Voraussetzungen zu den Vorlesungen: Grundlagen der Elektrotechnik: 437.161 437.201 437.207 437.209 437.211 437.213

Renhart Werner

3. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Größen, Koordinatensysteme und Einheiten

Durch systematische Beobachtungen und Messungen können die in der Natur ablaufenden Vorgänge erfaßt werden. Es ist nun die Aufgabe der Physik, daraus Gesetzmäßigkeiten abzuleiten und diese in Gleichungen zu beschreiben. Beispielsweise hat der englische Physiker und Mathematiker Isaac Newton (1642-1727) den physikalischen Begriff Kraft als Wechselwirkung zwischen Körpern definiert und das Grundgesetz der Mechanik

Masse mal Beschleunigung ist Kraft

aufgestellt. Die Begriffe Masse, Beschleunigung und Kraft bezeichnet man darin als physikalische Größen. Um nun diese Beziehung in einer eindeutigen mathematischen Schreibweise darzustellen ist es zunächst notwendig die physikalischen Größen durch Buchstaben in einer formellen Schreibweise auszudrücken. Dabei muß der Charakter der entsprechenden physikalischen Größe gewahrt bleiben. Grundsätzlich unterscheidet man in der Physik zwei prinzipielle Eigenschaften physikalischer Größen.

1.1 Nicht gerichtete oder skalare Größen

Physikalische Größen, denen keine geometrische Richtung zuzuordnen ist, nennt man skalare Größen. In der Formelsprache werden deren Symbole in normalen Buchstaben geschrieben. Im Beispiel der Kraftgleichung stellt die Masse m eine derartige Größe dar. Weitere skalare physikalische Größen sind beispielsweise:

die Zeit t, die Temperatur T, der Druck p.

1.2 Gerichtete, vektorielle Größen

Die oben erwähnte Kraft übt seine Wirkung in eine bestimmte Richtung aus. Zur Beschreibung der Richtung ist es notwendig ein Koordinatensystem einzuführen.

1.2.1 Das kartesische Koordinatensystem

Für grundlegender Vorgänge wird im allgemeinen das kartesischen Koordinatensystem (René Descartes, französischer Philosoph und Mathematiker, 1596-1650) verwendet. Dieses besteht aus einem Ursprungspunkt im Raum, von welchem drei aufeinander normal stehende (orthogonale) geradlinige Achsen ausgehen (Abb. 1.1).

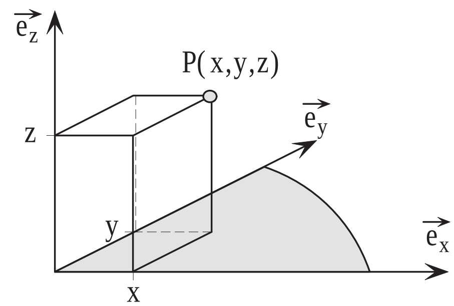


Abbildung 1.1: Bezeichnungen im kartesischen Koordinatensystem.

In Abb. 1.1 sind die drei Koordinatenrichtungen durch die Einheits-Richtungsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ gekennzeichnet. Diesem Vektorentripel ist ein Rechtssinn zugeordnet, dementsprechend muß die vektorielle Beziehung $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$ gelten.

1.2.2 Das zylindersymmetrische Koordinatensystem

Zur Beschreibung der unterschiedlichen physikalischen Phänomene ist es oft vorteilhaft, nicht geradlinige Koordinatensysteme zu verwenden. Rotationsbewegungen können beispielsweise sehr vorteilhaft im Zylinderkoordinatensystem beschrieben werden.

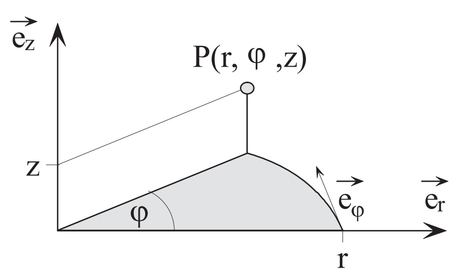


Abbildung 1.2: Das zylindersymmetrische Koordinatensystem.

Die Einheitskoordinaten sind in Abb. 1.2 mit $\vec{e_r}$, $\vec{e_\varphi}$ und $\vec{e_z}$ bezeichnet. Ein Sonderfall des zylindersymmetrischen Koordinatensystems ist gegeben, wenn die z-Koordinate null oder immer konstant ist. Es verbleibt das für die Ebene gültige **polare Koordinatensystem** mit den Einheitskoordinaten $\vec{e_r}$ und $\vec{e_\varphi}$. Weitere Koordinatensysteme (Kugel-, elliptische-, torroidale-, etc. Koordinatensysteme werden in den Grundvorlesungen nicht beansprucht.

Es wird vereinbart, daß vektorielle Größen mit einem Pfeil über dem Buchstaben dargestellt werden. Die erwähnte Newtonsche Kraftgleichung wird somit durch

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.1}$$

dargestellt. Ein Vektor besteht aus einer Richtung und einem Betrag. Die Richtung ergibt sich aus den drei Komponenten, für den obigen Fall zu

$$\vec{F} = \left\{ \begin{array}{c} F_x \\ F_y \\ F_z \end{array} \right\} \tag{1.2}$$

und der Betrag errechet sich aus

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \tag{1.3}$$

Vektorielle physikalische Größen sind beispielsweise

in der Mechanik: Kraft $\vec{F}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, Beschleunigung $\vec{a}$, Drehmoment $\vec{M}$

in der Elektrotechnik: elektrische Feldstärke $\vec{E}$, magnetische Erregung $\vec{H}$.

Zur meßtechnischen Erfassung einer physikalischen Größe ist es notwendig, eine Einheit festzulegen. Ein Meßergebnis gibt dann an, wieviel mal diese Einheit in der Meßgröße vorhanden ist.

1.3 Einheiten in der Physik

Alle in der Physik gebräuchlichen Grundeinheiten sind eindeutig definiert. In der Elektrotechnik ist ausschließlich das SI-System in Gebrauch. Aus den folgenden Grundeinheiten können alle weiteren physikalischen Einheiten abgeleitet werden (Tab. 1.1).

Um die hohe Anzahl von Zehnerpotenzen in den Einheiten überstreichen zu können, werden dekadische Teile oder Vielfache in den Einheiten miteinbezogen (z.B. Kilogramm). Diese sind in Tab. 1.2 aufgelistet.

Die Größengleichung (1.1) kann nun in vollständiger Form dargestellt werden:

$$\vec{F} = m\vec{a}\left[\frac{kg\,m}{s^2}\right]; \qquad 1\left[\frac{kg\,m}{s^2}\right] \quad = \quad 1[N]...Newton. \tag{1.4}$$

Grundgröße	Formelzeichen	Grundeinheit	Abkürzung
Länge	l	Meter	$[m]$
Masse	m	Kilogramm	$[kg]$
Zeit	t	Sekunde	$[s]$
Elektrische Stromstärke	I	Ampere	$[A]$
absolute Temperatur	T	Kelvin	$[K]$
Lichtstärke	I_ν	Candela	[cd]
Stoffmenge	n	Mol	$[mol]$

Tabelle 1.1: Grundgrößen und Einheiten im SI-System.

10^{-1}	d=dezi		10^{1}	da=deka
10^{-2}	c=centi		10^{2}	h=hekto
10^{-3}	m=milli		10^{3}	k=kilo
10^{-6}	μ=mikro		10^{6}	M=Mega
10^{-9}	n=nano		10^{9}	G=Giga
10^{-12}	p=piko		10^{12}	T=Terra
10^{-15}	f=femto			
10^{-18}	a=atto			

Tabelle 1.2: Dekadische Teile und Vielfache.

2 Grundlagen über Vektoren

Zur Beschreibung der grundlegenden Eigenschaften von Vektoren wird das kartesische Koordinatensystem herangezogen (Abb. 2.1).

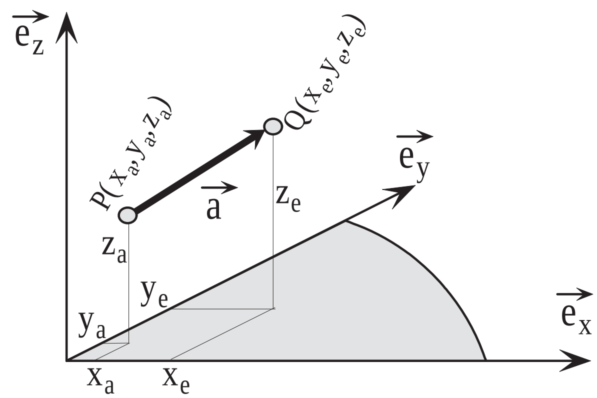


Abbildung 2.1: Vektor $\vec{a}$ im kartesischen Koordinatensystem.

Ein Vektor $\vec{a}$ ist durch seinen Anfangspunkt $P(x_a, y_a, z_a)$ und durch seinen Endpunkt $Q(x_e, y_e, z_e)$ im Koordinatensystem eindeutig festgelegt. Die Komponenten von $\vec{a}$ ergeben sich daraus zu:

$$\begin{aligned} a_x &= x_e - x_a \\ a_y &= y_e - y_a \\ a_z &= z_e - z_a, \end{aligned} \tag{2.1}$$

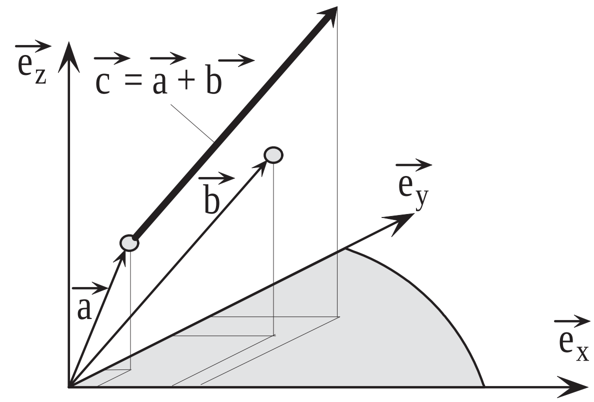
sodass der Vektor $\vec{a}$ durch

$$\vec{a} = \left\{ \begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x_e - x_a \\ y_e - y_a \\ z_e - z_a \end{array} \right\} \tag{2.2}$$

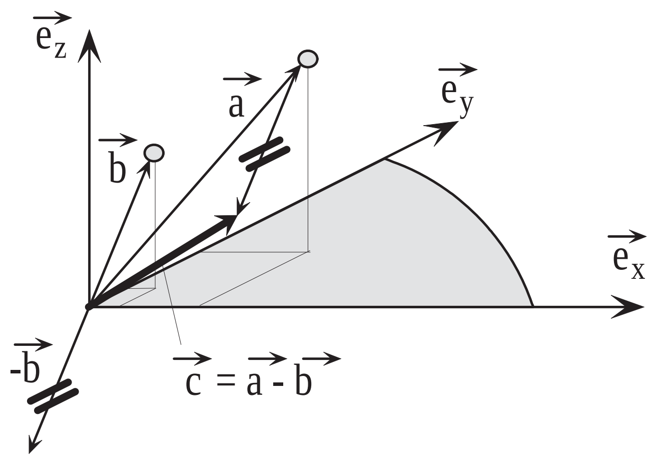
dargestellt werden kann.

2.1 Vektoraddition und Vektorsubtraktion

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die jeweiligen Komponenten addiert bzw. subtrahiert (Fig. 2.2). Entsprechend ergeben sich die Komponen-



(a)



(b)

Abbildung 2.2: (a) Addition $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (b) Subtraktion $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

ten des Summenvektors zu:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{Bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

und die des Differenzvektors zu:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \left\{ \begin{array}{c} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{array} \right\}. \tag{2.4}$$

Der Betrag oder die Länge eines Vektors ergibt sich nach Pythagoras zu

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.5}$$

2.2 Das Innere Produkt zweier Vektoren

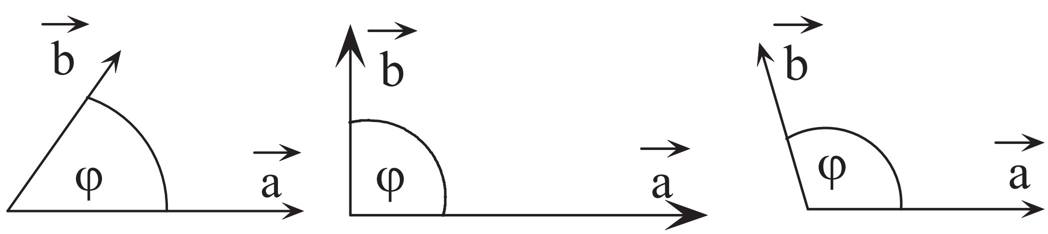
Das innere Produkt oder das **Inprodukt** zweier **Vektoren** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (sprich $\vec{a}$ in $\vec{b}$) ist das Produkt ihrer Längen mal dem Cosinus ihres Winkels:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi. \tag{2.6}$$

In Komponenten gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\{ \begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array} \right\} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.7}$$

Das Ergebnis des inneren Produktes zweier Vektoren ist immer eine skalare Größe!



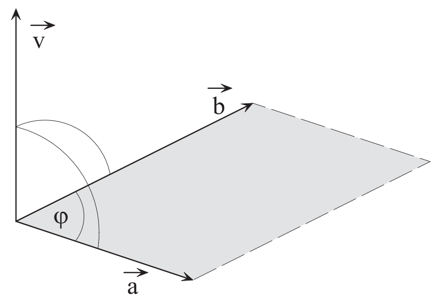
(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (c) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

Das innere Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist null, wenn diese normal aufeinander stehen. Die beiden Vektoren sind dann orthogonal zueinander (Fall (b)).

2.3 Das Äussere Produkt zweier Vektoren

Das äussere Produkt oder das **Exprodukt** zweier **Vektoren** $\vec{a}\times\vec{b}$ (sprich $\vec{a}$ ex $\vec{b}$) ist folgend definiert:

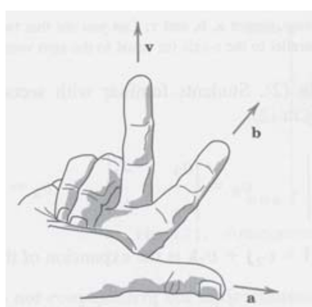
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{a}\times\vec{b} = \left\{\begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{c} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{c} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{array}\right\}. \qquad (2.8) \end{aligned}$$



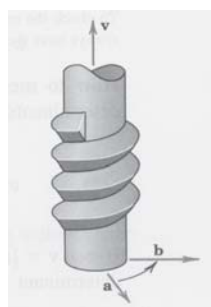
Der Betrag des neuen Vektors $\vec{v}$ errechnet sich aus den Beträgen der Einzelvektoren mal dem Sinus des Winkels φ.

$$|v| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi. \qquad (2.9)$$

Das Ergebnis des äusseren Produktes zweier Vektoren ergibt immer ein Vektor!



(d) Rechte-Hand-Regel



(e) Rechtsschraube

Der durch das Exprodukt entstandene neue Vektor $\vec{v}$ steht normal auf die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene und ist diesen in einem Rechtssinn zugeordnet. Man dreht den Vektor $\vec{a}$ entsprechend einer Rechtsschraube in Richtung des Vektors $\vec{b}$. Die Fortschreitrichtung der Schraube ergibt die Richtung des neuen Vektors $\vec{v}$.

Achtung: Diese Vektormultiplikation ist nicht kommutativ! Es gilt:

$$\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}). \qquad (2.10)$$

Vektoren können zyklisch vertausch werden. Betrachtet man das orthogonale kartesische Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ und $\vec{e_z}$, so gilt :

$$\begin{aligned} \vec{e_x} \times \vec{e_y} &= \vec{e_z} \\ \vec{e_y} \times \vec{e_z} &= \vec{e_x} \\ \vec{e_z} \times \vec{e_x} &= \vec{e_y}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.4 Kurven, Wegelemente

Man betrachte einen beliebig vorgegebenen Weg s, der die Punkte P und Q im Raum verbindet (Abb. 2.3).

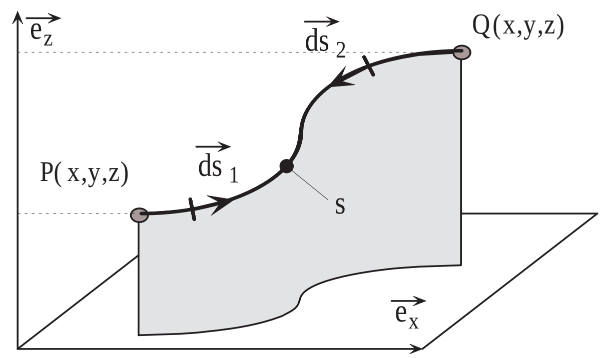


Abbildung 2.3: Gekrümmter Weg s im kartesischen Koordinatensystem.

Entlang des Weges s kann man nach zwei Richtungen schreiten. Setzt man das differentiell kleine (infinitesimale) Wegelement in Richtung von P nach Q an, ergibt sich $\vec{ds}_1$ als Wegelement bzw. von Q nach P ergibt sich für das Wegelement $\vec{ds}_2$. Entsprechend der Wahl der Anfangs- und Endpunkte sind sowohl die Richtung des Wegelementes sowie die untere und die obere Integrationsgrenze eines Wegintegrals festgelegt!

2.5 Flächen, Flächenelemente

Sehr häufig müssen physikalische Größen über eine Fläche (zb. Querschnitt eines Leiters, Oberfläche eines Körpers) integriert werden. Dazu ist es wieder notwendig, die Infinitesimalrechnung heranzuziehen. Für eine gekrümmte Fläche im Raum gilt:

Aus den differentiell kleinen Wegelementen $\vec{ds}_1$ und $\vec{ds}_2$ folgt für das Oberflächen- bzw. Flächenelement:

$$\vec{dA} = \vec{ds}_1 \times \vec{ds}_2 \qquad |\vec{dA}| = |\vec{ds}_1||\vec{ds}_2| \sin\varphi. \tag{2.12}$$

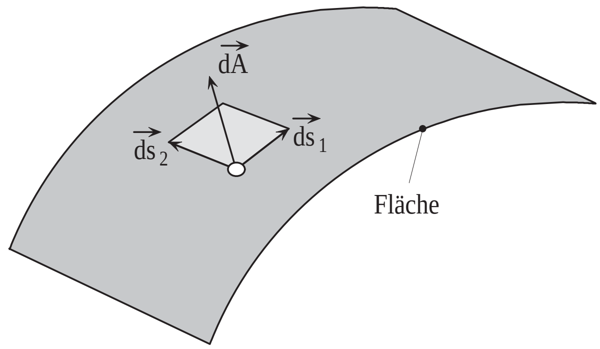


Abbildung 2.4: Flächenelement $d\vec{A}$ einer gekrümmte Fläche im Raum.

Dem Flächenelement wird, entsprechend den Regeln der Ex-Produktbildung eine Richtung zugeordnet. Im allgemeinen entspricht diese Richtung der aus einem Volumen gerichteten Normalen im betrachteten Punkt einer Oberfläche.

3 Elementare Funktionen

Viele Vorgänge in der Technik können mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen, zusammen mit den dazugehörigen Umkehrfunktionen beschrieben werden. Die Eigenschaften und Rechenregeln einiger dieser wichtigen elementaren Funktionen werden nachfolgend zusammengefasst.

3.1 Die trigonometrischen Funktionen

Zur Beschreibung zeitlich oder räumlich immer gleichmäßig wiederkehrender Vorgänge werden die sin- und die cos- Funktion verwendet. In Abb.3.1 sind deren Definitionen illustriert.

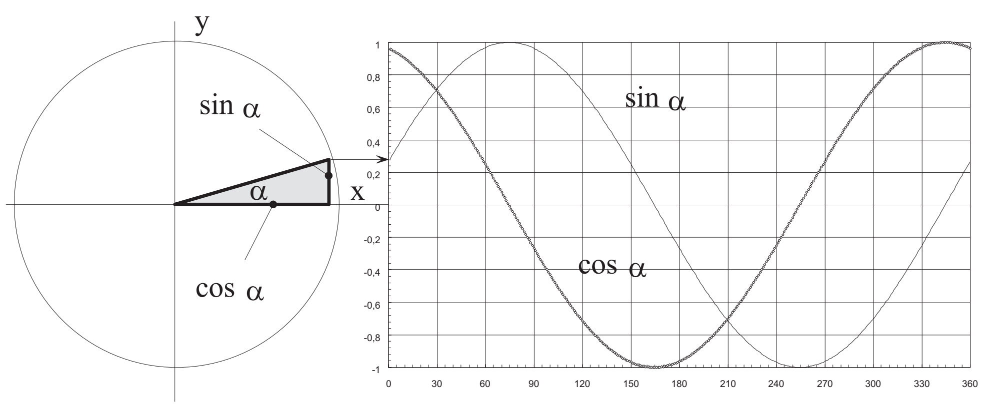


Abbildung 3.1: sin- und cos-Funktionen.

Die Projektionen des Zeigers der Länge 1 bei einem Winkel α auf die x-Achse bzw. y-Achse ergeben:

$$\begin{aligned} x &= 1 * \cos\alpha \\ y &= 1 * \sin\alpha. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Addiert man zum Winkel α ein beliebiges, ganzzahliges Vielfaches von 2π, so sind die

Funktionswerte x und y wieder gleich, sodass gilt:

$$\begin{aligned} x &= 1 * \cos(\alpha) = 1 * \cos(\alpha + k\,2\pi) \\ y &= 1 * \sin(\alpha) = 1 * \sin(\alpha + k\,2\pi) \qquad \forall \quad k \;=\; ganze\ Zahlen. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Daraus ergibt sich für $k = 1$ die Dauer einer Periode, die Periodendauer, zu:

$$T = 2\pi. \tag{3.3}$$

Für zeitharmonische Vorgänge mit einer beliebigen Amplitude A wird im Argument der $\sin -$ bzw. $\cos -$ Funktion entsprechend die Zeit als Variable geschrieben:

$$\begin{gathered} x(t) = A\,\cos(\frac{2\pi}{T}t + \alpha) = A\,\cos(\omega t + \alpha) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \\ y(t) = A\,\sin(\frac{2\pi}{T}t + \alpha) = A\,\sin(\omega t + \alpha). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Bei ortsharmonischen Funktionen entspricht die Periodendauerëiner geometrischen Größe L. Die Zweitvariable t muss durch eine Ortsvariable, zB. z ersetzt werden:

$$\begin{gathered} x(z) = A\,\cos(\frac{2\pi}{L}z + \alpha) = A\,\cos(\omega z + \alpha) \qquad \omega = \frac{2\pi}{L} \\ y(z) = A\,\sin(\frac{2\pi}{L}z + \alpha) = A\,\sin(\omega z + \alpha). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Aus Abb.3.1 ist nach Anwendung von Pythagoras ersichtlich, dass die Beziehung

$$\sqrt{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)} = 1 \tag{3.6}$$

gelten muss. Aus den Katheten und der Hypotenuse folgen die Beziehunegn:

$$\sin\alpha \;=\; \frac{GK}{HY} \qquad \cos\alpha = \frac{AK}{HY} \qquad \tan\alpha = \frac{GK}{AK} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{3.7}$$

AK entspricht der Ankathete zum Winkel α, GK entspricht der Gegenkathete zum Winkel α und HY steht für die Hypothenuse.

3.2 Allgemeine Potenzfunktion

Die Funktion

$$f(x) = x^b \tag{3.8}$$

ist als allgemeine Potenzfunktion zum Exponenten b definiert. Die dazugehörige Umkehrfunktion entspricht der Form:

$$f^{-1}(x) = g(x) = x^{\frac{1}{b}} \tag{3.9}$$

und ist wieder eine Potenzfunktion. Für $b = 2$ ist dies nachfolgend dargestellt:

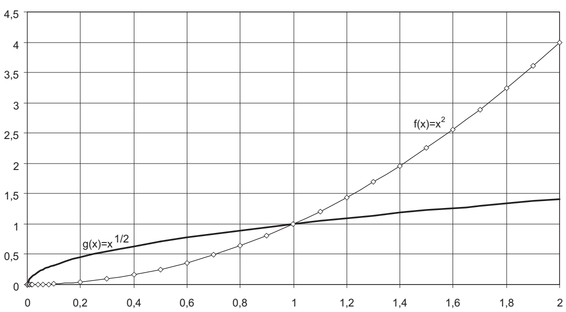


Abbildung 3.2: Allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$.

3.3 Allgemeine Exponentialfunktion

Eine Funktion der Form

$$f(x) = a^x \tag{3.10}$$

heisst allgemeine Exponentialfunktion zur Basis a.

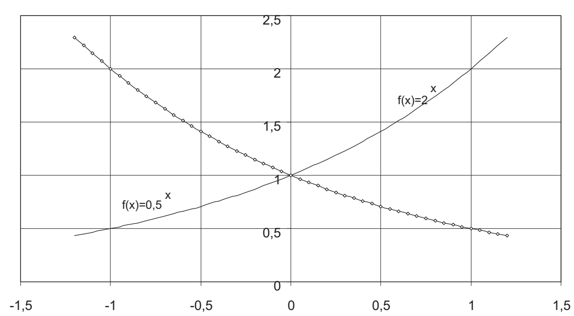


Abbildung 3.3: Allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$, $f(x) = (\frac{1}{2})^x$.

3.4 Allgemeiner Logarithmus

Die Umkehrfunktion zur allgemeinen Exponentialfunktion Gl. (3.10) hat die Form

$$g(x) = \log_a x \tag{3.11}$$

und wird Logarithmus zur Basis a genannt. Demgemäß gilt der Zusammenhang:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y \tag{3.12}$$

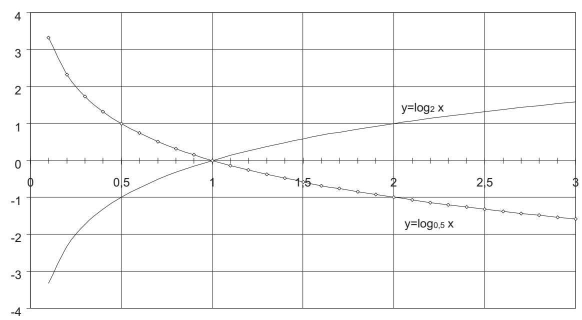


Abbildung 3.4: Allgemeiner Logarithmus $y = log_2\, x$, $y = log_{(\frac{1}{2})}\, x$.

3.5 Natürliche Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

Wird als Basis der allgemeinen Exponentialfunktion die Zahl e verwendet, erhält man die natürliche Exponentialfunktion.

$$y = e^x. \tag{3.13}$$

Deren Umkehrfunktion ist durch den natürlichen Logarithmus (logarithmus naturalis)

$$y = \log_e x = \ln x \tag{3.14}$$

gegeben.

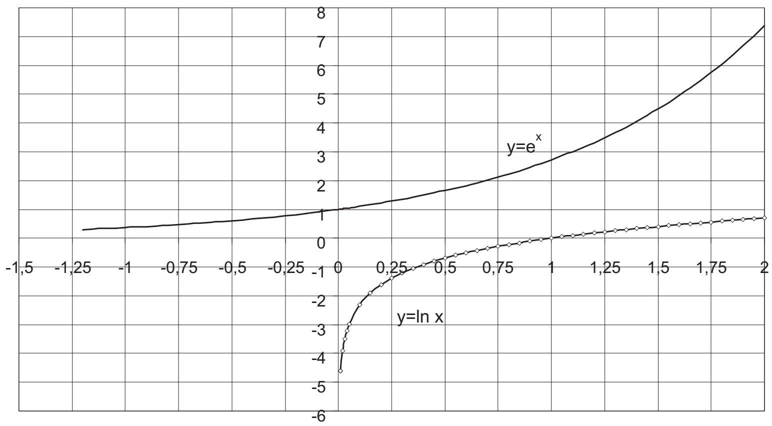


Abbildung 3.5: Natürliche Exponentialfunktion $y = e^x$ und natürlicher Logarithmus $y = \ln x$.

3.6 Dekadischer Logarithmus

Bedingt durch die Verwendung des dekadischen Ziffernsystems wird häufig der dekadische Logarithmus, jener Logarithmus mit der Basis 10 verwendet. In der Schreibweise wird dann die Basisangabe meist weggelassen.

$$y = 10^x \quad \Leftrightarrow \quad y = log_{10}\, x = log\, x. \tag{3.15}$$

3.7 Die logarithmischen Rechenregeln

Unabhängig von der Wahl der Basis gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

$$\begin{aligned}
a^{\log_a x} &= x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a(a^y) = y \\
\log_a a &= 1 \qquad \log_a 1 = 0 \\
\log_a (x_1 * x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2 \\
\log_a (\frac{x_1}{x_2}) &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \\
\log_a (x)^n &= n \log_a x \\
\log_a \frac{1}{x} &= -\log_a x.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

4 Die komplexen Zahlen

Unter einer komplexen Zahl versteht man eine formale Summe der Gestalt:

$$\underline{z} = a + jb. \tag{4.1}$$

a und b sind darin reelle Zahlen! Es wird vereinbart, eine komplexe Zahl durch einen Un-

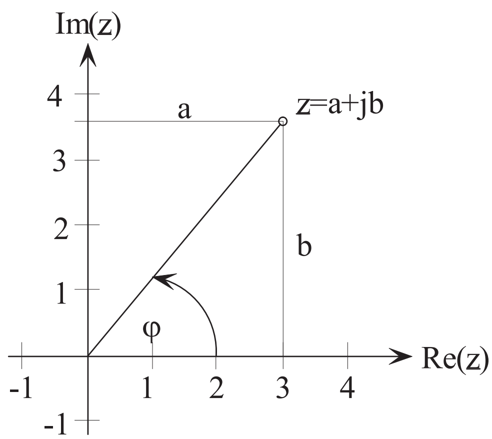


Abbildung 4.1: Komplexe Zahl in der Gaußschen Zahlenebene.

terstrich am Sympol zu kennzeichnen ($\underline{z}$). In dieser Darstellung entspricht a dem Realteil von $\underline{z}$ und b dem Imaginärteil von $\underline{z}$. Der Buchstabe j in Gleichung 4.1 kennzeichnet b als den Imaginärteil. j ist durch die Beziehung

$$j = \sqrt{-1} \qquad j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \tag{4.2}$$

definiert. Besteht die komplexe Zahl nur aus einem Imaginärteil, so spricht man von einer imaginären Zahl (zB. $\underline{z}= j3$). Dementsprechend ergibt eine komplexe Zahl ohne Imaginärteil immer eine reelle Zahl. Den Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems zu $\underline{z}$ ist der Betrag $|\underline{z}|$ der komplexen Zahl.

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{Re(\underline{z})^2 + Im(\underline{z})^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4.3}$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen ergeben sich Real- und Imaginärteil zu:

$$\begin{aligned} a &= |\underline{z}| * \cos\varphi \\ b &= |\underline{z}| * \sin\varphi \\ \arg(\underline{z}) &= \varphi = \arctan\frac{Im(\underline{z})}{Re(\underline{z})} = \arctan\frac{b}{a}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

sodass für $\underline{z}$ auch

$$\underline{z} = |\underline{z}|(\cos\varphi + j\sin\varphi) \tag{4.5}$$

geschrieben werden kann. Die Darstellung der komplexen Zahl $\underline{z}$ in der *Eulerschen Form* entspricht:

$$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{j\varphi} = z\, e^{j\varphi} \tag{4.6}$$

Zur komplexen Größe $\underline{z}$ gibt es eine dazu **konjugiert komplexe** Größe. Diese hat ein zur komplexen Größe umgekehrtes Vorzeichen im Imaginärteil und demzufolge auch im Winkel (Abbildung 4.2).

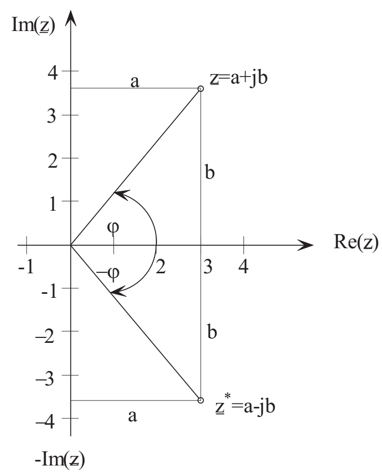


Abbildung 4.2: Komplexe und dazu konjugiert komplexe Größe.

Die konjugiert komplexe Größe wird mit einem hochgestellten Stern am Größensymbol gekennzeichnet. Es gilt:

$$\begin{aligned} Re(\underline{z}) &= a \qquad\qquad Im(\underline{z}) = b \\ Re(\underline{z}^*) &= a \qquad\qquad Im(\underline{z}^*) = -b \\ \underline{z}^* &= a - jb \;=\; z\, e^{-j\varphi} \\ z^* &= |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi^* &= \arctan\frac{-b}{a} = -\varphi \end{aligned} \tag{4.7}$$

Für Addition und Subtraktion ist es zweckmäßig, die Komponentendarstellung der Größen, d.h. die Darstellung durch Real- und Imaginärteil zu wählen. In diesem Falle können die Summen und Differenzen durch Addition bzw. Subtraktion jeweils der Realteile bzw. der Imaginärteile einfach gebildet werden.

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= a_1 + jb_1 \qquad \underline{z}_2 = a_2 + jb_2 \\ \underline{z} &= a + jb = \underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = [a_1 \pm a_2] + j\,[b_1 \pm b_2] \\ a &= a_1 \pm a_2 \qquad b = b_1 \pm b_2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Aus dem Cosinus-Satz kann der Betrag des Summenzeigers ermittelt werden.

$$z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 \pm 2 z_1 z_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{4.9}$$

Zur Multiplikation und Division eignet sich die Eulersche Darstellung am besten.

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= z_1\, e^{j\varphi_1} \qquad \underline{z}_2 = z_2\, e^{j\varphi_2} \\ \underline{z} &= \underline{z}_1 \underline{z}_2 = z_1 z_2\, e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \\ z &= z_1 z_2 \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Einem Sonderfall entspricht die Multiplikation einer komplexen Zahl mit deren konjugiert komplexen Zahl.

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= z_1\, e^{j\varphi_1} \qquad \underline{z}_1^* = z_1\, e^{-j\varphi_1} \\ \underline{z} &= \underline{z}_1 \underline{z}_1^* = z_1 z_1\, e^{j(\varphi_1-\varphi_1)} \\ z &= z_1 z_1\, e^{j0} = z_1^2 \qquad \varphi = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Resultate aus der Division zweier komplexer Größen:

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= z_1\, e^{j\varphi_1} \qquad \underline{z}_2 = z_2\, e^{j\varphi_2} \\ \underline{z} &= \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1}{z_2}\, e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = z\, e^{j\varphi} \\ z &= \frac{z_1}{z_2} \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

und für die Division mit der konjugiert komplexen Größe folgt:

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= z_1\, e^{j\varphi_1} \qquad \underline{z}_1^* = z_1\, e^{-j\varphi_1} \\ \underline{z} &= \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_1^*} = \frac{z_1}{z_1^*}\, e^{j(\varphi_1+\varphi_1)} = z\, e^{j2\varphi_1} \\ z &= 1 \qquad \varphi = 2\varphi_1 \end{aligned} \tag{4.13}$$

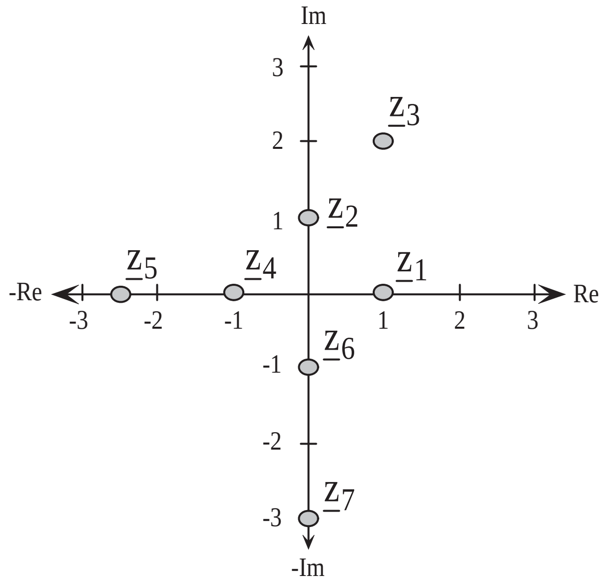


Abbildung 4.3: Einige komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

$$
\begin{aligned}
\underline{z_1} &= 1 = 1 + j0 = \sqrt{1^2 + 0^2}\, e^{j0^\circ} = 1\, e^{j0^\circ} \\
\underline{z_2} &= j = 0 + j1 = \sqrt{0^2 + 1^2}\, e^{j90^\circ} = 1\, e^{j90^\circ} \\
\underline{z_3} &= 1 + j2 = \sqrt{1^2 + 2^2}\, e^{j\varphi} = \sqrt{5}\, e^{j \arctan \frac{2}{1}} = \sqrt{5}\, e^{j63{,}4^\circ} \\
\underline{z_4} &= -1 = \sqrt{1^2 + 0^2}\, e^{j180^\circ} = \sqrt{1}\, e^{j180^\circ} = \sqrt{1}\, e^{-j180^\circ} \\
\underline{z_5} &= -2.5 = \sqrt{2.5^2 + 0^2}\, e^{j180^\circ} = 2.5\, e^{j180^\circ} = 2.5\, e^{-j180^\circ} \\
\underline{z_6} &= -j = 0 - j1 = \sqrt{0^2 + 1^2}\, e^{-j90^\circ} = 1\, e^{-j90^\circ} = 1\, e^{j270^\circ} \\
\underline{z_7} &= -3j = 0 - j3 = \sqrt{0^2 + 3^2}\, e^{-j90^\circ} = 3\, e^{-j90^\circ} = 3\, e^{j270^\circ}
\end{aligned}
$$

Einige spezielle Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
j &= 1\,e^{j90^\circ} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{j} = \frac{1}{1\,e^{j90^\circ}} = 1\,e^{-j90^\circ} = -j \\
j^2 &= j \cdot j = 1\,e^{j90^\circ} \cdot 1\,e^{j90^\circ} = 1\,e^{j180^\circ} = -1 \\
j^3 &= j^2 \cdot \jmath = -1 \cdot j = -j \\
(a + jb) \cdot (a - jb) &= a^2 + jab - jab - j^2 b^2 = a^2 + b^2.
\end{aligned}
$$

Aufteilen eines komplexen Ausdruckes in Realteil und Imaginärteil durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit dem konjugiert komplexen Nennerterm:

$$
\begin{aligned}
\underline{z} &= \frac{(a + jb)}{(c + \frac{1}{jd})} = \frac{(a + jb)}{(c - j\frac{1}{d})} \frac{(c + j\frac{1}{d})}{(c + j\frac{1}{d})} = \\
&= \frac{ac + jbc + j\frac{a}{d} + j^2\frac{b}{d}}{c^2 - j\frac{c}{d} + j\frac{c}{d} - j^2\frac{1}{d^2}} = \\
&= \underbrace{\frac{ac - \frac{b}{d}}{c^2 + \frac{1}{d^2}}}_{Realteil} + j \underbrace{\frac{bc + \frac{a}{d}}{c^2 + \frac{1}{d^2}}}_{Imaginärteil}
\end{aligned}
$$