die angegebenen Höchstwerte überschreiten.

Die Wattmeterkonstante c_W berechnet sich zu:

$$c_W = \frac{\text{Nennspannung}(U_N) \cdot \text{Nennstrom}(I_N) \cdot \cos(\varphi_N)}{\text{Gesamtskalenanteil}} [W/Skt]$$

$\cos(\varphi_N)$ ist in der Regel, wenn nicht anders angegeben = 1. Bei Verwendung von Strom- und Spannungswandlern sind deren Übersetzungsverhältnisse entsprechend zu berücksichtigen.

$$c_W = \frac{U_N \cdot I_N \cdot \cos(\varphi_N)}{\text{Skalenteile}} * \ddot{U}_U * \ddot{U}_I$$

9.2.5 Zusammenhang zwischen Wattmeterausschlag und Energieflußrichtung

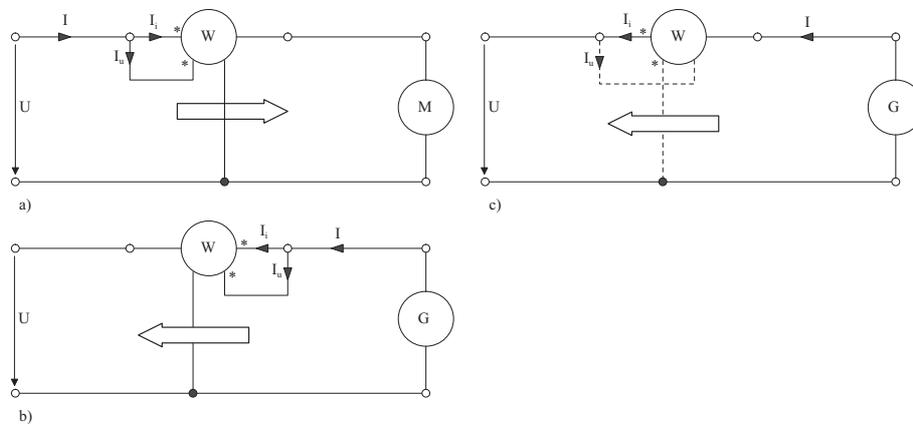


Abbildung 9.9: Wattmeterschaltungen bei unterschiedlicher Energieflußrichtung

Das Meßgerät in Abbildung ??a zeigt positiven Ausschlag, wenn die Energie in Richtung Verbraucher (Moter, ...) fließt. Bei Umkehr der Stromrichtung im Strom- Spannungspfad schlägt der Zeiger des Gerätes entgegengesetzt aus. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn der Verbraucher zum Erzeuger (Generator) wird. Der Energiefluß ändert somit seine Richtung und das Wattmeter ist entsprechend Abbildung ??b zu schalten. Erfolgt der Wechsel der Energierichtung während des Betriebes, darf in der Regel der Stromkreis nicht unterbrochen werden. Ein positiver Ausschlag des Wattmeters kann

aber durch Umpolen des Spannungspfades erzielt werden (In Abbildung 9.3c gestrichelt eingezeichnet). Die Forderung, die gekennzeichneten Klemmen zu verbinden, wird dabei nicht eingehalten. Deshalb ist eine Kommutierung des Spannungspfades nur in unkritischen Fällen zulässig.

9.3 Zusammenstellung der wichtigsten Meßgeräte

In der folgenden Tabelle 9.1 sind die wichtigsten Meßgeräte aufgeführt.

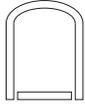
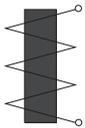
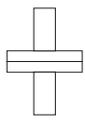
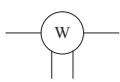
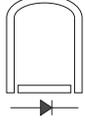
Meßgeratetyp	Symbol	Verwendungszweck	Stromart	Schaltzeichen	Bereicherweiterung
Drehspulmeßwerk		Strommesser Spannungsmesser	Gleichstrom (DC ¹)	 	Nebenwiderstand (Shunt) Vorwiderstand
Dreheisenmeßwerk		Strommesser Spannungsmesser	Gleich- und Wechselstrom (AC ² /DC)	 	Anzapfung an der Spule (kein Shunt) Stromwandler nur bei Wechselstrom (AC) Vorwiderstände
Elektrodynamisches Meßwerk (eisenlos)		Leistungsmesser	Gleich- und Wechselstrom (AC/DC)		Stromwandler Spannungswandler Vorwiderstände
Vielfachmeßgerät		Strommesser Spannungsmesser	Gleich- und Wechselstrom (AC/DC)	 	Neben- und Vorwiderstände

Tabelle 9.1: Zusammenstellung der wichtigsten Meßgeräte

9.4 Klasseneinteilung

Die Fehler der Meßgeräte werden durch Klassenzeichen angegeben, die meistens auf der Skala aufgedruckt sind. Die verschiedenen Klassen sind genormt und werden mit folgenden Zahlen bezeichnet:

Klasse: 0,1 / 0,2 / 0,5 / 1,0 / 1,5 / 2,5 / 5,0

¹Direct Current

²Alternate Current

Diese Zahlen geben den maximalen zulässigen Fehler in Prozenten an, sowohl im positiven als auch im negativen Sinn. Ein Gerät, z.B. der Klasse 1,0 kann einen Anzeigefehler bis zu $\pm 1\%$ aufweisen. Bei Instrumenten beziehen sich diese Prozentwerte auf den Endwert, bei Zählern auf den Sollwert. Es ist deshalb falsch, eine Messung, wenn nicht notwendig, im unteren Skalenbereich durchzuführen. Bei einem Instrument der Klasse 1,0 und einem Bereich von 300 Volt kann der relative Fehler bei einer Spannung von 30 Volt bereits $\pm 10\%$ des Sollwertes betragen.

Klasse	Verwendungszweck
0,1	Kalibrier- und Eichinstrumente
0,2	Präzisionsinstrumente
0,5 / 1,0	Laborinstrumente
1,5	Schalttafelinstrumente
2,5 / 5,0	Kontrollinstrumente

Tabelle 9.2: Einteilung nach Klassengenauigkeit

10 Elektrische Schwingkreise und Resonanz

Lineare Netzwerke werden in der Praxis sehr häufig bei unterschiedlichen Frequenzen betrieben. Beispielsweise finden in der Elektroakustik Netzwerke Anwendung, welche zumindest über den hörbaren Frequenzbereich (etwa 20 Hz bis 20 kHz) betrieben werden. Die Frequenzabhängigkeit entsprechender elektrischer Netzwerke bei zeitharmonischer Anregung wird in diesem Abschnitt diskutiert. Im Besonderen werden anhand der elektrischen Schwingkreise die Erscheinungen der Resonanz erläutert.

10.1 Der verlustbehaftete Reihenschwingkreis

An eine Spannungsquelle werden die Elemente R , L und C seriell, entsprechend Abb. ?? zusammengeschlossen.

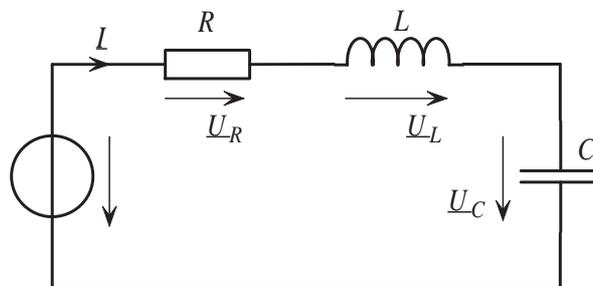


Abbildung 10.1: RLC-Serienresonanzkreis.

Die Impedanz \underline{Z} ergibt sich dabei zu:

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (10.1)$$

Aus ?? erkennt man die Frequenzabhängigkeit des Imaginärteiles und die Frequenzunabhängigkeit des Realteiles der Impedanz.

$\Re\{Z\}$ ist frequenzunabhängig

$\Im\{Z\}$ ist frequenzabhängig

Betrag und Phase errechnen sich aus:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi_z = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Der, sich bei eingprägter Spannung \underline{U} einstellende Strom \underline{I} durch die Schaltung folgt zu:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \underline{U} \underline{Y}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{Z} = U Y$$

Der Strom erreicht sein Maximum, wenn $\Im\{Z\}$ Null wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\omega = \omega_0$ ist. Darin wird ω_0 als Resonanz-Kreisfrequenz bezeichnet. Damit gilt:

$$\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = 0 \tag{10.2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0. \tag{10.3}$$

Es liegt Stromresonanz vor ($Z \Rightarrow \text{Min.}, Y \Rightarrow \text{Max.}$). Bei der Resonanz-Kreisfrequenz ω_0 wird die Gesamtimpedanz reell, Strom \underline{I} und Spannung \underline{U} sind in Phase!

Resonanz: $\underline{Z} = Z_0 = R, \quad I_0 = \frac{U}{R}$

$$\begin{array}{ll} \omega L = \frac{1}{\omega C} & \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} & \text{Resonanzkreisfrequenz} \\ f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} & \text{Resonanzfrequenz} \\ \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = X_0 & \text{Resonanzblindwiderstand, Schwingungswiderstand} \end{array}$$

Der Verlauf des Stromes, abhängig von der Frequenz ist für unterschiedliche Widerstände R in Abb. ?? (a), den sogenannten Resonanzkurven, dargestellt. Die Kurven

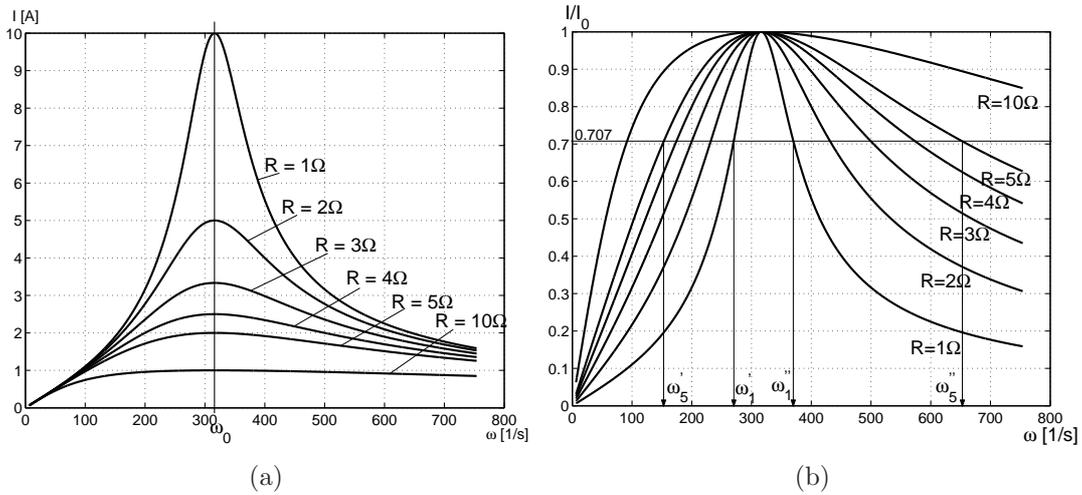


Abbildung 10.2: (a) Resonanzkurven und (b) Normierte Resonanzkurve beim Reihenschwingkreis

gelten bei einer eingepprägten Spannung von 10 V , für $L = 10\text{ mH}$, $C = 1\text{ mF}$. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich bei Ändern des Widerstandes R die Resonanz-Kreisfrequenz ω_0 nicht verändert. Die Maximalwerte des Stromes bei Resonanz nehmen mit zunehmenden Widerstandswerten entsprechend ab. Zudem werden die Kurven breiter, dh. die Maxima werden immer weniger ausgeprägt.

Ein Maß für die Qualität eines Schwingkreises ist nun grafisch aus der Breite der Resonanzkurven bei den unterschiedlichen Widerständen ablesbar. Um einen eindeutigen visuellen Vergleich der Kurven durchführen zu können, normiert man jede Kurve für sich auf den Maximalwert **Eins**. Das heisst, jeder Funktionswert der Kurve wird auf den Stromwert I_0 im Resonanzpunkt bezogen. Man erhält hernach die in Abb. ?? (b) dargestellten normierten Resonanzkurven.

Aus dem Verlauf dieser Kurven kann nun deutlich erkannt werden, welche Resonanzkurve schmärer und welche breiter ist. Für die Resonanzkurven bei $R = 1\ \Omega$ und $R = 5\ \Omega$ sind bereits die später beschriebenen Grenzfrequenzen ω'_1, ω''_1 bzw. ω'_5, ω''_5 mit eingezeichnet.

Aus der Diskussion der Impedanzbeziehung (??) können die Verläufe der Phasenverschiebungen der unterschiedlichen Resonanzkurven dargestellt werden:

Man erkennt, dass bei Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz ein ohmsch-kapazitives Verhalten (Phasenwinkel der Impedanz φ_Z ist negativ) vorliegt. Bei Frequenzen über der Resonanzfrequenz überwiegt hingegen der induktive Blindanteil. Aus dem Verlauf der Kurven erkennt man auch, dass mit zunehmendem ohmschen Widerstand die Kurven immer flacher werden.

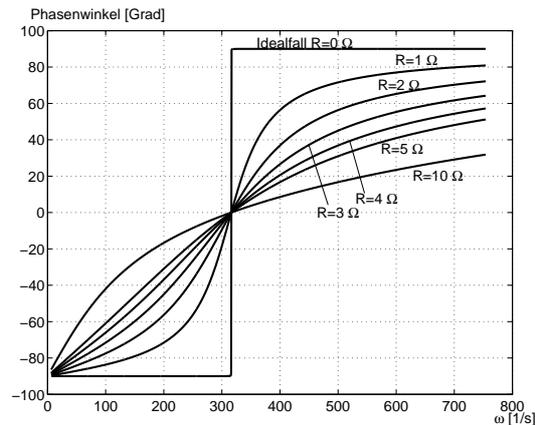


Abbildung 10.3: Phasenverläufe beim Reihenschwingkreis.

10.1.1 Resonanzschärfe oder Gütefaktor Q

Die Resonanzschärfe oder der Gütefaktor, kurz die Güte Q eines Schwingkreises ist über die gespeicherte Energie und die Verlustenergie, wie folgt, definiert:

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{2\pi \times \text{gesamte Speicherenergie}}{\text{Verlustenergie je Periode}} \Bigg|_{\text{bei Resonanz}} \\
 &= \frac{\omega_0 \times \text{gesamte Speicherenergie}}{\text{Verlustleistung}} \Bigg|_{\text{bei Resonanz}}
 \end{aligned}$$

Die Energien W_L und W_C sind gleich groß. Durch Einsetzen der bekannten Begriffe folgt:

$$Q = \frac{\omega_0(W_L + W_C)}{P} = \frac{\omega_0 L I^2}{R I^2} = \frac{X_0}{R}. \quad (10.4)$$

Die Güte Q ergibt sich somit aus dem Verhältnis des Blindwiderstandes X_0 bei Resonanz zum ohmschen Widerstand R des Schwingkreises. Die Inverse der Güte wird als Dämpfungsfaktor d bezeichnet:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{X_0} = R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (10.5)$$

10.1.2 Grenzfrequenzen und Bandbreite

Für den Resonanzkreis sind eine untere und eine obere Grenzfrequenz ω' bzw. ω'' genau dort definiert, wo der Strom auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache des Maximalwertes (=Strom I_0 bei der

Resonanz-Kreisfrequenz ω_0) zurückgegangen ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{2}R = \sqrt{2}Z_0 \\ I &= \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{2}Z_0} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Der Strom ist gegenüber dem Höchstwert I_0 bei Resonanz auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -fache, dh. um 3 dB abgesunken:

$$\left. \frac{1}{\sqrt{2}} \right|_{dB} = 20 \log 2^{-\frac{1}{2}} = -10 \log 2 \approx -3 \text{ dB}$$

Die Differenz $\omega'' - \omega'$ entspricht der Bandbreite des Schwingkreises. Es lässt sich zeigen, dass sich diese durch

$$\omega'' - \omega' = \frac{R}{L} \tag{10.6}$$

berechnen lässt. Durch Erweitern mit ω_0 folgt:

$$\frac{\omega'' - \omega'}{\omega_0} = \frac{R}{L} \sqrt{LC} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{X_0} = d = \frac{1}{Q}$$

Misst man im Labor die Resonanzfrequenz und die beiden Grenzfrequenzen ω' und ω'' , so hat man damit die Möglichkeit, die Güte des Reihenschwingkreises messtechnisch zu ermitteln.

10.2 Der verlustbehaftete Parallelresonanzkreis

Der nachfolgend dargestellte Parallelschwingkreis ist in seinem Verhalten dual zum Reihenschwingkreis zu beschreiben.

Anstelle der Impedanz wird die Admittanz betrachtet:

$$\underline{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \tag{10.7}$$

Wiederum ist der Realteil der Admittanz $\Re\{\underline{Y}\}$ frequenzunabhängig und der Imaginärteil $\Im\{\underline{Y}\}$ frequenzabhängig. Betrag und Phase folgen zu:

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \\ \varphi_y &= \arctan \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}. \end{aligned}$$

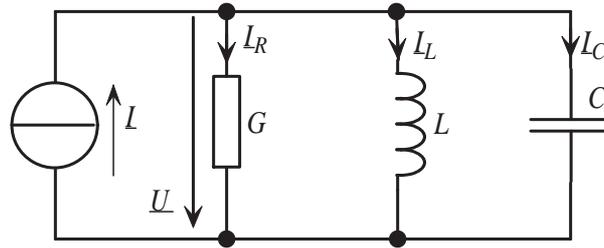


Abbildung 10.4: RLC-Parallelresonanzkreis.

Bei eingprägtem Strom \underline{I} der Stromquelle stellt sich die Spannung mit

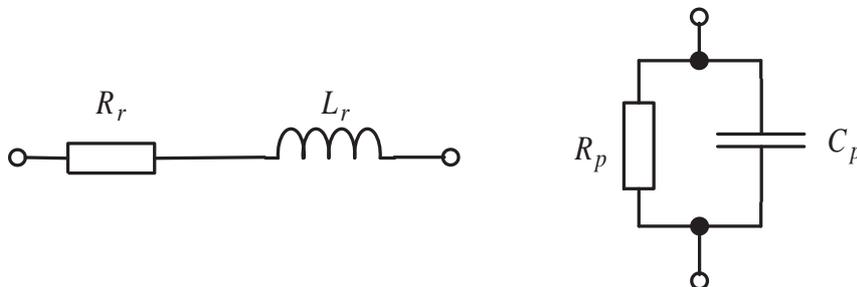
$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \frac{\underline{I}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \underline{I} \underline{Z}$$

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{I}{Y} = I Z$$

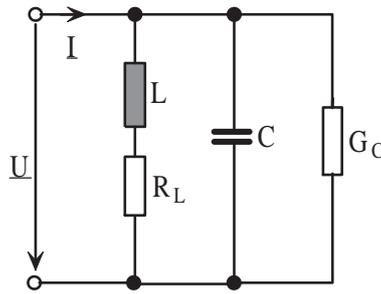
ein. Die Spannung erreicht ihr Maximum, wenn $\Im\{\underline{Y}\}$ Null wird. Es liegt dann Spannungsresonanz vor ($Y \Rightarrow \text{Min.}$, $Z \Rightarrow \text{Max.}$). Dies wird wieder erreicht, wenn die Kreisfrequenz gleich $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ist (vgl. (??)).

$$\begin{aligned} \omega C = \frac{1}{\omega L} &\Rightarrow & \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} && \text{Resonanzkreisfrequenz} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} && && \text{Resonanzfrequenz} \\ f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} && && \text{Resonanzfrequenz} \\ \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = B_0. && && \text{Resonanzblindleitwert} \end{aligned}$$

In der Praxis lassen sich die Schwingkreise mit den idealen Netzwerkelementen nicht realisieren, da die realen Bauelemente immer verlustbehaftet sind. Die technischen Blindwiderstände sehen folgend aus:



Der praktische Parallelresonanzkreis kann nachfolgendes Aussehen haben.



Bei dieser Schaltung wurde angenommen, dass das Dielektrikum des Kondensators nicht ideal, dh. kein vollkommener Isolator ist. Es muss somit ein zu C_p paralleler Widerstand R_C bzw. dessen Leitwert G_C mitberücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \underline{Y}(j\omega) &= G_C + j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L} = G + jB \\ &= G_C + \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \right) \end{aligned}$$

Bei Resonanz gilt: $Im\{\underline{Y}(j\omega)\} = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\omega_p C - \frac{\omega_p L}{R_L^2 + \omega_p^2 L^2} \right) &= 0 \\ \omega_p^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{L^2} \\ \omega_p &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_L}{L} \right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R_L}{L} \right)^2}. \end{aligned}$$

Die Kreisfrequenz ω_p , bei welcher hier Resonanz vorherrscht, ist von ω_0 unterschiedlich! Abhängig vom ohmschen Widerstandes R_L der Spule wird es zu einer Verschiebung der Resonanz-Kreisfrequenz ω_p kommen. Dies ist aus den Resonanzkurven in Abb. ?? deutlich ersichtlich. Die dargestellten Resonanzkurven wurden bei nachfolgenden Schaltungselementen ermittelt. $R_C = 1000 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 1 \text{ mF}$, $I = 10 \text{ A}$.

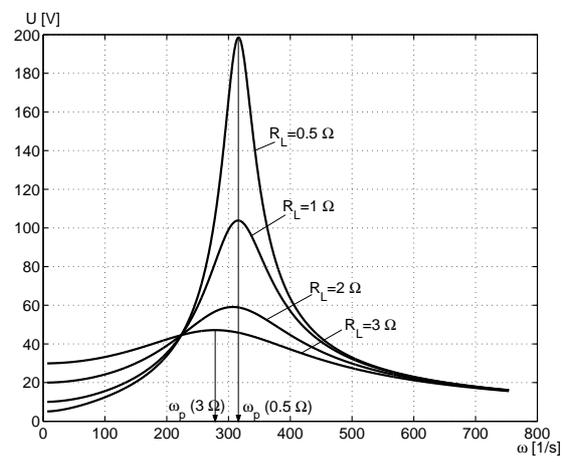


Abbildung 10.5: Resonanzkurve eines praktischen Parallelschwingkreises.

11 Schaltvorgänge

11.1 Einleitung

Bisher wurden nur *stationäre* Vorgänge betrachtet: Ströme und Spannungen existieren seit beliebig langer Zeit, im Netzwerk wurden keine Änderungen vollzogen. In diesem Kapitel soll untersucht werden, wie die Spannungen und Ströme in einem Netzwerk reagieren, wenn Quellen plötzlich ein- oder ausgeschaltet werden oder passive Netzwerkelemente ihr Verhalten plötzlich verändern. Man spricht dann vom *Übergangsverhalten* oder vom *transienten* Verhalten des Netzwerkes. Dieses Verhalten wird durch die Energiespeicher (Spulen, gekoppelte Spulen und Kondensatoren) des Netzwerkes verursacht. Es ist nun aber eine physikalische Tatsache, daß sich die gespeicherte Energie $W(t)$ (sowohl in einem Kondensator als auch in einer Spule) nur *stetig* ändern kann, da ansonsten eine unendlich große Leistung $p(t)$ nötig wäre.

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

Wenn aber die Energiefunktion stetig ist, dann können sich auch jene elektrischen Größen, aus denen sich die Energie in einer Spule oder in einem Kondensator ableiten, nur stetig ändern. Wird also in einem Netzwerk zum Schaltzeitpunkt t_S etwas verändert, so erhält man folgende stetige Größen, wobei t_S^- den Zeitpunkt unmittelbar vor dem Schaltvorgang und t_S^+ den Zeitpunkt unmittelbar nach dem Schaltvorgang bezeichnen.

Spule

$$W(t)_{Spule} = \frac{L i_L(t)^2}{2}$$

Strom $i_L(t)$ muß stetig sein

$$i_L(t_S^-) = i_L(t_S^+)$$

Kondensator

$$W(t)_{Kondensator} = \frac{C u_C(t)^2}{2}$$

Spannung $u_C(t)$ muß stetig sein

$$u_C(t_S^-) = u_C(t_S^+)$$

Es können sich also der Strom i_L , der über eine Spule fließt und die Spannung u_C , die an einem Kondensator abfällt, nicht *sprunghaft* verändern.

Das Verhalten der einzelnen Ströme und Spannungen im Netzwerk wird durch *Differentialgleichungen* beschrieben, die in den nächsten Abschnitten näher untersucht werden.

11.2 Schaltvorgänge mit Gleichspannungsquellen

11.2.1 Einschalten einer RL-Reihenschaltung

Aufstellen der Differentialgleichung

Gegeben sei eine Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R mit einer Spule der Induktivität L , die zum Zeitpunkt $t_S = 0$ an eine Gleichspannungsquelle $u_q(t) = U_0$ geschaltet wird. Gesucht ist der Verlauf des Stromes $i(t)$.

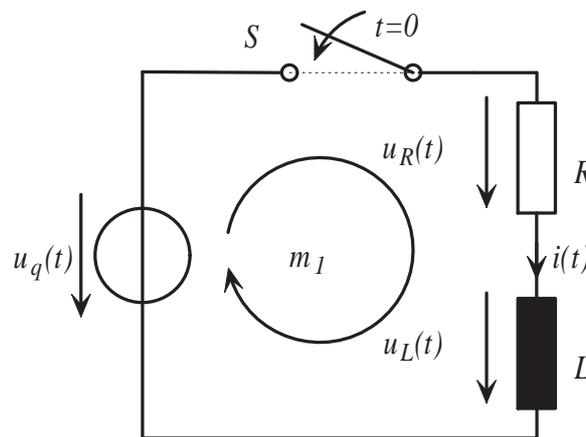


Abbildung 11.1: Einschaltvorgang einer RL-Reihenschaltung.

Um die Differentialgleichung für den Strom $i(t)$ aufzustellen, wendet man die Kirchhoffsche Maschenregel an und ersetzt dann die Spannungen an den passiven Elementen durch die entsprechenden Strom/Spannungsbeziehungen. Man erhält

$$\begin{aligned} u_R + u_L &= U_0 \\ iR + L \frac{di}{dt} &= U_0, \end{aligned}$$

beziehungsweise nachdem man den Koeffizienten bei der höchsten Ableitung zu Eins gemacht hat und die Zeitableitung $\frac{d(\cdot)}{dt}$ durch ein „ $'$ “ kennzeichnet.

$$i' + \frac{R}{L}i = \frac{U_0}{L}. \quad (11.1)$$

Gleichung (??) ist eine *lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Die Lösung dieser Gleichung ist eine *Zeitfunktion* $i(t)$, die sich aus der *homogenen* Lösung $i_h(t)$ und einer *speziellen* (=partikulären) Lösung $i_p(t)$ zusammensetzt.

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \tag{11.2}$$

Man erhält $i_h(t)$ als Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$i_h' + \frac{R}{L}i_h = 0, \tag{11.3}$$

während $i_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung darstellt.

$$i_p' + \frac{R}{L}i_p = \frac{U_0}{L}. \tag{11.4}$$

Setzt man $i(t) = i_h(t) + i_p(t)$ in die Differentialgleichung (??), so erhält man

$$\begin{aligned} i'(t) + \frac{R}{L}i(t) &= (i_h(t) + i_p(t))' + \frac{R}{L}(i_h(t) + i_p(t)) = \\ &= \underbrace{i_h'(t) + \frac{R}{L}i_h(t)}_0 + \underbrace{i_p'(t) + \frac{R}{L}i_p(t)}_{\frac{U_0}{L}} = \frac{U_0}{L}. \end{aligned} \tag{11.5}$$

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie man $i_h(t)$, $i_p(t)$ und letztendlich $i(t)$ erhält.

Bestimmen der homogenen Lösung

Um die Lösung der homogenen Differentialgleichung $i_h' + \frac{R}{L}i_h = 0$ zu erhalten, wählt man folgenden Ansatz

$$i_{h,A} = Ke^{-\lambda t}, \tag{11.6}$$

differenziert ihn einmal

$$i_{h,A}' = -\lambda Ke^{-\lambda t}, \tag{11.7}$$

und setzt beides in die homogene Differentialgleichung ein. Es folgt:

$$-\lambda Ke^{-\lambda t} + \frac{R}{L}Ke^{-\lambda t} = Ke^{-\lambda t}(-\lambda + \frac{R}{L}) = 0 \tag{11.8}$$

Gleichung (??) ist dann *nichttrivial* erfüllt, falls die *charakteristische Gleichung*

$$\left(-\lambda + \frac{R}{L}\right) = 0 \tag{11.9}$$

erfüllt ist, was für $\lambda = \frac{R}{L}$ der Fall ist. Die Lösung der homogenen Gleichung ist demzufolge

$$i_h = K e^{-\frac{R}{L}t}, \tag{11.10}$$

wobei K eine noch zu bestimmende Konstante ist. Häufig verwendet man auch den Kehrwert von λ und bezeichnet diese Größe als *Zeitkonstante* τ

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{L}{R}, \tag{11.11}$$

und erhält für (??)

$$i_h = K e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}. \tag{11.12}$$

Dieser Anteil der Lösung wird für zunehmendes t immer kleiner und verschwindet für $t \rightarrow \infty$ vollkommen. Daher bezeichnet man diesen auch als den *transienten* oder *flüchtigen* Teil der Gesamtlösung $i(t)$.

Bestimmen einer speziellen Lösung

Um eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (??) zu bestimmen, gibt es verschiedenen Möglichkeiten. Eine davon ist die *Variation der Konstanten*, eine andere die *Methode des Ansatzes*, die hier kurz erklärt werden soll.

Die rechte Seite, die Erregung von (??) ist ein konstanter Wert, sodaß man davon ausgehen kann, daß *alle* Spannungen und Ströme im Netzwerk ebenfalls einen konstanten Wert annehmen werden, nachdem die *transienten* Vorgänge abgeklungen sind. Es liegt also nahe, als Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung eine Konstante zu wählen.

$$i_{p,A} = I_0 = \text{konstant}, \tag{11.13}$$

bzw. einmal differenziert

$$i'_{p,A} = 0. \tag{11.14}$$

Setzt man (??) und (??) in (??) ein, so erhält man

$$0 + \frac{R}{L}I_0 = \frac{U_0}{L}. \tag{11.15}$$

Daraus ergibt sich $I_0 = \frac{U_0}{R}$. Das ist also genau jener Strom, der nach Abklingen aller transienten Vorgänge als stationäre Größe über die Spule fließt. Die Gesamtlösung $i(t)$ lautet daher:

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{R} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}. \quad (11.16)$$

Bestimmen der unabhängigen Konstanten

Abschließend muß noch die Konstante K so gewählt werden, daß $i(t)$ die Anfangsbedingungen erfüllt. Nachdem sich die Energie $W(t)_{Spule} = \frac{Li(t)^2}{2}$, die in der Spule gespeichert ist, stetig verhält, muß auch der Strom $i(t)$ ein stetiges Verhalten zeigen. Das bedeutet, daß $i(t)$ unmittelbar vor dem Schalten $t = 0^-$ und unmittelbar nach dem Schalten $t = 0^+$ gleich groß sein muß. Da der Stromkreis vor $t = 0$ offen war, muß gelten:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stetigkeit:} \quad i(t = 0^-) = 0 = i(t = 0^+) = i(t = 0) \\ \text{Dgl:} \quad i(t = 0) = Ke^{-\frac{0}{\tau}} + \frac{U_0}{R} = K + \frac{U_0}{R} \end{array} \right\} K + \frac{U_0}{R} = 0. \quad (11.17)$$

Man erhält somit die Gesamtlösung für den Strom $i(t)$ mit

$$i(t) = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}. \quad (11.18)$$

Der Spannungsabfall $u_L(t)$ an der Spule lautet

$$u_L(t) = U_0e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}. \quad (11.19)$$

Abbildung ?? zeigt den Zeitverlauf des Stromes $i(t)$, der durch die Spule fließt und den zugehörigen Spannungsabfall $u_L(t)$, wobei $U_0 = 100\text{V}$, $R = 100\Omega$ und $L = 10\text{H}$ gewählt wurden. Man erkennt, daß der Strom innerhalb der Zeit $\tau = \frac{L}{R} = 0.1\text{s}$ auf etwa 63% (= $e^{-1} * 100\%$) des Endwertes angestiegen ist, während die Spannung auf etwa 37% (= $(1 - e^{-1}) * 100\%$) des Anfangswertes abgesunken ist.

11.3 Schaltvorgänge mit Wechselstromquellen

Gegeben sei wieder die RL-Reihenschaltung aus Abbildung ??, wobei als Quellenspannung $u_q(t)$ eine Wechselspannung $U_0 \sin(\omega t)$ gewählt wird. Damit verändert sich die Differentialgleichung (??) zu

$$i' + \frac{R}{L}i = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t). \quad (11.20)$$

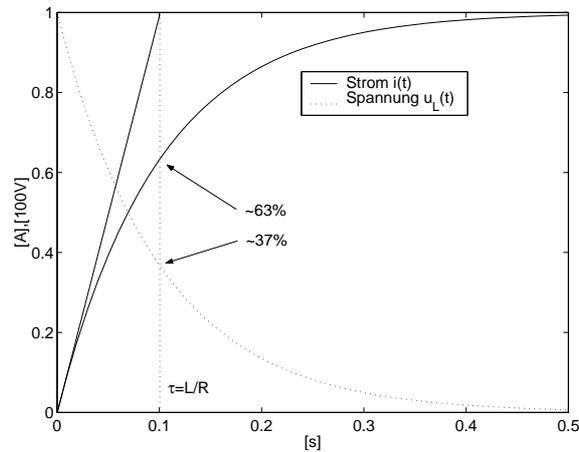


Abbildung 11.2: Einschaltvorgang einer Gleichspannungsquelle, RL-Reihenschaltung.

Die Lösung der homogene Differentialgleichung ist bereits bekannt und lautet

$$i_h = K e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Bestimmen einer speziellen Lösung

Um eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (??) zu bestimmen, wird wieder die *Methode des Ansatzes* verwendet.

Die rechte Seite, die Erregung von (??) ist ein harmonische Zeitfunktion mit der Kreisfrequenz ω , sodaß man davon ausgehen kann, daß *alle* Spannungen und Ströme im Netzwerk ebenfalls harmonische Funktionen mit mit der Kreisfrequenz ω sein werden, nachdem die *transienten* Vorgänge abgeklungen sind. Es liegt also nahe, als Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung folgenden Ansatz zu wählen.

$$i_{p,A} = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \tag{11.21}$$

bzw. einmal differenziert

$$i'_{p,A} = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t), \tag{11.22}$$

wobei A und B noch zu bestimmende Konstanten sind. Setzt man (??) und (??) in (??) ein, so erhält man

$$(A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)) + \frac{1}{\tau}(A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t), \tag{11.23}$$

beziehungsweise

$$\sin(\omega t)\left(-B\omega + \frac{A}{\tau}\right) + \cos(\omega t)\left(A\omega + \frac{B}{\tau}\right) = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t). \quad (11.24)$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten bei den beiden Winkelfunktionen, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung von A und B .

$$\begin{aligned} -B\omega + \frac{A}{\tau} &= \frac{U_0}{L} \\ A\omega + \frac{B}{\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$A = \frac{\frac{U_0}{L}\tau}{(\omega\tau)^2 + 1} \quad (11.25)$$

$$B = -\frac{\frac{U_0}{L}\omega\tau^2}{(\omega\tau)^2 + 1}. \quad (11.26)$$

Sind die beiden Konstanten A und B der partikulären Lösung bestimmt, so läßt sich die Gesamtlösung wieder als Summe der homogenen Lösung und einer speziellen Lösung darstellen.

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (11.27)$$

oder

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + I_0 \sin(\omega t + \varphi_I) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad (11.28)$$

mit

$$I_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (11.29)$$

$$\varphi_I = \arctan\left(\frac{B}{A}\right). \quad (11.30)$$

Da der Anteil $I_0 \sin(\omega t + \varphi_I)$ wieder genau jenen Strom darstellt, der nach Abklingen aller transienten Vorgänge als stationäre Größe über die Spule fließt, gibt es noch einen einfacheren Weg, I_0 und φ_I zu ermitteln. Dafür kann nämlich die komplexe Rechnung herangezogen werden. Transformiert man zunächst $u(t)$, R und L in den Bildbereich, so erhält man $\underline{U} = U_0 e^{j\varphi_U}$, R und $jX_L = j\omega L$. Dann lautet der Gesamtstrom \underline{I}

$$\underline{I} = \frac{U_0 e^{j\varphi_U}}{R + j\omega L} = I_0 e^{j\varphi_I}. \quad (11.31)$$

und die Rücktransformation ergibt die gesuchte Zeitfunktion des Stromes. Als Beispiel soll eine Wechselspannung mit einem Scheitelwert von $U_0 = 100\text{V}$ und einer Frequenz von $f = 10\text{Hz}$ auf eine Reihenschaltung von $R = 100\Omega$ und $L = 10\text{H}$ geschaltet werden. Dann ergibt der Strom $i(t)$ mit

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{0.1s}} + 0.1572\text{A} \sin(\omega t - 80.9569^\circ). \quad (11.32)$$

Bestimmen der unabhängigen Konstanten

Abschließend wird noch die Konstante K aus ?? so gewählt werden, daß $i(t)$ die Anfangsbedingungen erfüllt. Wie im Beispiel zuvor, muß dieser Strom sich zum Schaltzeitpunkt $t = 0$ stetig verhalten und den Wert 0 annehmen. Daher gilt

$$i(t = 0) = Ke^{-\frac{0}{\tau}} + I_0 \sin(\varphi_I) = 0, \quad (11.33)$$

beziehungsweise

$$K = -I_0 \sin(\varphi_I). \quad (11.34)$$

Die Gesamtlösung lautet daher

$$i(t = 0) = -I_0 \sin(\varphi_I)e^{-\frac{0}{\tau}} + I_0 \sin(\varphi_I). \quad (11.35)$$

Für das Beispiel erhält man $K = -0.1552$ und somit für $i(t)$

$$i(t = 0) = 0.155\text{A}e^{-\frac{t}{0.1s}} + 0.1572\text{A} \sin(\omega t - 80.9569^\circ). \quad (11.36)$$

Abbildung ?? zeigt den Schaltvorgang und eine Dauer von fünf Zeitkonstanten (=1s).

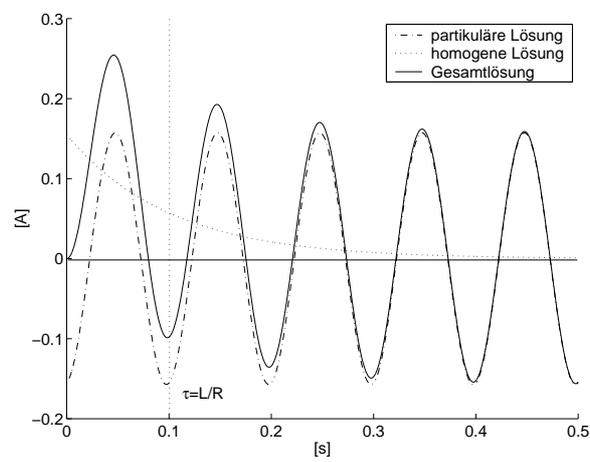


Abbildung 11.3: Einschaltvorgang einer Wechselspannungsquelle, RL-Reihenschaltung.