Aufgaben
Einführung in die Messtechnik
Messen - Vorgang und Tätigkeit

Wolfgang Kessel
Braunschweig

AUFGABE01: Klemmspannung einer elektrischen Spannungsquelle.

In der Vorlesung wurde die Rückwirkung durch die Belastung der Spannungsquelle bei der Messung ihrer Klemmspannung behandelt (MEAS02F14).

a) Geben Sie die Gleichung der Kennlinie der (durch das Spannungsmessgerät) belasteten Quelle in den Verhältnisgrößen V/V_0 und I/I_{Short} (beide besitzen die Einheit 1) an. I_{Short} ist der Kurzschlussstrom, der sich einstellt, wenn die beiden Klemmen der Quelle (sehr gut leitend) mit einer verbunden werden, d.h. $R_{\mathrm{In}} = 0$. Wie groß ist die Klemmspannung der Quelle in diesem Fall?

b) Welchen Wert besitzt der Kurzschlußstrom einer elektronischen Spannungsquelle mit dem Standard-Innenwiderstand $R_{\mathrm{Out}} = 50\ \Omega$, ihre EMK (bereitgestellte Spannung im unbelasteten Fall) $10\ \mathrm{V}$ beträgt?

c) Wie weit weicht der von einem Spannungsmessgerät angezeigte Wert von der EMK ab, wenn der Eingangswiderstand des Messgerätes $1\ \mathrm{M\Omega}$ ($= 1 \cdot 10^6\ \Omega$) beträgt?

AUFGABE02: Digitales (elektrisches) Spannungsmessgerätes.

a) Berechnen Sie die Auflösungen eines **2½-**stelligen digitalen Spannungsmessgerätes mit **11** Messbereichen **10 mV,...,1000 V**, die wie **1:2:10** gestuft sind und geben Sie das Ergebnis in einer Tabelle an.

Messbereich	Auflösung
0...10 mV	
0...20 mV	
:	
:	
0...200 V	
0...1000 V	

b) Wie ändert sich die Tabelle, wenn es sich um ein **3-**stelliges digitales Spannungsmessgerät handelt, das den Gesamtbereich wie in Teilaufgabe a) vollständig überdeckt, die Stufung aber **1:3:10** beträgt?

AUFGABE03: Korrektion der thermischen Längenausdehnung.

In einem Laboratorium wurde die Länge eines aus Stahl gefertigten Parallel-endmaßes (Stab mit rechteckigem Querschnitt und parallelen Stirnflächen) der Nennlänge $150\ \mathrm{mm}$ bei der im Laboratorium herrschenden Temperatur $\vartheta = 23°\mathrm{C}$ mit $l = 150{,}004\,7\ \mathrm{mm}$ ermittelt.

Das Parallelendmaß gehört zur Klasse 1 nach DIN EN ISO 3650. Seine Länge darf nach der Norm bei der Referenztemperatur $\vartheta_0 = 20°\mathrm{C}$ um nicht mehr als $\pm 0{,}5\ \mu\mathrm{m}$ von der Nennlänge abweichen.

Zur Prüfung, ob das Parallelendmaß der Norm entspricht, muss die ermittelte Länge auf die Referenzbedingung umgerechnet werde, d.h. an der ermittelten Länge ist eine Korrektion anzubringen, mit der die thermische Ausdehnung aufgrund des Temperaturunterschiedes zwischen der Laboratoriums- und der Referenztemperatur berücksichtigt wird.

Bei einem festen Körper hängt irgendeine seiner Längen l_ϑ bei der Temperatur ϑ mit der entsprechenden Länge l_0 bei der Referenztemperatur ϑ_0 über die Gleichung

$$l_\vartheta = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

zusammen, wobei $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0$ und α der lineare (thermische) Ausdehnungs-koeffizient des Materials ist, aus dem der feste Körper besteht.

Lineare (thermische) Ausdehnungskoeffizient von Stahl: $\alpha_{\mathrm{STEEL}} = 11 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$.

a) Um welchen Betrag ist die ermittelte Länge aufgrund des Temperatur-unterschiedes zu korrigieren?

b) Erfüllt das Parallelendmaß die Forderung der Norm?

Hinweis: Lösen Sie die Gleichung für die thermische Ausdehnung einer Länge nach der unbekannten Länge l_0 auf. Die thermische Längenausdehnung ist eine Korrektion (kleine Größe), so dass Sie eine geeignete lineare Näherung aus nachfolgender Tabelle benutzen können.

Tabelle: Näherungen von Ausdrücken bei kleinem Argument ($a,b<<1$)

Ausdruck	Lineare Näherung
$\frac{(1+a_1)\cdot(1+a_2)}{(1+b_1)\cdot(1+b_2)}$	$1+a_1+a_2-b_1-b_2$
$(1+a_1)\cdot(1+a_2)$	$1+a_1+a_2$
$(1+a)^n$	$1+n\cdot a$
$\frac{1}{1+b}$	$1-b$
$\sqrt[n]{1+a}$	$1+\frac{1}{n}\cdot a$
$\sqrt{1+a}$	$1+\frac{1}{2}\cdot a$
$\frac{1}{\sqrt{1+a}}$	$1-\frac{1}{2}\cdot a$

Tabelle: Näherungen von Ausdrücken bei kleinem Argument ($a, b, \alpha, \beta \ll 1$)

Ausdruck	Lineare Näherung
$\exp(a) = e^a$	$1 + a$
u^a	$1 + a \cdot \ln(u)$
$\ln(1 + a)$	a
$\sin(\varphi + \alpha)$	$\sin(\varphi) + \alpha \cdot \cos(\varphi)$
$\sin(\alpha)$	α
$\cos(\varphi + \alpha)$	$\cos(\varphi) - \alpha \cdot \sin(\varphi)$
$\cos(\alpha)$	1
$\sqrt{a \cdot b} \quad (a \cong b)$	$\dfrac{a + b}{2}$

AUFGABE04: Grenzen der relativen Messabweichung.

Im Laboratorium wird ein Spannungsmessgerät der Klasse **2,5** mit den Messbereichen **1 V; 3 V; 10 V; 30 V; 100 V** verwendet.

a) Stellen Sie den Bereich der möglichen richtigen Werte in Abhängigkeit vom jeweiligen angezeigten Wert grafisch dar.

b) Stellen Sie den Verlauf der Grenzen der auf den richtigen Wert bezogenen (relativen) Messabweichung in Abhängigkeit vom der Anzeige in einem Diagramm dar.

Hinweis: Kann es sinnvoll sein, wie in der Vorlesung die Eingangs-/ Ausgangsgrößen auf die Werte bei Vollausschlag zu beziehen? Warum?

AUFGABE05: orthodoxe/moderne Form der MPE.

Hersteller von Messgeräte für Präzisionsmessungen klassieren ihre Geräte nicht mehr nach der bisherigen (orthodoxen) Methode, sondern geben die maximal zulässige Messabweichung in der Form

$$p_1 \text{ Prozent der Anzeige} + p_0 \text{ Prozent des Bereiches}$$

an, z.B.

$$\mathbf{1{,}5\% \text{ der Anzeige} + 0{,}5\% \text{ des Bereiches}}.$$

In eine Größen-Ungleichung übersetzt lautet diese Hersteller-Angabe

$$\left|\Delta X_{\mathrm{Ind}}\right| \leq e_1 \cdot X_{\mathrm{Ind}} + e_0 \cdot X_{\mathrm{Ind,max}}$$

mit den nicht-negativen Koeffizienten e_1 und e_0 oder in der System-Sprechweise

$$\left|\Delta X_{\mathrm{Out}}\right| \leq e_1 \cdot X_{\mathrm{Out}} + e_0 \cdot X_{\mathrm{Out,max}}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist eine monoton zunehmende Funktion des Wertes der Ausgangsgröße und es gilt

$$X_{\mathrm{Out}} \leq X_{\mathrm{Out,max}} \quad \Rightarrow \quad e_1 \cdot X_{\mathrm{Out}} + e_0 \cdot X_{\mathrm{Out,max}} \leq \left(e_1 + e_0\right) \cdot X_{\mathrm{Out,max}}$$

Man führt daher für die messtechnische Diskussion zweckmäßiger Weise wieder eine Größe

$$e_{\mathrm{min}} = e_1 + e_0$$

ein, womit sich

$$\left|\Delta X_{\mathrm{Out}}\right| \leq e_{\mathrm{min}} \cdot \left(w_1 \cdot X_{\mathrm{Out}} + w_0 \cdot X_{\mathrm{Out}}\right)$$

mit den Gewicht-Koeffizienten

$$w_i = \frac{e_i}{e_1 + e_0} \qquad (i = 0{,}1)$$

ergibt.

Die Gewichtskoeffizienten genügen der Normierungsbedingung

$$w_1 + w_0 = 1$$

Warum?

a) Geben Sie eine Größengleichung für das Verhältnis e/e_{min} an
(*e* - auf den angezeigten Wert bezogene (relative) Fehlergrenze)
und stellen Sie die Beziehung für die o.a. Herstellerangaben grafisch dar.
Hinweis: Es ist messtechnisch nicht sinnvoll Werte von *e* anzugeben,
die das Zehnfache von e_{min} übersteigen!

b) Drücken Sie in kurzen Worten aus, was das Diagramm über die (möglichen) richtigen Werte der Messgröße X_{In} aussagt.

c) Aus der in der Teilaufgabe a) aufgestellten allgemeinen Beziehung ergeben sich die beiden mit der Normierungsbedingung der Gewichtskoeffizienten verträglichen Grenzfälle $w_1 = 0$ bzw. $w_0 = 0$. Wie liegt die in der ersten Teilaufgabe ermittelte Kurve zu den Kurven dieser Grenzfälle. Zeichnen Sie die Kurven der Grenzfälle in Ihr Diagramm ein.

AUFGABE06: Maximal zulässige Messabweichung.

Der Hersteller eines 3½-stelligen Spannungsmessgerät hoher Präzision macht in der Bedienungsanleitung (manual) folgende Angabe zur maximal zulässigen Messabweichung (dort "accuracy" genannt) in den verschiedenen Messbereichen (ranges) ["reading" bedeutet "abgelesener Wert"]

Range	Accuracy
0...20 mV	**0,04%Reading + 2 Digit**
0...200 mV	**0,04%Reading + 1 Digit**
0...2 V	**0,03%Reading + 1 Digit**
0...20 V	**0,03%Reading + 1 Digit**
0...200 V	**0,03%Reading + 1 Digit**
0...1200 V	**0,035%Reading + 1 Digit**

a) Berechnen Sie hieraus die Koeffizienten e_0 und e_1 (siehe Aufgabe04) für einzelnen Messbereiche und daraus die auf den Vollausschlag bezogene kleinste maximal zulässige Messabweichung e_{min} sowie die Gewichtsfaktoren w_0 und w_1

b) Wie groß ist die auf die Anzeige bezogene (relative) maximal zulässige Messabweichung in den ersten **5** Messbereichen, wenn dort die Ziffernfolgen

28; 456; 925; 1223; 1982

abgelesen werden?