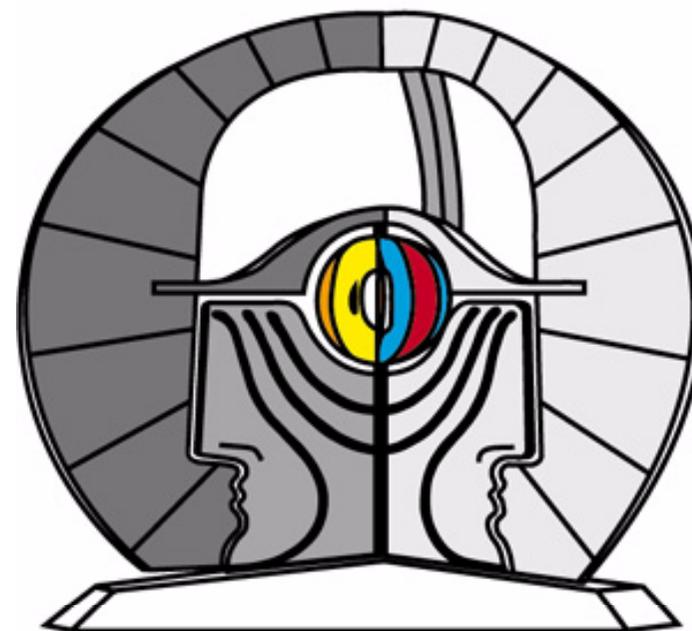


Einführung in die Messtechnik

Kenngößen von Messmitteln

Wolfgang Kessel
Braunschweig



Was ist ein System?

Jede technische Einrichtung kann als System aufgefasst werden (spezielle Betrachtungsweise):

Der betrachtete Teil wird gegen seine Umgebung so abgegrenzt (Abstraktion), dass man sich auf endlich viele Wechselwirkungen mit der Umwelt beschränken kann, i.Allg.

- stoffliche,
- energetische oder
- informatorische (Austausch von Informationen).

Bei einem *Informationssystemen* konzentriert man sich auf den Austausch von Informationen:

- wie hängt die abgegebene Information von der zugeführten ab?
- läuft die Information-Umformung in der gewünschten Weise ab?

Ein Informationssystem ist eine Form eines Übertragungsgliedes, dem i.Allg. mehrere Informationen als Gruppe von Eingangsgrößen

$$\underline{X}_{\text{In}} = (X_{\text{In},1}, X_{\text{In},2}, \dots, X_{\text{In},n})$$

zu geführt werden.

Durch die Verarbeitung im System entsteht daraus eine Gruppe von Ausgangsgrößen

$$\underline{X}_{\text{Out}} = (X_{\text{Out},1}, X_{\text{Out},2}, \dots, X_{\text{Out},m})$$

von denen die abgegebene Information getragen wird.

Die Verarbeitung wird durch mathematische Operationen beschrieben, die zusammengefasst eine Funktion (Heaviside⁺)-/Response-Funktion)

$$\underline{X}_{\text{Out}} = h(\underline{X}_{\text{In}})$$

ergeben, welche die über die Eingangsgrößen zugeführte Information auf die von den Ausgangsgrößen getragene abgegebene Information abbildet.

⁺) *Oliver Heaviside (1850-1925)*, britischer Physiker und Mathematiker.

Die *Übertragungseigenschaften* des Systems sind durch die charakteristischen in der mathematischen Abbildung niedergelegten Beziehungen zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen gegeben.

Gleichartige Systeme besitzen gleichartige Übertragungseigenschaften.

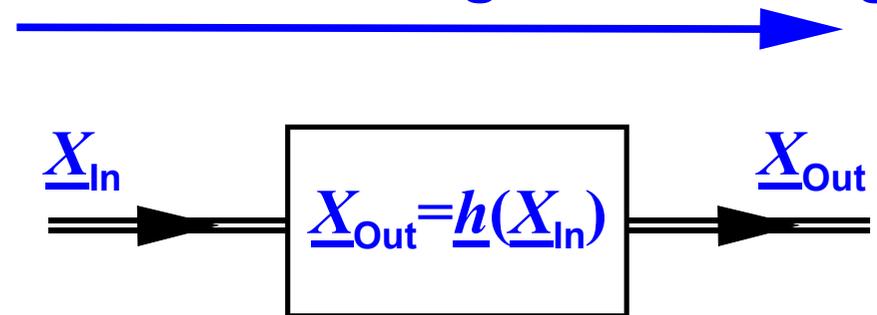
Betrachtung eines Informationssystems als Übertragungsglied.

$\underline{X}_{In} = (X_{In,1}, X_{In,2}, \dots, X_{In,n})$ - Eingangsgrößen, tragen zugeführte Information;

$\underline{X}_{Out} = (X_{Out,1}, X_{Out,2}, \dots, X_{Out,m})$ - Ausgangsgrößen, tragen abgegebene Information;

$\underline{X}_{Out} = h(\underline{X}_{In})$ - Verarbeitung, Zusammenfassung der mathematischen Operationen in einer Funktion.

Ursache-Wirkung-Ausbreitung



Was ist ein Signal?

Träger der Messinformation ist ein *Signal*

- zeitlich veränderliche physikalische Größe (Zeitfunktion einer physikal. Größe);
- besitzt einen wahrnehmbaren oder anderweitig verarbeitbaren Parameter (*Informationsparameter*), der ausreichend viele Werte annehmen kann, um die Information aufzunehmen;
- die Werte des Informationsparameters geben die Werte der signalisierten Größe (Messgröße) eindeutig und reproduzierbar wieder (eindeutige Abbildung der Messgröße auf den Informationsparameter).

Fasst man schon die Messgröße als Signal auf, so ist der Messvorgang ein *Signalumformungsprozess*, in dessen Verlauf das Eingangssignal "Messgröße" (i.Allg. über mehrere Zwischensignale) in das Ausgangssignal "Messwert" umgeformt wird.

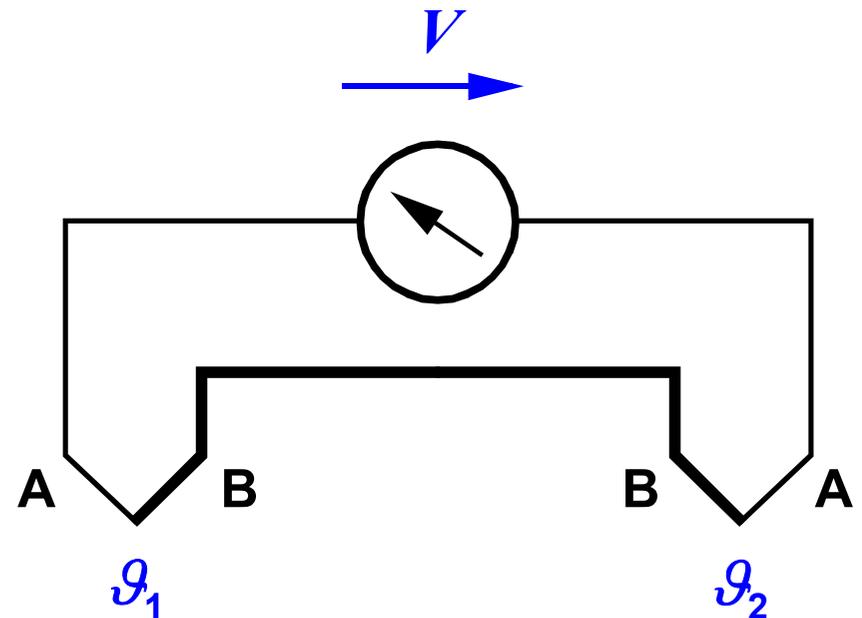
BEISPIEL Thermoelement

Ein Thermoelement besteht aus zwei Drähten aus verschiedenen Material, die an einem ihrer Enden (meist durch Löten) in innigem Kontakt gebracht sind. An der Kontaktstelle zwischen den verschiedenen Materialien bildet sich eine (elektrische) Kontaktspannung als Differenz zweier für das jeweilige Material spezifischen Spannungen aus.

Schematischer Aufbau eines Stromkreise mit zwei Thermoelementen aus den Materialien **A** und **B**.

ϑ_1, ϑ_2 - Temperaturen der beiden Kontaktstellen,

V - elektrische Spannung im Stromkreis.



Der Versuch diese Kontaktspannung zu messen führt, wenn nicht spezielle Messverfahren benutzt werden, sofern die beiden Drähte die gleiche Temperatur besitzen, zu keinem Erfolg:

in einem geschlossenen Kreis aus zwei verschiedenen Materialien sind stets zwei Kontaktstellen vorhanden, deren Kontaktspannungen sich bei Temperaturgleichheit gegenseitig aufheben

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \quad \Rightarrow \quad V_{A,B} + V_{B,A} = 0$$

Die Kontaktspannungen der Materialien ändern sich jedoch in unterschiedlicher Weise mit der Temperatur. Werden die beiden Kontaktstellen auf verschiedenen Temperaturen gehalten, stellt sich eine von dem Temperaturunterschied zwischen den beiden Kontaktstellen abhängige elektrische (Thermo-)Spannung $E_{A,B}$ ein ((elektromotorische) Thermokraft), die mit einem elektrischen Spannungsmessgerät hinreichender Empfindlichkeit gemessen werden kann.

Differentielle (auf Kupfer bezogene)
Thermokräfte e einiger Metalle über
der Temperatur ϑ ,
Temperaturbereich **0...200°C**.

Die differentielle Thermokraft der
Materialkombination **AB** ergibt sich
aus der Beziehung

$$e_{\vartheta,AB} = e_{\vartheta,A} - e_{\vartheta,B}$$

Fe - Eisen;	Ag - Silber;
Mo - Molybdän;	Sn - Zinn;
Zn - Zink;	Al - Aluminium;
Cd - Cadmium;	Pt - Platin;
Cu - Kupfer;	Pd - Palladium.

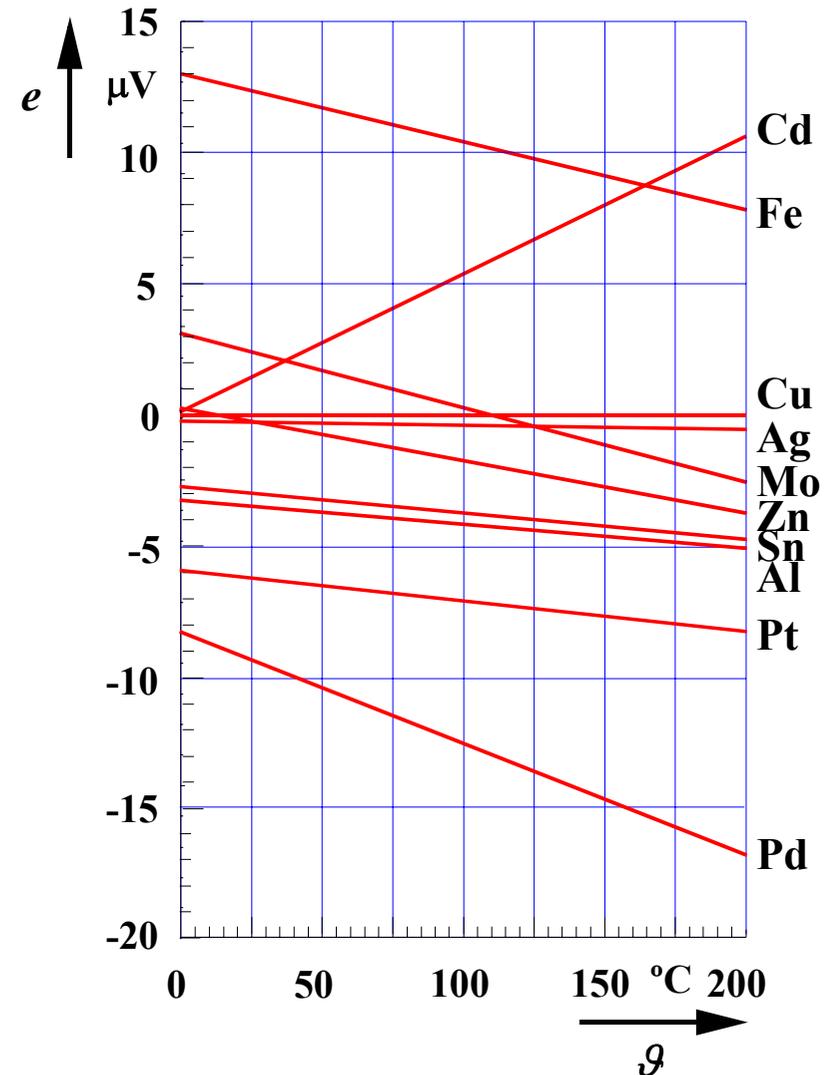


Tabelle der Koeffizienten der auf Kupfer bezogenen differentiellen Thermokräfte

$$e_{\vartheta} = a + b \cdot (\vartheta - \vartheta_0)$$

verschiedener Metalle,

Temperaturbereich **0...200°C**.

Die differentielle Thermokraft einer Materialkombination **AB** ergibt sich aus der Beziehung

$$e_{\vartheta,AB} = e_{\vartheta,A} - e_{\vartheta,B}$$

und hieraus die Thermokraft

$$E_{A,B}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e_{\vartheta',A,B} d\vartheta'$$

Metall	Symbol	Koeffizienten der differentiellen Thermokraft	
		a in $\mu\text{V/K}$	b in $\mu\text{V/K}^2$
Eisen	Fe	13,403	-0,0275
Molybdän	Mo	3,115	-0,0337
Zink	Zn	0,270	-0,0196
Cadmium	Cd	0,124	+0,0526
Gold	Au	0,122	-0,0004
Kupfer	Cu	0,0	0,0
Silber	Ag	-0,221	-0,0011
Zinn	Sn	-2,546	-0,0110
Blei	Pb	-2,777	-0,0095
Aluminium	Al	-3,193	-0,0097
Platin	Pl	-5,869	-0,0064
Palladium	Pd	-8,273	-0,0449
Nickel	Ni	-20,390	-0,0453

Bei einem Thermoelement in Verbindung mit einem Spannungsmessgerätes auftretende Signale:

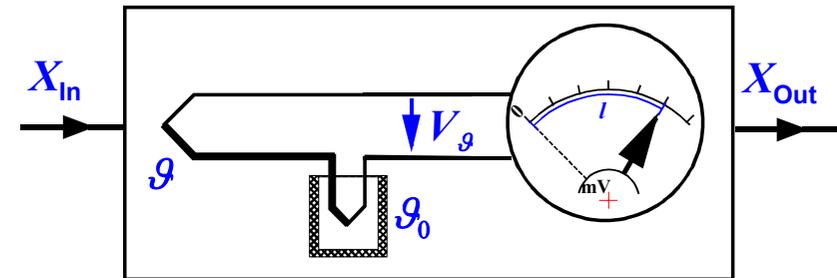
- a) Betrachtung als Gesamtsystem,
- b) Betrachtung als Reihenschaltung zweier Übertragungsglieder.

ϑ - Temperatur (Messgröße),

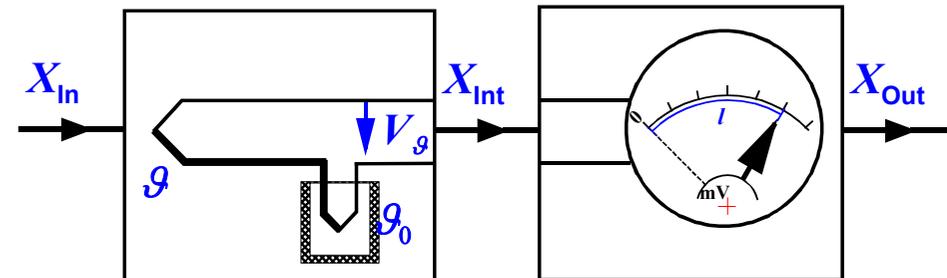
ϑ_0 - Temperatur der Vergleichsstelle,

V_{ϑ} - Thermospannung, internes, primäres Abbildungssignal.

a)



b)



Thermoelement mit (Drehspul-) Spannungsmessgerät zur Anzeige der Thermospannung

a) Thermoelement mit Anzeigegerät als Gesamtsystem

signalisierte Größe: Temperatur ϑ ,
Signalträger: Weg der Zeigerspitze
Informationsparameter: Länge l des vom Zeiger zwischen der Nullmarke und der Anzeige zurückgelegten Weges

b) Thermoelement und Anzeigegerät als getrennte Systeme

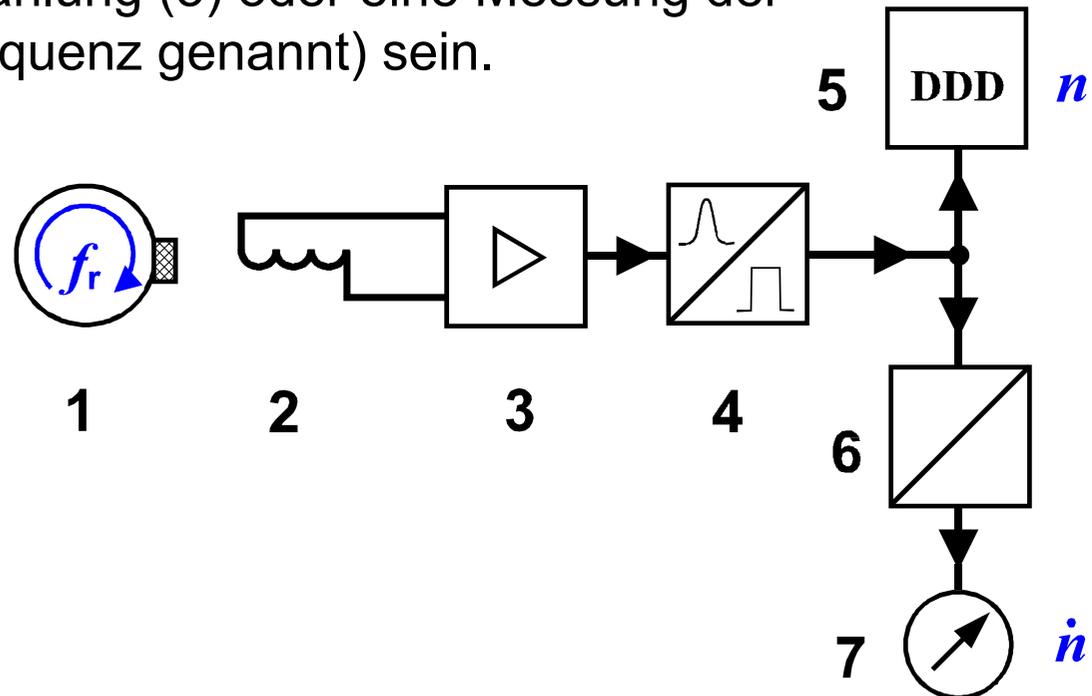
	Thermoelement	Anzeigegerät (Spannungsmessgerät)
signalisierte Größe:	Temperatur ϑ ,	Thermospannung V_{ϑ}
Signalträger:	Thermospannung V_{ϑ}	Weg der Zeigerspitze
Informationsparameter:	Wert der Thermospannung	Länge l des vom Zeiger zwischen der Nullmarke und der Anzeige zurückgelegten Weges

BEISPIEL Impulstachometer (Drehzahl-Messgerät)

Auf eine rotierende Welle (1) ist ein Permanentmagnet (2) befestigt, der beim periodischen Vorbeilaufen in einer Spule (3) Spannungsimpulse induziert, die in einer geeigneter Weise geformt (4) und weiterverarbeitet werden. Die Weiterverarbeitung kann als Impulzzählung (5) oder eine Messung der Impulsrate (häufig unschön Impulsfrequenz genannt) sein.

Bei einer Drehzahlmeseinrichtung auftretende Signale.

- 1 Welle;
- 2 Permanentmagnet;
- 3 Spule;
- 4 Impulsformung;
- 5 Zähler
- 6 Mittelwert-Bildung (Integration);
- 7 Anzeigegerät.



	Impulszählung	Impulsratenanzeige
signalisierte Größe:	Anzahl der Umdrehungen	Drehzahl/Drehfrequenz (in s^{-1})
Signalträger:	Impulsfolge	Impulsfolge
Informationsparameter:	Anzahl n (in Impulse)	Impulsrate dn/dt (in Impulse/s)

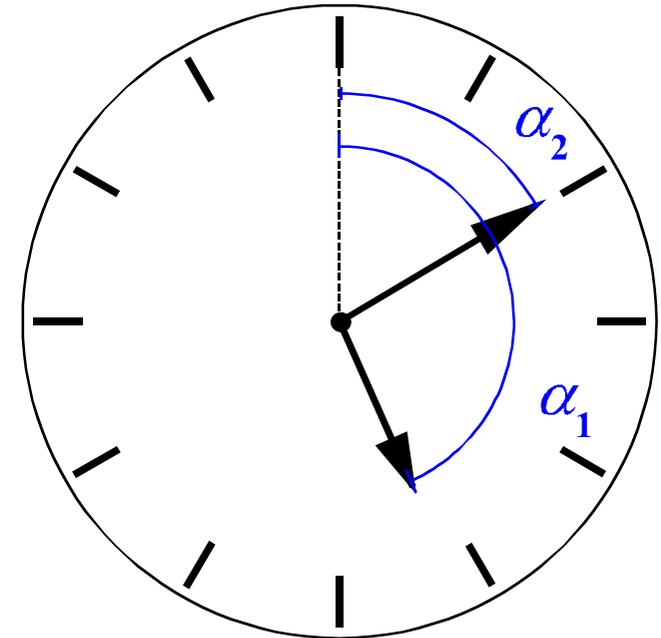
BEISPIEL Uhr

Bei einer Uhr auftretende Signale:

α_1 – (Stunden-)Winkel,

α_2 – (Minuten-)Winkel,

jeweils gemessen von der
mitternächtlichen NULL-Stellung.



signalisierte Größe:

Zeit t ,

Signalträger:

Zeigerstellung

Informationsparameter:

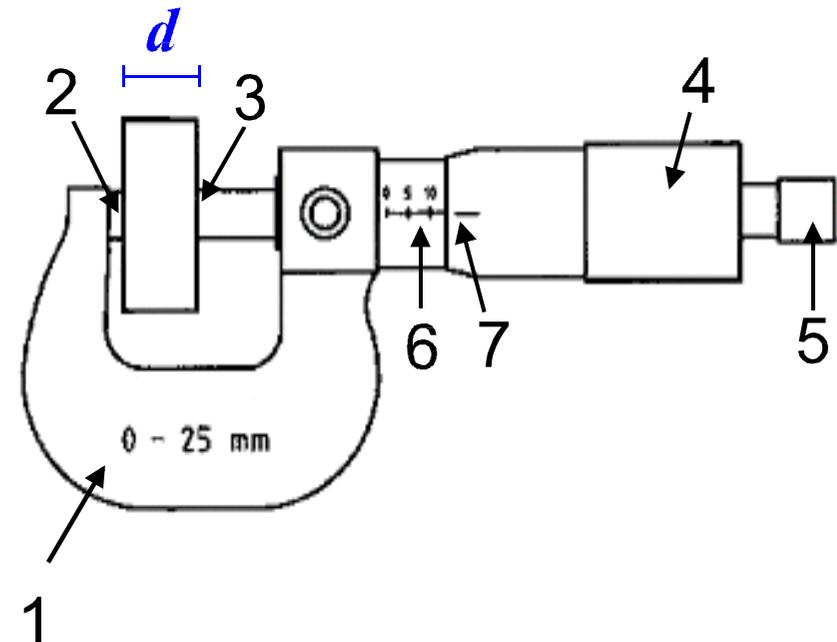
Winkel α_1 zwischen Nullmarke und kleinem Zeiger
(Grobskala) sowie

Winkel α_2 zwischen Nullmarke und großem Zeiger
(Feinskala).

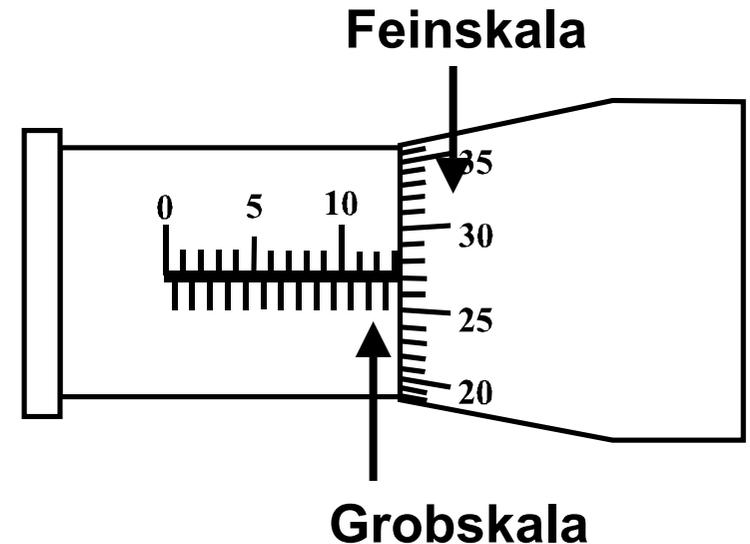
BEISPIEL Bügel-Messschraube

Ein stabiler Bügel (1) trägt auf dem einen Schenkel eine feste Messfläche (2) und auf dem anderen Schenkel ein Lager für einen Stempel mit der zweiten beweglichen Messfläche (3).

- 1 stabiler Bügel;
- 2 feste Messfläche;
- 3 verschiebbare Messfläche;
- 4 Rändlung, grobes Heranführen der Messflächen an das Messobjekt;
- 5 Rändlung, feinfühliges Heranführen mit definierter Messkraft über einstellbare Rutschkupplung;
- 6 Grobskala;
- 7 Feinskala.

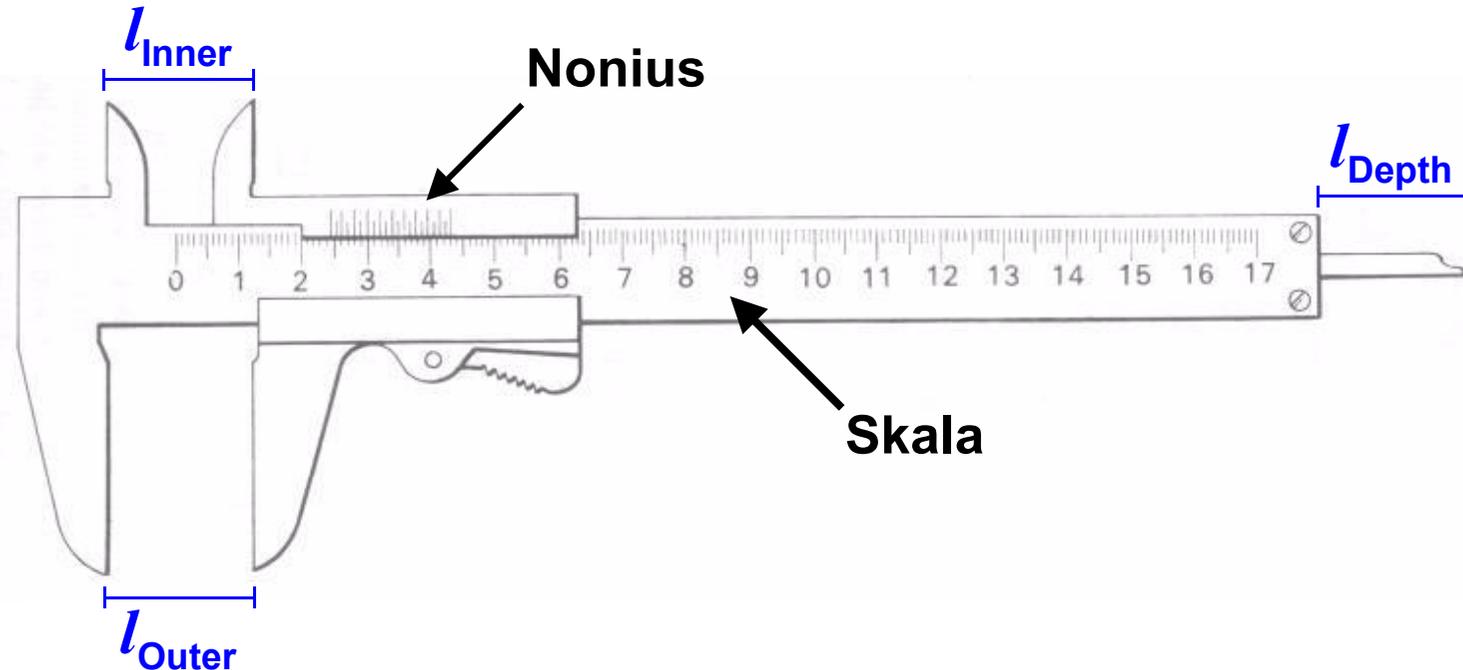


Der Stempel kann mit einer (nicht sichtbaren) Schraube mit präzise gearbeiteter Steigung durch Drehen der Rändelungen (4) und (5) definiert verschoben werden. Der Abstand d zwischen den beiden Messflächen wird über eine Grobskala (5) und eine Feinskala (6) abgelesen.

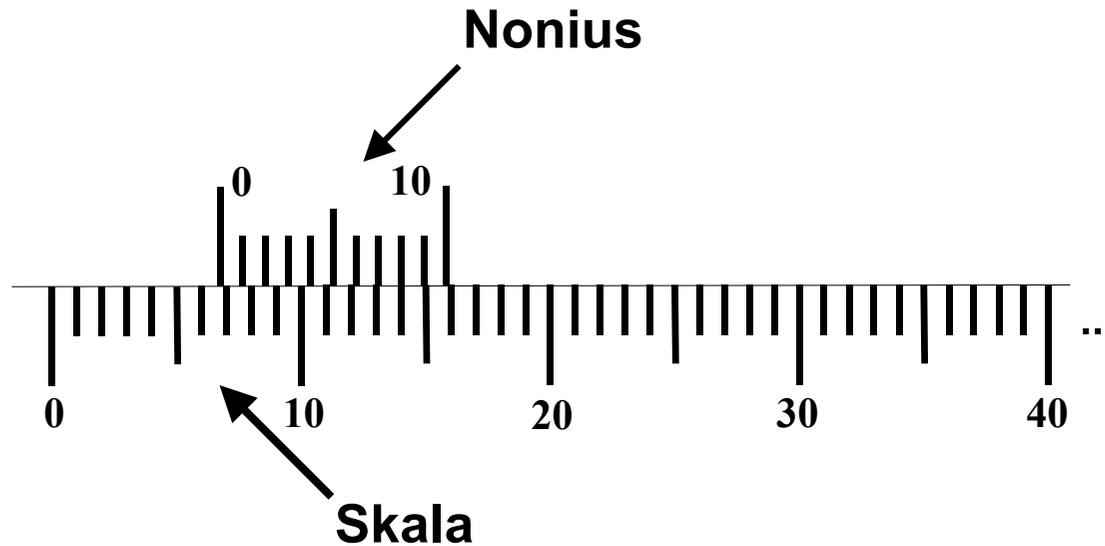


signalisierte Größe:	Länge d ,
Signalträger:	Stellung der Marken
Informationsparameter:	Länge l_1 , angezeigt auf der Primärskala (Grobskala) sowie Länge l_2 , angezeigt auf der Sekundärskala (Feinskala).

BEISPIEL Messschieber



Mit dem Messschieber können Außenabmessungen l_{Outer} , Innenabmessungen l_{Inner} und Tiefen l_{Depth} von Bohrungen ermittelt werden.



signalisierte Größe:

Länge l ,

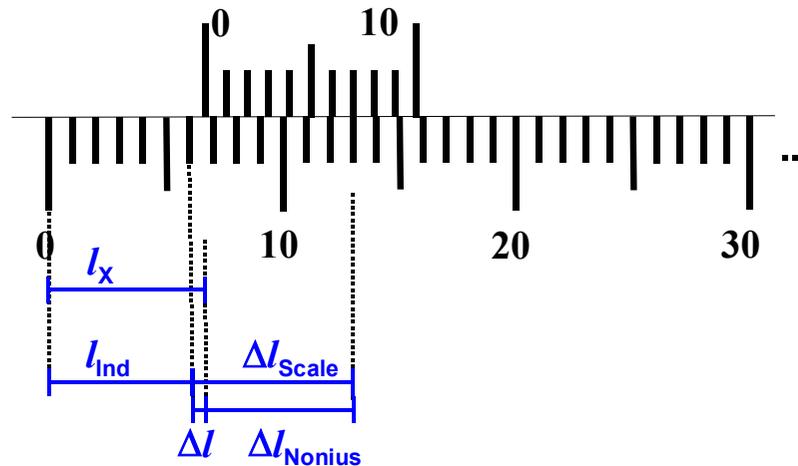
Signalträger:

Stellung der Marken

Informationsparameter:

Länge l_1 , angezeigt auf der Primärskala (Grobskala)
sowie

Länge l_2 , angezeigt auf der Noniuskala (Feinskala).



Zusammenhang zwischen der zu ermittelnden Länge l_x und der Anzeige l_{SCALE} auf der Hauptskala

$$l_x = l_{\text{Scale}} + \Delta l$$

Die Abweichung Δl ergibt sich aus den auf der Hauptskala und dem Nonius angezeigten Abständen Δl_{Scale} und Δl_{Nonius} des Inzidenzpunktes vom jeweiligen Nullpunkt

$$\Delta l = \Delta l_{\text{Scale}} - \Delta l_{\text{Nonius}}$$

Für die Abstände gilt

$$\Delta l_{\text{Scale}} = \{ \Delta l_{\text{Scale}} \} \cdot [l_{\text{Scale}}]$$

$$\Delta l_{\text{Nonius}} = \{ \Delta l_{\text{Nonius}} \} \cdot [l_{\text{Nonius}}]$$

wobei aufgrund der Koinzidenz die beiden Zahlenwerte gleich sind

$$\{ \Delta l_{\text{Scale}} \} = \{ \Delta l_{\text{Nonius}} \}$$

Damit ergibt sich die Abweichung zu

$$\Delta l = \{ \Delta l_{\text{Nonius}} \} \cdot \left(1 - \frac{[l_{\text{Nonius}}]}{[l_{\text{Scale}}]} \right) \cdot [l_{\text{Scale}}]$$

und der Messwert

$$l_{\text{X}} = l_{\text{Scale}} + \{ \Delta l_{\text{Nonius}} \} \cdot \left(1 - \frac{[l_{\text{Nonius}}]}{[l_{\text{Scale}}]} \right) \cdot [l_{\text{Scale}}]$$

Rechenbeispiel

Längeneinheit der Hauptskala

$$[l_{\text{Scale}}] = \text{mm}$$

Beziehung zwischen den Einheiten
der Hauptskala und des Nonius

$$10 [l_{\text{Nonius}}] = 9 [l_{\text{Scale}}]$$

Zahlenwert auf der Hauptskala

$$\{l_{\text{Scale}}\} = 6$$

Zahlenwert auf der Noniusskala

$$\{l_{\text{Nonius}}\} = 7$$

Messwert (Messergebnis)

$$\begin{aligned} l_x &= 6 \text{ mm} + 7 \cdot 0,1 \text{ mm} \\ &= 6,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

Warum Ursache-Wirkung-Diagramm (Responsefunktion)?

Für die Abgrenzung auf das im jeweiligen Zusammenhang Notwendige gibt es in jedem Abstraktionsschema grafische Darstellungen, mit denen die Konzentration auf das jeweils Wesentliche schematisiert wird.

BEISPIEL **Schaltkreis-Diagramme der Elektrotechnik**

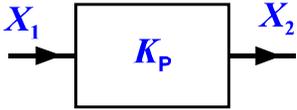
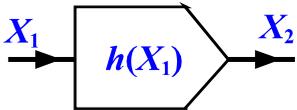
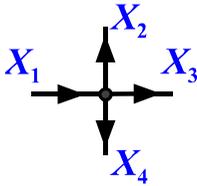
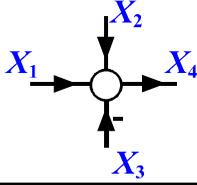
Schaltkreis-Diagramme konzentrieren den Blick auf die Zusammenhänge zwischen elektrischem Strom und elektrischer Spannung der Bauelemente und deren Verknüpfung durch Vernetzung. Sie abstrahieren so von den in diesem Zusammenhang unwesentlichen Bauformen, Materialeigenschaften u.ä..

In der Messtechnik ist die Informationsumformung - Extraktion aus der Messgröße bis zur Bereitstellung in wahrnehmbarer Form - ein zentraler Aspekt.

Zur schematisierte Darstellungen des Informationsflusses werden Ursache-Wirkung-Diagramme (Signal-Flusspläne) verwendet mit

- Übertragungsgliedern, die jeweils eine Signalumformung versinnbildlichen,
- Signalwegen in Form von Pfeilen und
- Signalverküpfungen.

Grundelemente eines Ursache-Wirkung-Diagramms

Bezeichnung	Symbol	Operation	Bemerkung
Lineares Übertragungsglied		$X_2 = K_P \cdot X_1$	1. In das Symbol werden Übergangsfunktionen, statische Kennlinie u.ä. eingetragen. 2. K_P - Übertragungsfaktor.
Nicht-lineares Übertragungsglied		$X_2 = h(X_1)$	In das Symbol werden Übergangsfunktionen, statische Kennlinie u.ä. eingetragen.
Verzweigungsstelle		$X_4 = X_3 = X_2 = X_1$	Bei mehr als drei auslaufenden Signalen werden mehrere Verzweigungsstellen verwendet.
Additionsstelle		$X_4 = X_1 + X_2 - X_3$	Minuszeichen in Pfeilrichtung rechts vom Signal-Übertragungspfeil.

BEISPIEL Federwaage

Die Eingangsgröße X_{In} ist die Masse m des Wägegutes (Last). Sie wirkt auf die Feder mit der (konstanten) Gewichtskraft

$$F_{\text{Weight}} = m \cdot g$$

Diese verlängert sich und erzeugt nach dem Hookeschen Gesetz (elastische Verformung) eine Gegenkraft

$$F_{\text{Spring}} = D_{\text{Spring}} \cdot s$$

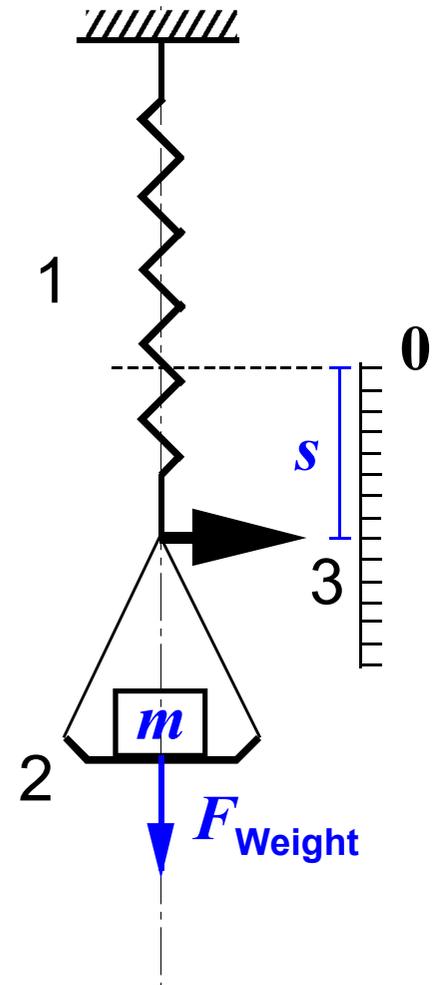
Schematischer Aufbau einer Federwaage.

- 1 Feder;
- 2 Waageschale, zur Aufnahme des Wägegutes (Messobjekt);
- 3 Anzeigesystem, beweglicher Zeiger und feste Skala.

m - Masse des Wägegutes;

F_{Weight} - Gewichtskraft;

s - durch die Gewichtskraft bewirkte Verlängerung der Feder.



Die Feder wird so weit verlängert (Wirkung), bis die Gegenkraft der Gewichtskraft (Ursache) das Gleichgewicht hält

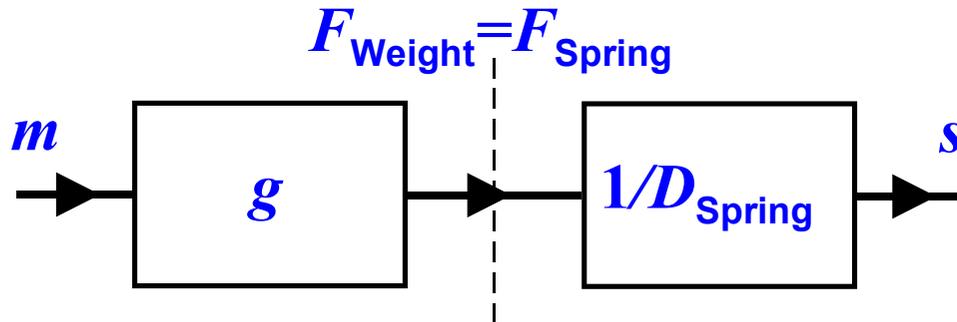
$$F_{\text{Weight}} = F_{\text{Spring}}$$

Die Ausgangsgröße X_{Out} ist die Auslenkung s der Anzeigemarke (Verlängerung der Feder) im Gleichgewichtsfall.

Sie ist der Masse des aufgelegten Wägegutes proportional (Ursache-Wirkungs-Beziehung, Responsefunktion)

$$s = \frac{g}{D_{\text{Spring}}} \cdot m$$

Zusammenfassung in einem Ursache-Wirkung-Diagramm



Ursache-Wirkung-Diagramm der Federwaage (Signalfluss-Diagramm).

m - Masse des aufgelegten Wägegutes;

g - Fallbeschleunigung;

F_{Weight} - Gewichtskraft;

F_{Spring} - Federkraft;

D_{Spring} - Federkonstante;

s - Auslenkung der Anzeigemarke,
Verlängerung der Feder.

Physikalische Zusammenhänge

$$F_{\text{Weight}} = m \cdot g \quad \text{Gewichtskraft;}$$
$$F_{\text{Weight}} = F_{\text{Spring}} \quad \text{Gleichgewicht (actio = reactio(?))}$$
$$F_{\text{Spring}} = D_{\text{Spring}} \cdot s \quad \text{Elastische Federkraft (Hookesches Gesetz);}$$

- m - Masse des Wägegutes;
- g - Fallbeschleunigung;
- D_{Spring} - Federkonstante;
- s - Auslenkung der Anzeigemarke

Proportionalitätskonstante

$$K_P = \frac{\Delta s}{\Delta m} = \frac{g}{D_{\text{Spring}}}$$

BEISPIEL U-Rohrmanometer

Die Eingangsgröße X_{In} ist, wie sich zeigen wird, der zwischen den beiden Schenkeln des U-Rohres herrschende Unterschied der Gasdrucke p_1 und p_2 .

Auf die Fluidspiegel (Fluidoberflächen⁺) in den beiden Schenkeln wirken die Kräfte

$$F_1 = p_1 \cdot A_{\text{Tube}}$$

$$F_2 = p_2 \cdot A_{\text{Tube}}$$

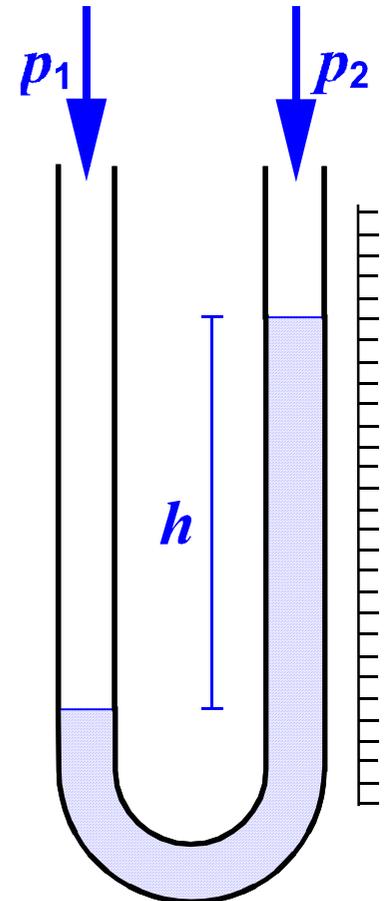
A_{Tube} ist die (konstante) Querschnittsfläche des U-Rohres.

Schematischer Aufbau eines U-Rohrmanometers.

p_1, p_2 - Gasdrucke im linken resp. rechten Schenkel;

h - Höhenunterschied zwischen den Fluidspiegeln in den beiden Schenkeln.

⁺) In engen Röhren bildet das Fluid eine linsenförmige Oberfläche, Meniskus genannt.



Ist einer der beiden Drucke größer als der andere, so ist auch die entsprechende Kraft größer als die andere

$$p_1 <|> p_2 \Rightarrow F_1 <|> F_2$$

wobei $<|>$ bedeutet, dass jeweils eine der beiden Relationen $<$ oder $>$ gilt.

Betrachte den Fall $p_1 > p_2$: $F_1 > F_2$, d.h. das Fluid wird im Schenkel **2** nach oben, im Schenkel **1** nach unten gedrückt.

Dabei ist der Druck im Fluid auf dem Niveau des Fluidspiegels des Schenkels **1** in beiden Schenkeln gleich (Inkompressibilität des Fluids).

$$p_1 = p_2' \Rightarrow F_1 = F_2'$$

Die Menge des Fluids oberhalb dieses Niveaus besitzt das Volumen

$$V = A_{\text{Tube}} \cdot h$$

und daher die Masse

$$m = \rho \cdot V$$

wobei ρ die Dichte des Fluids ist.

Diese Fluidmasse bewirkt eine Gewichtskraft

$$F_{\text{Weight}} = m \cdot g$$

die der allein aus den äußeren Drucken resultierenden Kraft

$$F_2' - F_2 = F_1 - F_2$$

im Schenkel **2** auf dem Niveau des Fluidspiegels im Schenkels **1** entgegenwirkt.

Die Fluidspiegel werden soweit angehoben bzw. abgesenkt, bis die Gewichtskraft (Wirkung) dieser resultierende Kraft (Ursache) das Gleichgewicht hält

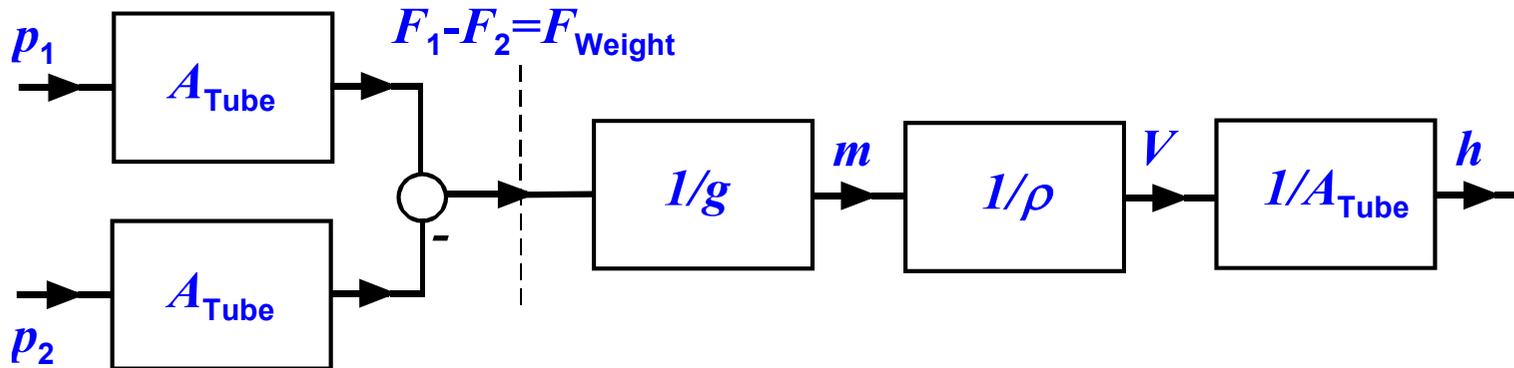
$$F_{\text{Weight}} = F_1 - F_2$$

Die Ausgangsgröße X_{Out} ist der Höhenunterschied h im Gleichgewichtsfall zwischen den Fluidspiegeln in den beiden Schenkeln des U-Rohrs.

Er ist dem Druckunterschied in den beiden Schenkeln des U-Rohrs proportional (Ursache-Wirkung-Beziehung, Responsefunktion)

$$h = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot (p_1 - p_2)$$

Zusammenfassung in einem Ursache-Wirkung-Diagramm



Ursache-Wirkung-Diagramm des U-Rohrmanometers (Signalfluss-Diagramm) .

p_1, p_2 - Gasdrucke im linken, rechten Schenkel;

A_{Tube} - (konstante) Querschnittsfläche des U-Rohres;

F_1, F_2 - Kräfte auf die Fluidspiegel;

F_W - Gewichtskraft der überschüssigen Fluidsäule;

g - Fallbeschleunigung;

m - Masse der überschüssigen Fluidsäule;

ρ - Dichte des Fluids;

V - Volumen der überschüssigen Fluidsäule;

h - Höhe der überschüssigen Fluidsäule.

Physikalische Zusammenhänge

$F_1 = p_1 \cdot A_{\text{Tube}}$	Kraft auf den Fluidspiegel im linken Schenkel;
$F_1 = F_2'$	inkompressibles Fluid;
$F_2' - F_2 = F_{\text{Weight}}$	Gleichgewicht (actio = reactio(?));
$F_2 = p_2 \cdot A_{\text{Tube}}$	Kraft auf den Fluidspiegel im rechten Schenkel;
$F_W = m \cdot g$	Gewichtskraft, der überschüssigen Fluidsäule;
$m = \rho \cdot V$	Masse der überschüssigen Fluidsäule,
$V = A_{\text{Tube}} \cdot h$	Volumen der überschüssigen Fluidsäule.
p_1, p_2	Gasdruck im linken resp. rechten Schenkel;
A_{Tube}	- Flächeninhalt des Rohrquerschnitts;
g	- Fallbeschleunigung;
ρ	- Dichte des Fluids;
h	- Höhe der überschüssigen Fluidsäule.

Proportionalitätskonstante

$$K_p = \frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{1}{\rho \cdot g}$$

ANWENDUNG

1) Messung des Überdruckes (Manometer)

Schenkel **1**: zu messender Überdruck p ;

Schenkel **2**: atmosphärischer (Luft-)Druck;

$$p_1 = p, p_2 = p_{\text{Atm}} \Rightarrow h \propto (p - p_{\text{Atm}})$$

2) Messung des atmosphärischen Luftdrucks (Barometer)

Schenkel **1**: zu messender atmosphärischer Luftdruck p ;

Schenkel **2**: Vakuum ($p_2 \ll p_1$);

$$p_1 = p_{\text{Atm}}, p_2 = 0 \Rightarrow h \propto p_{\text{Atm}}$$

Wie werden die Fehlergrenzen eingeschätzt?

BEISPIEL Ermittlung eines Teilungsverhältnisses

In einer elektrischen Messung wird ein Spannungsteiler eingesetzt um die zu messende hohe elektrische Spannung auf einen Wert herabzusetzen, der von dem verwendeten Spannungsmessgerät angezeigt werden kann.

Schematischer Aufbau eines elektrischen Spannungsteilers zur Erweiterung des Messbereiches eines Spannungsmessgerätes.

V_{In} , V_{Out} - Ein-/ Ausgangsspannung;

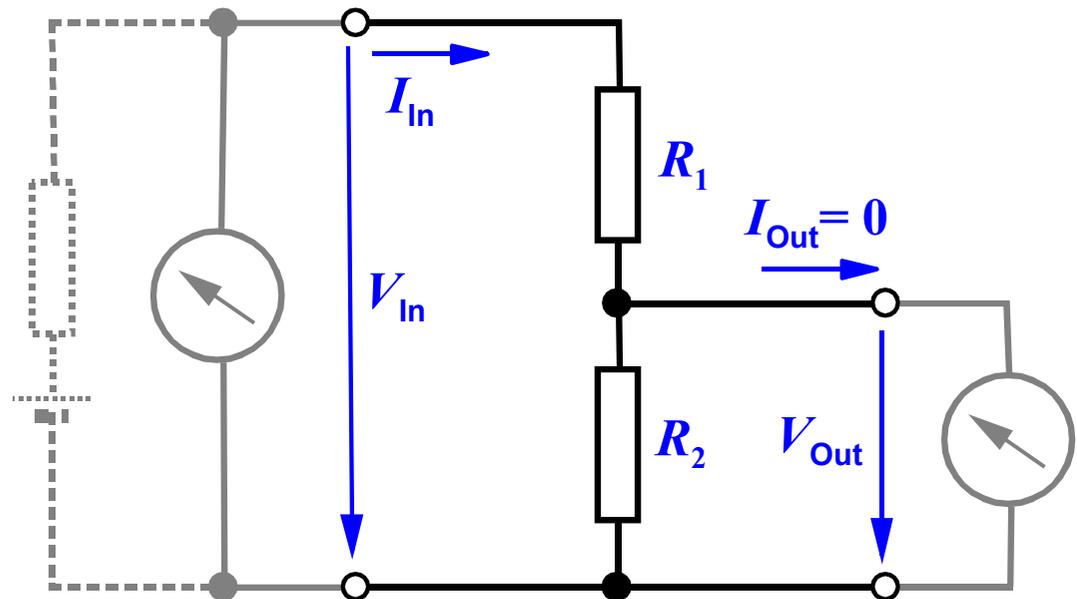
I_{In} , I_{Out} - Ein-/ Ausgangsstrom;

R_1 , R_2 - Teilerwiderstände;

schwarz – Anwenderschaltung;

grau – Messschaltung;

gestrichelt – Erzeugung der Eingangsspannung.



Physikalische Zusammenhänge

$V_{\text{In}} = I_{\text{In}} \cdot (R_1 + R_2)$ Ohmsches Gesetz im Eingangsstromkreis;

$V_{\text{Out}} = I_{\text{In}} \cdot R_2$ Ohmsches Gesetz im Ausgangsstromkreis

$I_{\text{Out}} = 0$ Bedingung (action = reactio);

V_{In} - Eingangsspannung;

I_{In} - Strom im Eingangsstromkreis;

V_{Out} - Ausgangsspannung;

I_{Out} - Strom im Ausgangsstromkreis;

R_1, R_2 - Teilwiderstände des Spannungsteilers.

Proportionalitätskonstante

$$K_P = \frac{1}{N} = \frac{V_{\text{Out}}}{V_{\text{In}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Ermittlung des Teilungsverhältnisses an Hand der Relation

$$N = \frac{V_{\text{In}}}{V_{\text{Out}}} \Big|_{I_{\text{Out}}=0 \text{ A}}$$

Ablauf der Messung

- (1) Einstellung einer Eingangsspannung an der Spannungsquelle;
- (2) Messung der (wirksamen) Eingangsspannung V_{In} ;
- (3) Messung der sich einstellenden Ausgangsspannung V_{Out} ;
- (4) Ermittlung des Messergebnisses: Quotient der angezeigten Spannungen.

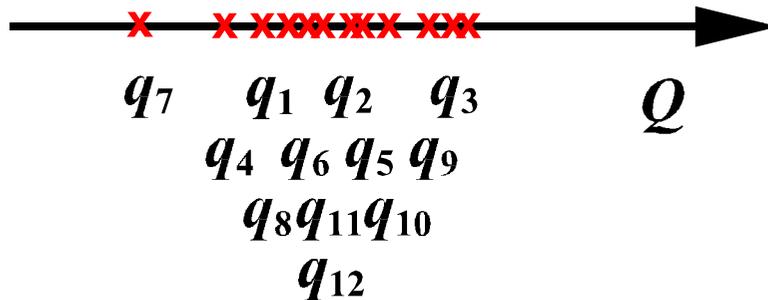
Wiederholte Messung liefert:

Lfd.Nr.	Eingangsspannung V_{In} in V	Ausgangsspannung V_{Out} in mV	Spannungs-Verhältnis ν
1	0,511	0,492	1 038,6
2	0,802	0,774	1 036,2
3	1,014	0,978	1 036,8
4	1,219	1,177	1 035,7
5	1,458	1,408	1 035,5
6	1,835	1,774	1 034,4
7	1,973	1,906	1 035,2
8	0,520	0,499	1 042,0

Welcher Wert ist der richtige Wert?

Allgemeine Formulierung

Es werden bei Wiederholung der Beobachtung einer Größe Q unter anscheinend gleicher Vorgehensweise und gleichen Bedingungen verschiedene Werte q_1, q_2, \dots, q_n ermittelt (n Anzahl der beobachteten Werte).



Kein beobachteter Werte ist unter den Bedingungen der Messung als unsinnig auszuschliessen. Alle beobachteten Werte sind als gleich wertvoll anzusehen.

PROBLEM

- Welcher Wert ist als Messwert im Sinne der Aufgabenstellung anzusehen?
- Wie ist die Verteilung zu berücksichtigen?

Der (messtechnisch) *beste Schätzwert* für den Wert einer Größe Q , bei deren wiederholter Beobachtung unter (scheinbar) gleichen Bedingungen sich die Werte q_1, q_2, \dots, q_n ergeben, ist ihr arithmetische Mittelwert, sofern die Werte als gleichwertig und die Kenntnisse über die einzelnen Werte als von einander unabhängig angesehen werden können.

$$\mathbf{E}[Q] = \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} q_j$$

Die Streuung der Werte (hervorgerufen durch den zugrunde liegenden Prozess) wird durch die *empir. Standardabweichung der Einzelbeobachtung* charakterisiert

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq j < n} (q_j - \bar{q})^2}$$

Die dem besten Schätzwert beizuordnende *Standardmessunsicherheit* ist

$$u(\bar{q}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Die maximal zulässige Messabweichung ist aus naiver (orthodoxer) Sicht das Vielfache

$$U_{\text{Random}} = k \cdot u(\bar{q})$$

mit dem Erweiterungsfaktor $k = 3$.

Die Aussage ist, dass der richtige Wert mit der an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit $P = 0,997$ in dem Intervall

$$\bar{q} - U_{\text{Random}} \dots \bar{q} + U_{\text{Random}}$$

liegt.

Erweiterungsfaktor k	Sicherheit P der Überdeckung
1	0,682 \cong 68%
2	0,954 \cong 95%
3	0,997 \cong 100%

Erweiterungsfaktoren und Sicherheit der Überdeckung auf der Grundlage, dass eine (Gauß-) Normalverteilung der Werte vorliegt.

Beschreibung durch ein Fehlermodell

Bei der Messung (Umformung der Eingangsgröße X_{In} in die Ausgangsgröße X_{Out}) treten (zufällige) Störungen auf, die den Wert verfälschen

$$X_{\text{Out}} = X_{\text{In}} + \delta X_{\text{Random}}$$

X_{Out} - angezeigter Wert;

X_{In} - richtiger Wert;

δX_{Random} ^{+) - (zufällige) Messabweichung, engl. error, Verfälschung durch nicht bekannte (identifizierte) Störungen.}

Diese (zufälligen) Störungen haben die Eigenschaft, dass die Erwartung verschwindet ($E[\delta X_{\text{Random}}] = 0$) und die Streubreite durch ein symmetrisches Toleranzintervall der Halbreite abgeschätzt werden kann, die sich aus der Standardmessunsicherheit mit dem Erweiterungsfaktor $k = 3$ ergibt.

$$U_{\text{Random}} = 3 \cdot u(\bar{x}_{\text{In}})$$

^{+) Größen mit vorangestelltem kleinen Delta, wie δX , symbolisieren Größen, die nach Ausweis der Erfahrung vorhanden sein müssen, deren Wert man jedoch nicht kennt; Größen mit vorangestelltem großen Delta, wie ΔX , symbolisieren bekannte Grenzen der Variabilität.}

RECHENBEISPIEL Ermittlung eines Teilungsverhältnisses (Fortsetzung)

Das Teilungsverhältnis wurde aus den ermittelten Ein-/Ausgangsspannungspaaren berechnet. Es ergaben sich die **8** Werte der untenstehenden Tabelle.

Gesucht sind

bester Schätzwert

$$E[v] = \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} v_j$$

empir. Standardabweichung
der Einzelbeobachtung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq j < n} (v_j - \bar{v})^2}$$

Standardmessunsicherheit

$$u(\bar{v}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

maximal zulässige
Messabweichung

$$U_{\text{Random}} = 3 \cdot u(\bar{v})$$

Lfd.Nr.	Spannungs- Verhältnis v
1	1 038,6
2	1 036,2
3	1 036,8
4	1 035,7
5	1 035,5
6	1 034,4
7	1 035,2
8	1 042,0

Berechnungen

Lfd.Nr.	Spannungs- Verhältnis v	Abweichung vom Mittelwert	Quadrat der Abweichung
1	1 038,6	1,8	3,24
2	1 036,2	- 0,6	0,36
3	1 036,8	0,0	0,0
4	1 035,7	- 1,1	1,21
5	1 035,5	- 1,3	1,69
6	1 034,4	- 2,4	5,76
7	1 035,2	- 1,6	2,56
8	1 042,0	5,2	27,04
Σ	8 294,4	0,0	41,86
	1 036,8		5,98

Bester Schätzwert

$$\bar{v} = 1\,036,8$$

empir. Standardabweichung
der Einzelbeobachtung

$$s = 2,45$$

Standardmessunsicherheit

$$u(\bar{v}) = 0,86$$

MPE, zufällige Einflüsse

$$U_{\text{Random}} = 2,6$$

Erweiterung des Fehlermodells

Neben Unsicherheiten aufgrund der Streuung der Werte bei wiederholten Beobachtungen treten auch Unsicherheiten aufgrund von Fehlergrenzen der Messmittel und/oder Signalumformungsstufen auf.

Die dadurch hervorgerufenen Messabweichungen sind konstant, aber ebenfalls nicht bekannt. Sie verfälschen den "wahren" Wert der Messgröße um einen festen, nicht bekannten Wert (konstante nicht bekannte Verschiebung, engl. bias)

$$X_{\text{Out}} = X_{\text{In}} + \delta X_{\text{Bias}} + \delta X_{\text{Random}}$$

X_{Out} - angezeigter Wert;

X_{In} - richtiger Wert;

δX_{Random} - zufällige, nicht-bekannte Messabweichung (Wiederholbarkeit);

δX_{Bias} - feste, jedoch nicht bekannte Messabweichung (MPE).

Für die Abweichungen werden die Grenzen abgeschätzt zu

$$\delta X_{\text{Bias}} : -\Delta X_{\text{MPE}} \dots + \Delta X_{\text{MPE}}$$

$$\delta X_{\text{Random}} : -U_{\text{Random}} \dots + U_{\text{Random}}$$

Das vollständige Messergebnis ist gegeben durch

$$x_{\text{In}} = \bar{x}_{\text{Out}}$$

$$\Delta X_{\text{In,MPE}} = U_{\text{Random}} + \Delta X_{\text{Out,MPE}}$$

und wird i.Allg. in der Form niedergeschrieben

Der gemessene Wert der "Messgröße" beträgt $x_{\text{In}} \pm \Delta X_{\text{In,MPE}}$

ANMERKUNG Herleitung der Gleichungen (Dreiecksungleichung)

$$X_{\text{In}} = X_{\text{Out}} - \delta X_{\text{Bias}} - \delta X_{\text{Random}}$$

$$\Rightarrow X_{\text{In}} : \bar{x}_{\text{Out}} - \Delta X_{\text{MPE}} - U_{\text{Random}} \dots \bar{x}_{\text{Out}} + \Delta X_{\text{MPE}} + U_{\text{Random}}$$

$$\Rightarrow |X_{\text{In}} - \bar{x}_{\text{Out}}| \leq |\Delta X_{\text{MPE}} + U_{\text{Random}}|$$

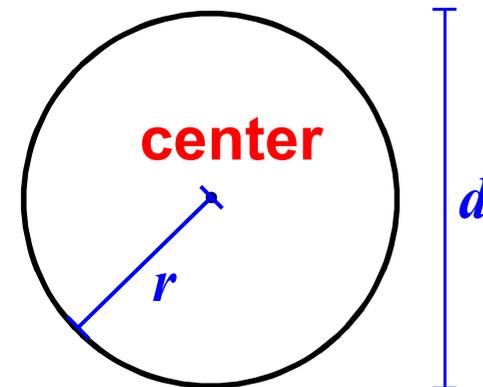
$$= \Delta X_{\text{MPE}} + U_{\text{Random}}$$

BEISPIEL Ermittlung des Radius einer Kugellagerkugel

- **Messaufgabe** (Messgröße)
Ermittlung der Länge des Querschnittsradius (**Länge**) eines Kreiszyinders.
- **Messmethode**
Indirekte Längenmessung über die Ermittlung des Durchmessers.
- **Messverfahren**
Ermittlung des Abstandes zweier diametral gegenüberliegenden Punkte auf dem Umfang (Zweipunkt-Abstand, Gleich-Dick).
- **Messaufbau** (schematisch)

Geometrische Beziehung

$$d = 2 \cdot r$$



Fehlermodell

Unsicherheiten:

- bei der wiederholter Messung des Durchmessers mit der Bügelmessschraube werden verschiedene Werte beobachtet und
- eine Messschraube besitzt nach der Norm eine maximal zulässige Messabweichung von $4 \mu\text{m}$

$$r = \frac{1}{2} \cdot (d + \delta d_{\text{Random}} + \delta d_{\text{Ind}})$$

Auswertung

$$r = \frac{1}{2} \cdot \bar{d}$$

$$\Delta r_{\text{MPE}} = \frac{1}{2} \cdot (U_{\text{Random}} + \Delta d_{\text{MPE}})$$

RECHENBEISPIEL Auswertung der Messung des Kugeldurchmessers

Der Durchmesser der gegebenen Kugel (Messobjekt) wurde mehrmals mit einer Bügelmessschraube ermittelt.

Es ergaben sich die **6** Werte der nebenstehenden Tabelle.

Gesucht sind

bester Schätzwert

$$E[d] = \bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \leq n} d_j$$

empir. Standardabweichung der Einzelbeobachtung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{1 \leq j < n} (d_j - \bar{d})^2}$$

Standardmessunsicherheit

$$u(\bar{d}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

maximal zulässige Messabweichung

$$U_{\text{Random}} = 3 \cdot u(\bar{d})$$

Lfd.Num.	Wert
1	1,73 mm
2	1,70 mm
3	1,75 mm
4	1,73 mm
5	1,72 mm
6	1,75 mm

Berechnung

Lfd.Num.	Wert	Abweichung	Quadrat
1	1,73 mm	0,0 mm	0,0 mm ²
2	1,70 mm	-0,03 mm	0,0009 mm ²
3	1,75 mm	0,02 mm	0,0004 mm ²
4	1,73 mm	0,0 mm	0,0 mm ²
5	1,72 mm	-0,01 mm	0,0001 mm ²
6	1,75 mm	0,02 mm	0,0004 mm ²
Σ	10,38 mm	0,0	0,0018 mm ²
	1,73 mm		0,00036 mm ²

Bester Schätzwert

$$\bar{d} = 1,73 \text{ mm}$$

empir. Standardabweichung
der Einzelbeobachtung

$$s = 0,019 \text{ mm}$$

Standardmessunsicherheit

$$u(\bar{d}) = 0,0077 \text{ mm}$$

MPE, zufällige Einflüsse

$$U_{\text{Random}} = 0,023 \text{ mm}$$

MPE, systematische Einflüsse

$$\Delta d_{\text{MPE,Ind}} = 0,004 \text{ mm}$$

MPE, gesamt

$$\Delta d_{\text{MPE}} = 0,027 \text{ mm}$$

Vollständiges Messergebnis:

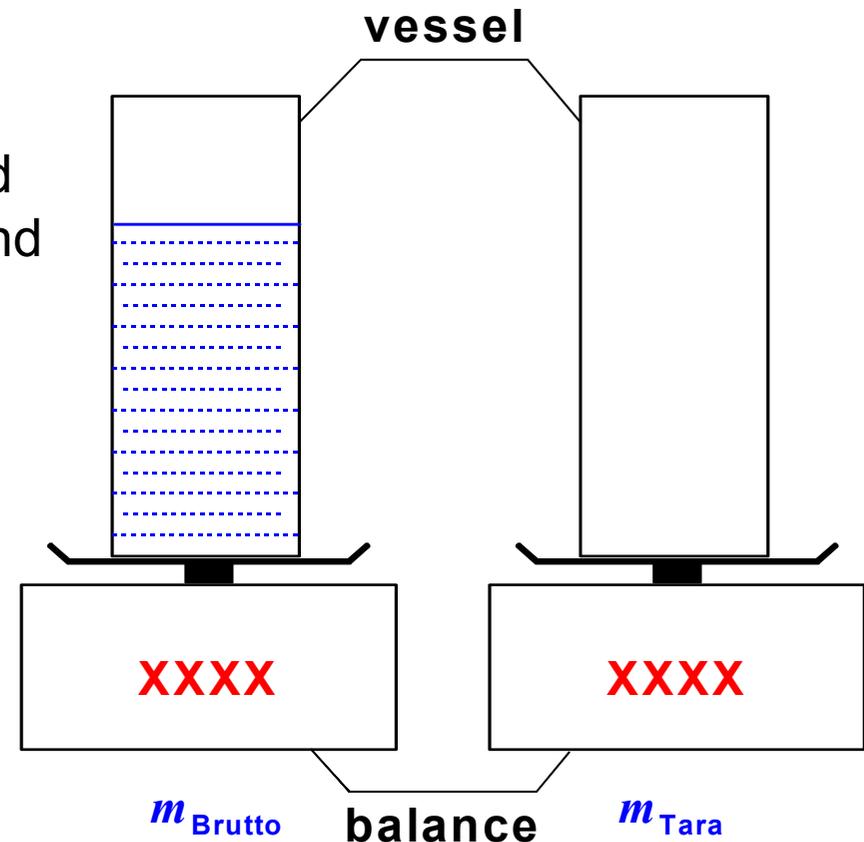
Der Radius der Kugellagerkugel beträgt $(0,865 \pm 0,015) \text{ mm}$

BEISPIEL Ermittlung der Masse einer Fluidmenge

- **Messaufgabe** (Messgröße)
Ermittlung der Masse [**Masse**] der gegebenen Fluidmenge.
- **Messmethode**
Indirekte Massenermittlung als Unterschied zwischen Masse des gefüllten Gefäßes und Masse des leeren Gefäßes.
- **Messverfahren**
Ermittlung der Brutto und der Tara.
- **Messaufbau** (schematisch)

Physikalische Beziehung

$$m_{\text{Brutto}} = m + m_{\text{Tara}}$$



Fehlermodell

Die Messung besteht aus zwei Teilmessungen:

- Ermittlung der Brutto und
- Ermittlung der Tara

Beide Teilmessungen laufen nach dem gleichen Verfahren ab (Unsicherheiten):

- bei der wiederholter Messung der jeweiligen Masse werden verschiedene Werte beobachtet und
- die verwendete Waage besitzt eine in gesetzliche Vorschriften (Eichung) festgelegte maximal zulässige Messabweichung

$$(m = \bar{m}_{\text{Ind}} + \delta m_{\text{Random}} + \delta m_{\text{Ind}})_{\text{Brutto, Tara}}$$

Messung

$$m = (\bar{m}_{\text{Brutto}} + \delta m_{\text{Brutto}}) - (\bar{m}_{\text{Tara}} + \delta m_{\text{Tara}})$$

Auswertung der Teilmessungen

$$m_{\text{Brutto}} = \bar{m}_{\text{Ind,Brutto}}$$

$$\Delta m_{\text{Brutto,MPE}} = U_{\text{Brutto,Random}} + \Delta m_{\text{MPE}}$$

$$m_{\text{Tara}} = \bar{m}_{\text{Ind,Tara}}$$

$$\Delta m_{\text{Tara,MPE}} = U_{\text{Tara,Random}} + \Delta m_{\text{MPE}}$$

Auswertung der Messung

$$m = \bar{m}_{\text{Brutto}} - \bar{m}_{\text{Tara}}$$

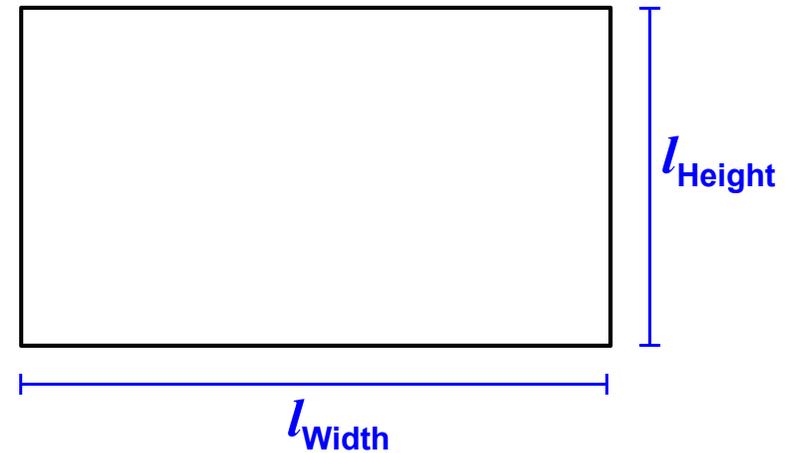
$$\Delta m_{\text{MPE}} = \Delta m_{\text{Brutto,MPE}} + \Delta m_{\text{Tara,MPE}}$$

BEISPIEL Querschnittsfläche eines rechteckigen Stabes

- **Messaufgabe** (Messgröße)
Ermittlung des Inhalts der Querschnittsfläche [**Längequadrat**] eines rechteckigen Stabes.
- **Messmethode**
Indirekte Flächenmessung über die Ermittlung der Kantenlängen.
- **Messverfahren**
Ermittlung des Abstandes zweier gegenüberliegender Kanten.
- **Messaufbau** (schematisch)

Geometrische Beziehung

$$A = l_{\text{Width}} \cdot l_{\text{Height}}$$



Fehlermodell

Die Messung besteht aus zwei Teilmessungen:

- Ermittlung der Breite und
- Ermittlung der Höhe

Beide Teilmessungen laufen nach dem gleichen Verfahren ab (Unsicherheiten):

- bei der wiederholter Messung mit dem Messschieber der jeweiligen Länge wird stets der gleiche Werte beobachtet und
- das verwendete Längenmessgerät besitzt eine in den Normen für den verwendeten Gerätetyp festgelegte resp. vom Hersteller mitgeteilte maximal zulässige Messabweichung

$$(\delta l_{\text{Random}} = 0 \Rightarrow \bar{l}_{\text{Ind}} = l_{\text{IND}}, l = l_{\text{Ind}} + \delta l_{\text{Ind}})_{\text{Width, Height}}$$

Messung

$$A = (l_{\text{Width}} + \delta l_{\text{Width}}) \cdot (l_{\text{Height}} + \delta l_{\text{Height}})$$

Linearisierung des Fehlermodells ($\delta l_{\text{Width}} \ll l_{\text{Width}}$, $\delta l_{\text{Height}} \ll l_{\text{Height}}$)

$$A = l_{\text{Width}} \cdot l_{\text{Height}} \cdot \left(1 + \frac{\delta l_{\text{Width}}}{l_{\text{Width}}} \right) \cdot \left(1 + \frac{\delta l_{\text{Height}}}{l_{\text{Height}}} \right)$$
$$\cong l_{\text{Width}} \cdot l_{\text{Height}} \cdot \left(1 + \frac{\delta l_{\text{Width}}}{l_{\text{Width}}} + \frac{\delta l_{\text{Height}}}{l_{\text{Height}}} \right)$$

Auswertung der Messung

$$A = l_{\text{Width}} \cdot l_{\text{Height}}$$
$$\frac{\Delta A_{\text{MPE}}}{A} = \frac{\Delta l_{\text{MPE}}}{l_{\text{Width}}} + \frac{\Delta l_{\text{MPE}}}{l_{\text{Height}}}$$

RECHENBEISPIEL

Messgerät: Messschieber

Fehlergrenze: $\Delta l_{\text{MPE}} = 0,05 \text{ mm}$

angezeigte Breite: $l_{\text{Width}} = 24,2 \text{ mm}$

auf die Breite bezogene Fehlergrenze: $\Delta l_{\text{MPE}}/l_{\text{Width}} = 0,002$

angezeigte Höhe: $l_{\text{Height}} = 12,8 \text{ mm}$

auf die Höhe bezogene Fehlergrenze: $\Delta l_{\text{MPE}}/l_{\text{Height}} = 0,004$

Querschnittsfläche: $A = l_{\text{Width}} \cdot l_{\text{Height}} = 309,76 \text{ mm}^2$

auf die Fläche bezogene Fehlergrenze: $\Delta A_{\text{MPE}}/A = 0,002 + 0,004$
 $= 0,006 = 0,6\%$

Die Querschnitt hat den Flächeninhalt $309 \cdot (1 \pm 0,006) \text{ mm}^2$.

Gibt es eine allgemeine Methode die Fehlergrenze zu ermitteln?

Jede Messung stellt einen Ursache-Wirkung-Zusammenhang, messtechnisch dargestellt durch das Ursache-Wirkung-Diagramm, und liefert damit eine Response-Funktion

$$X_{\text{Out}} = h(X_{\text{In}}, \underline{P})$$

X_{Out} - angezeigte Größe;

X_{In} - Messgröße;

$\underline{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ - Parametergrößen (Temperatur, Konstanten u.ä.), deren Werte die Ausgangswert beeinflussen.

Die Gleichung muss im interessierenden Bereich für jeden möglichen Satz der Parameterwerten eindeutig nach der Eingangsgröße X_{In} auflösbar sein (inverse Funktion), damit aus der beobachteten Wert der Ausgangsgröße auf den Wert der Eingangsgröße zurückgeschlossen werden kann. Es existiert somit eine Funktion (Model der Auswertung)

$$X_{\text{In}} = f_{\text{Model}}(X_{\text{Out}}, \underline{P})$$

mit der der Rückschluss rechnerisch durchgeführt wird.

Die Messabweichungen sind i.Allg. klein (ausreichend präzise Messung), so dass die um den Arbeitspunkt linearisierte Version des Modells der Auswertung verwendet werden kann.

$$\begin{aligned}x_{\text{In}} + \delta X_{\text{In}} &= f_{\text{Model}}(x_{\text{Out}}, \underline{p}) \\ &+ c_{\text{Out}} \cdot \delta X_{\text{Out}} + \sum_{1 \leq i \leq n} c_i \cdot \delta P_i\end{aligned}$$

x_{Out} - angezeigter Wert;

x_{In} - Wert der Messgröße;

$\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ - Werte der Parameter in der Messung.

c_{Out} und c_i sind Sensitivitätskoeffizienten der Anzeigegröße resp. der Parametergrößen

$$c_{\text{Out}} = \left. \frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial X_{\text{Out}}} \right|_{\text{Work}}$$

$$c_i = \left. \frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial X_i} \right|_{\text{WORK}}$$

Damit steht ein lineares Fehlermodell für die Messung zur Verfügung und die Auswertung ergibt

Wert
$$x_{\text{In}} = f_{\text{Model}}(x_{\text{Out}}, \underline{p})$$

Fehlergrenze
$$\Delta X_{\text{In},\text{MPE}} = |c_{\text{Out}}| \cdot \Delta X_{\text{Out},\text{MPE}} + \sum_{1 \leq i \leq n} |c_i| \cdot \Delta P_{i,\text{MPE}}$$

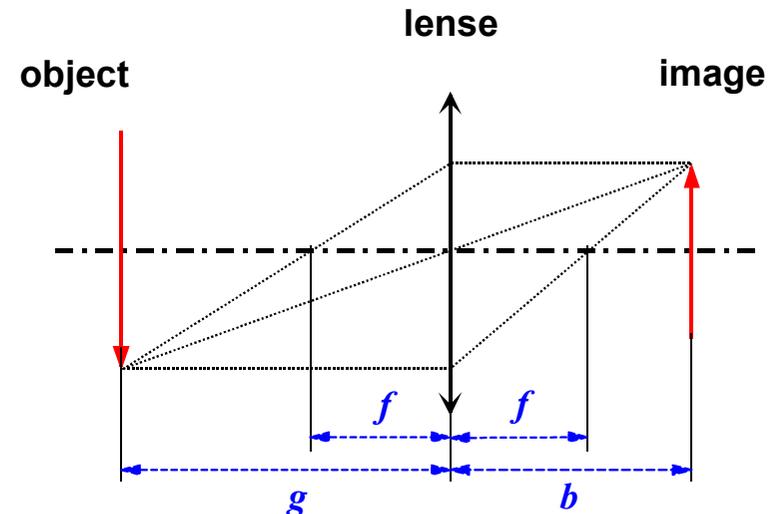
Die Fehlergrenze ΔX_{Out} für die Ausgangsgröße (Anzeigegröße) ergibt sich wie zuvor aus den zufälligen und den systematischen Einflüssen.

ANMERKUNG Ob und in wie weit die linearisierte Version für die jeweilige Messung sinnvoll ist, muss von Fall zu Fall geprüft werden.

BEISPIEL Ermittlung der Brennweite einer dünnen Linse

- **Messaufgabe** (Messgröße)
Ermittlung der Brennweite [**Länge**] einer dünnen Linse.
- **Messmethode**
Indirekte Längenmessung über die Ermittlung des Verhältnis der Bild- und Gegenstandsweiten.
- **Messverfahren**
Ermittlung der Abstände des Gegenstandes und seines scharfen Bildes von der Linsenebene auf einer optischen Bank.
- **Messaufbau** (schematisch)
Physikalische Beziehung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$



Modell der Auswertung

$$f = f_{\text{Model}}(b, g) = \frac{b \cdot g}{b + g}$$

Sensitivitätskoeffizienten

$$c_b = \frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial b} = \left(\frac{g}{b + g} \right)^2 = \left(\frac{f}{b} \right)^2$$

$$c_g = \frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial g} = \left(\frac{b}{b + g} \right)^2 = \left(\frac{f}{g} \right)^2$$

Ergebnis der Auswertung

Wert $f = \frac{b \cdot g}{b + g}$

Fehlergrenze $\Delta f_{\text{MPE}} = \left(\frac{f}{b} \right)^2 \cdot \Delta b_{\text{MPE}} + \left(\frac{f}{g} \right)^2 \cdot \Delta g_{\text{MPE}}$

RECHENBEISPIEL

Messgerät: Lineal der optischen Bank

Fehlergrenze $\Delta l_{\text{MPE}} = 0,2 \text{ mm}$

angezeigte Gegenstandsweite $g = 253,5 \text{ mm}$

auf die Weite bezogene Fehlergrenze $\Delta g_{\text{MPE}}/g = 0,8 \cdot 10^{-3}$

angezeigte Bildweite $b = 512,0 \text{ mm}$

auf die Weite bezogene Fehlergrenze $\Delta b_{\text{MPE}}/b = 0,4 \cdot 10^{-3}$

Brennweite $f = 169,556 \text{ mm}$

Sensitivitätskoeffizient der Gegenstandsweite $c_g = 0,448$

Sensitivitätskoeffizient der Bildweite $c_b = 0,110$

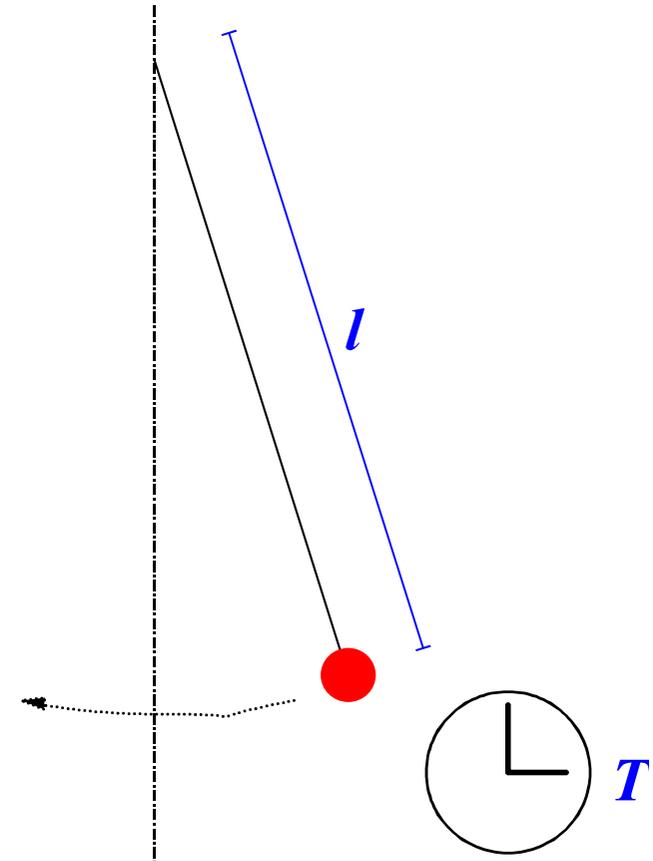
auf die Weite bezogene Fehlergrenze $\Delta f_{\text{MPE}}/f = 0,358 \cdot 10^{-3} + 0,044 \cdot 10^{-3}$
 $\cong 0,4 \cdot 10^{-3}$

Die Brennweite der Linse beträgt $169,6 \cdot (1 \pm 0,4 \cdot 10^{-3}) \text{ mm}$.

BEISPIEL Ermittlung der Fallbeschleunigung im Schwerfeld der Erde I

- **Messaufgabe** (Messgröße)
Ermittlung der Fallbeschleunigung
[**Länge durch Zeitquadrat**].
- **Messmethode**
Indirekte Messung über die Ermittlung der Länge und der Schwingungsdauer eines Fadenpendels im Schwerfeld der Erde.
- **Messverfahren**
Ermittlung der Länge und der Schwingungsdauer eines Fadenpendels.
- **Messaufbau** (schematisch)
Physikalische Beziehung

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



Modell der Auswertung

$$g = f_{\text{Model}}(l, T) = \frac{(2 \cdot \pi)^2}{T^2} \cdot l$$

Sensitivitätskoeffizienten

$$c_l = \frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial l} = \frac{(2 \cdot \pi)^2}{T^2} = \frac{g}{l} \quad c_T = \frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial T} = -2 \cdot \frac{(2 \cdot \pi)^2}{T^3} \cdot l = -2 \cdot \frac{g}{T}$$

Ergebnis der Auswertung

Wert $g = \frac{(2 \cdot \pi)^2}{T^2} \cdot l$

Fehlergrenze $\frac{\Delta g_{\text{MPE}}}{g} = \frac{\Delta l_{\text{MPE}}}{l} + 2 \frac{\Delta T_{\text{MPE}}}{T}$

RECHENBEISPIEL

Messgerät: Pendel, an einem dünnen Draht aufgehängte Stahlkugel

Länge des Fadens (von der Aufhängung zur Stahlkugel) $l_{\text{Wire}} = 188,45 \text{ cm}$

Messgerät: Stahlbandmass mit **0,5 mm** Teilung $\Delta l_{\text{MPE,Wire}} = 0,25 \text{ mm}$

Durchmesser der Stahlkugel $D_{\text{Ball}} = 12,06 \text{ cm}$

Messgerät: Messschieber mit **0,1 mm** (Nonius-)Teilung $\Delta D_{\text{MPE,Ball}} = 0,05 \text{ mm}$

Pendellänge $l = l_{\text{Wire}} + 0,5 \cdot D_{\text{Ball}} = 188,45 \text{ cm} + 6,03 \text{ cm} = 1,948 \text{ m}$

maximal zulässige Messabweichung

$$\Delta l_{\text{MPE}} = \Delta l_{\text{MPE,Wire}} + 0,5 \cdot \Delta D_{\text{MPE,Ball}} = 0,25 \text{ mm} + 0,025 \text{ mm} \cong 0,3 \text{ mm}$$

auf die Pendellänge bezogene maximal zulässige Messabweichung

$$\Delta l_{\text{MPE}} / l = \cong 0,154 \cdot 10^{-3}$$

Schwingungsdauer für 12 volle Schwingungen $t_{\text{Start/Stop}} = 33,6 \text{ s}$

Messgerät: Stoppuhr, Auflösung der Anzeige $0,1 \text{ s}$,

Variation der Reaktionszeit bei der Erkennung der Nulldurchgänge $0,2 \text{ s}$

$$\Delta t_{\text{MPE,Start/Stop}} = 2 \cdot 0,15 \text{ s} = 0,3 \text{ s}$$

Schwingungsdauer $T = 2,8 \text{ s}$

maximal zulässige Messabweichung

$$\Delta T_{\text{MPE}} = \Delta t_{\text{MPE,Start/Stop}} / 12 = (0,3 \text{ s}) / 12 \cong 0,025 \text{ s}$$

auf die Schwingungsdauer bezogene maximal zulässige Messabweichung

$$\Delta T_{\text{MPE}} / T \cong 0,009 = 9 \cdot 10^{-3}$$

Fallbeschleunigung $g = 9,8086 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

auf den Wert bezogene max. zulässige Messabweichung $\Delta g_{\text{MPE}} / g \cong 18,2 \cdot 10^{-3}$

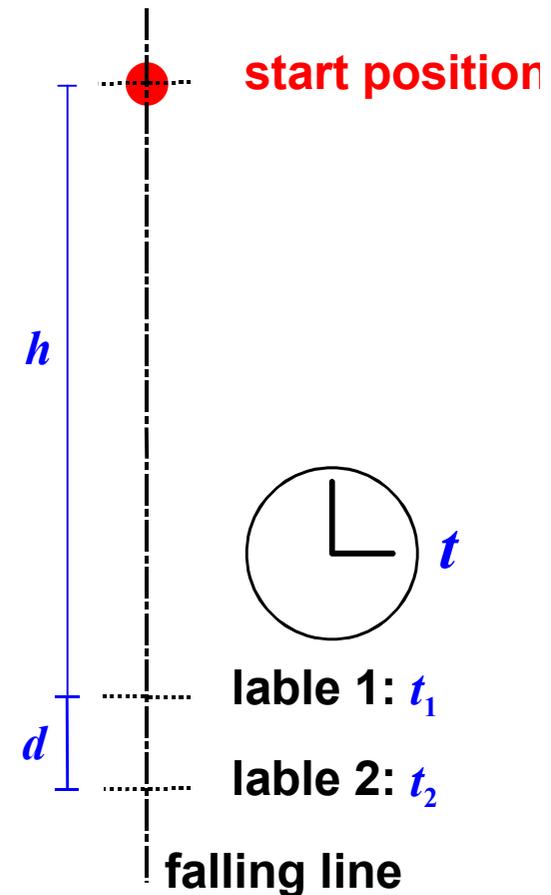
Die Fallbeschleunigung beträgt am Messort $9,8 \cdot (1 \pm 0,02) \text{ mm}$.

BEISPIEL Ermittlung der Fallbeschleunigung im Schwerfeld der Erde II

- **Messaufgabe** (Messgröße)
Ermittlung der Fallbeschleunigung
[**Länge durch Zeitquadrat**].
- **Messmethode**
Indirekte Messung über die Ermittlung der Endgeschwindigkeit eines im Schwerfeld der Erde frei fallenden Körpers.
- **Messverfahren**
Ermittlung der Fallhöhe und der Endgeschwindigkeit des frei fallenden Körpers.
- **Messaufbau** (schematisch)
Physikalische Beziehungen ($d \ll h$)

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$d = v \cdot (t_2 - t_1)$$



Modell der Auswertung

Die Messung besteht aus zwei Teilmessungen:

- Ermittlung der mittleren Geschwindigkeit und
- Ermittlung der Fallbeschleunigung

Mittlere Geschwindigkeit

$$v = f_{\text{Modell}}(d, t_1, t_2) = \frac{d}{t_2 - t_1}$$

Sensitivitätskoeffizienten

$$c_d = \frac{\partial f_{\text{Modell}}}{\partial d} = \frac{1}{t_2 - t_1} = \frac{v}{d}$$

$$c_{t_1} = \frac{\partial f_{\text{Modell}}}{\partial t_1} = \frac{d}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{v}{t_2 - t_1}$$

$$c_{t_2} = \frac{\partial f_{\text{Modell}}}{\partial t_2} = -\frac{v}{t_2 - t_1}$$

Ergebnis der Auswertung

Wert
$$v = \frac{d}{t_2 - t_1}$$

Fehlergrenze
$$\frac{\Delta v_{\text{MPE}}}{v} = \frac{\Delta d_{\text{MPE}}}{d} + 2 \frac{\Delta t_{\text{MPE}}}{|t_2 - t_1|}$$

Fallbeschleunigung

$$g = f_{\text{Model2}}(v, h) = \frac{v^2}{2 \cdot h}$$

Sensitivitätskoeffizienten

$$c_v = \frac{\partial f_{\text{Model2}}}{\partial v} = 2 \cdot \frac{v}{2 \cdot h} = 2 \cdot \frac{g}{v} \qquad c_h = \frac{\partial f_{\text{Model2}}}{\partial h} = -\frac{v^2}{2 \cdot h^2} = -\frac{g}{h}$$

Ergebnis der Auswertung

Wert

$$g = \frac{v^2}{2 \cdot h}$$

Fehlergrenze

$$\frac{\Delta g_{\text{MPE}}}{g} = 2 \cdot \frac{\Delta v_{\text{MPE}}}{v} + \frac{\Delta h_{\text{MPE}}}{h}$$

ANMERKUNG **Zeitmessung**

Schon bei den Babyloniern ($\cong 500$ v.Chr.) war die Umlaufzeit des Mondes bekannt

$$T_{\text{Moon}} = 27 \text{ d } 7 \text{ h } 43 \text{ min } 11 \text{ s} = 2\,360\,591 \text{ s}$$

mit der maximal zulässigen Messabweichung

$$\Delta T_{\text{MPE, Moon}} = 1 \text{ s} \Leftrightarrow \frac{\Delta T_{\text{MPE, Moon}}}{T_{\text{Moon}}} = 4,24 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

Zur Messung von Zeiten stand die Sonnenuhr zur Verfügung.

Mit ihr können Zeitspannen und Zeitpunkte ermittelt werden mit der maximal zulässigen Messabweichung

$$\Delta t_{\text{MPE}} = 0,1 \text{ h} = 360 \text{ s}$$

Erfolgsautor Erich von Denicken schliesst daraus:

Die Babylonier müssen Kontakt zu hoch intelligenten Wesen, mit umfangreichem technischen Wissen gehabt haben,
also Kontakt mit Außerirdischen (Ufos)!

Messtechnische Erklärung

Umlaufdauer des Mondes

$$T_{\text{Moon}} = 27,3217 \text{ d}$$

Anzahl der Umläufe im Jahr (in **365 d**)

$$n_{\text{Moon}} = 13,359$$

Zeitspanne einer Generation

$$t_{\text{Moon,Start/Stop}} = 30 \text{ a}$$

Anzahl der Umläufe in einer Generation

$$N_{\text{Moon}} = 400,8$$

Ermittlung der Zeitspanne für 400 Umläufe durch Beobachtung des Bedeckung eines bestimmten Sternes durch den Mond im Meridian-Durchgang (Nord-Süd-Großkreis am Himmel) mit der maximal zulässigen Messabweichung

$$\Delta t_{\text{MPE}} = 360 \text{ s}$$

Berechnung der Umlaufdauer

$$T_{\text{Moon}} = \frac{t_{\text{Moon,Start/Stop}}}{N_{\text{Moon}}}$$

Maximal zulässige Messabweichung

$$\Delta T_{\text{MPE,Moon}} = \frac{\Delta t_{\text{MPE}}}{N_{\text{Moon}}} = \frac{360 \text{ s}}{400} = 0,9 \text{ s}$$

Wie wird eine Messmethode ausgewählt?

BEISPIEL Ermittlung der Dichte eines Fluids

Voraussetzung:

Es ist keine Messgerät für die direkte Messung der Messgröße “Dichte einer Fluids“ vorhanden.

Physikalischer Zusammenhang:

Dichte - Verhältnis von Masse und Volumen einer gegebenen Menge eines (homogenen) Fluids.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

m - Masse der Fluidmenge;

V - Volumen der Fluidmenge.

Ermittlung der Dichte einer gegebenen Fluidmenge:

- Messung der Masse der Fluidmenge und
- Messung des Volumens der Fluidmenge.

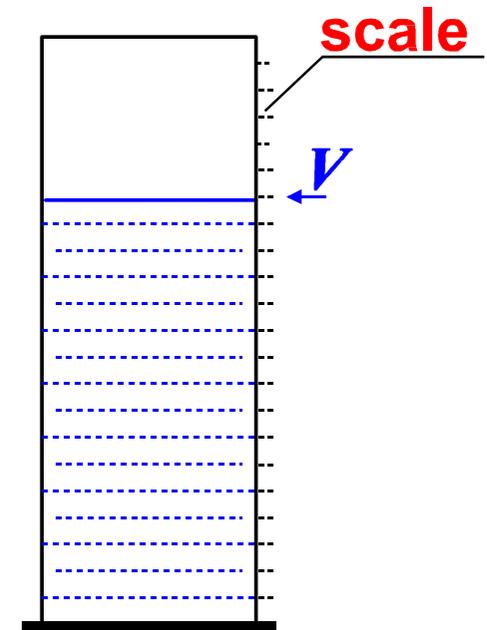
I. Methode: Indirekte Messung

- Ermittlung der Masse der Fluidmenge mit einer Waage.
- Ermittlung des Volumens der Fluidmenge mit einem Gefäß mit Füllstandsanzeige (Messzylinder)

Modell der Auswertung (Definitionsgleichung)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ANMERKUNG Um zusätzliche Unsicherheiten durch Benetzungsverluste zu vermeiden, verwendet man das Volumenmessgerät zweckmäßigerweise zugleich als Wägegefäß



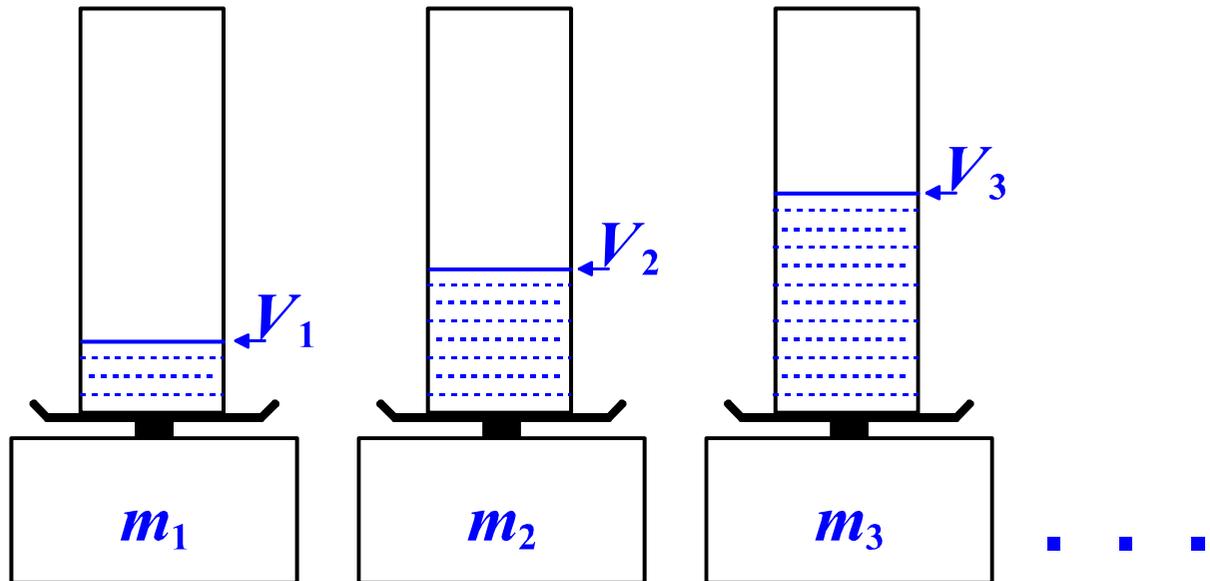
Ermittlung des Volumens V der Fluidmenge aus der Füllhöhe in einem Messzylinder.

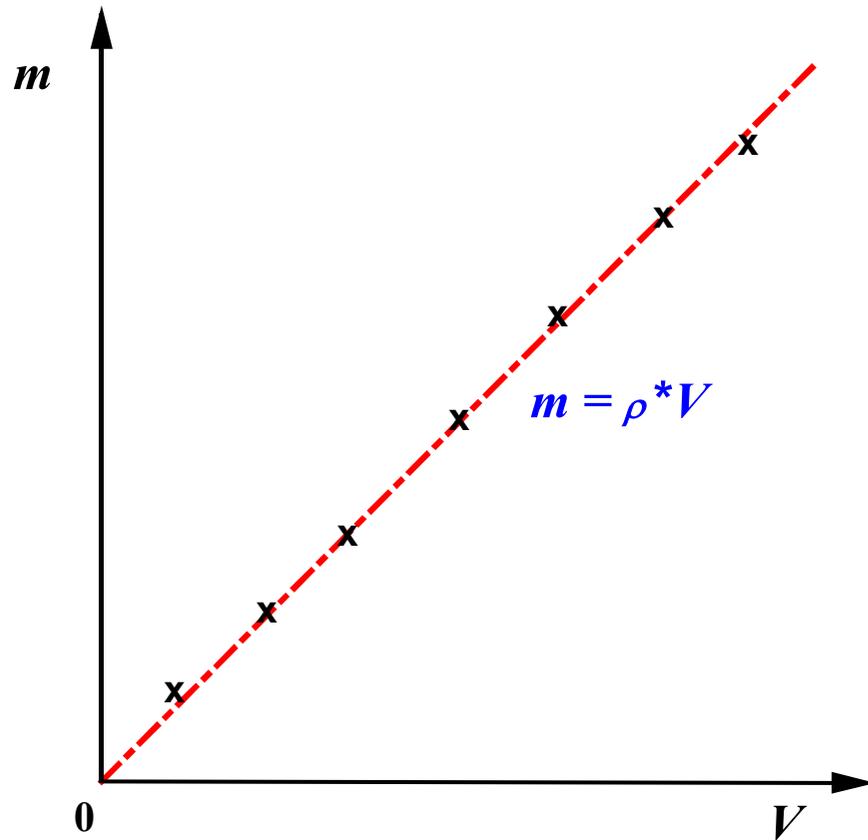
II. Methode: **Ausgleichsmethode**

Bildet man Teilmengen eines homogenen Fluids, so ist die Dichte das (konstante) Verhältnis aus den einzelnen Teilmassen und den ihnen entsprechenden Volumina

$$m_i = \rho \cdot V_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Ermittlung der Dichte ρ eines Fluids durch Ermittlung zusammengehöriger Masse m_i und Volumen V_i -Werte verschiedener Fluidmengen.





Volumen V über der Masse m der Fluidmenge;
x - Messwerte;
gestrichelte Linie - beste Anpassung.

Die Steigung der Geraden liefert die Dichte ρ des Fluids.
Die Steigung kann zeichnerisch (Anpassung einer Geraden an die Messpunkte) oder numerisch (Ausgleichsrechnung) ermittelt werden.

III. Methode: **Vergleichsmethode**

Verglichen wird die zu ermittelnde Dichte ρ_x des Fluids mit der bekannten Dichte ρ_s eines Vergleichs-/Referenzfluids (Normal, eng. standard). Als Vergleichsfluid wird i.Allg. gasfreies, destilliertes Wasser verwendet, dessen Dichte in Abhängigkeit von den Umgebungsbedingungen (Temperatur und Druck) sehr gut bekannt (vermessen) ist.

Physikalische Zusammenhänge:

$$\rho_x = \frac{m_x}{V_x}$$

m_x, V_x - Masse resp. Volumen der Menge des zu vermessenden Fluids.

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s}$$

m_s, V_s - Masse resp. Volumen der Menge des Referenzfluids.

Verhältnis der Dichten

$$\frac{\rho_x}{\rho_s} = \frac{m_x \cdot V_s}{m_s \cdot V_x}$$

also

$$\rho_x = \frac{m_x \cdot V_s}{m_s \cdot V_x} \rho_s$$

Führt man die Messung so durch, dass

$$V_x = V_s$$

oder anders ausgedrückt

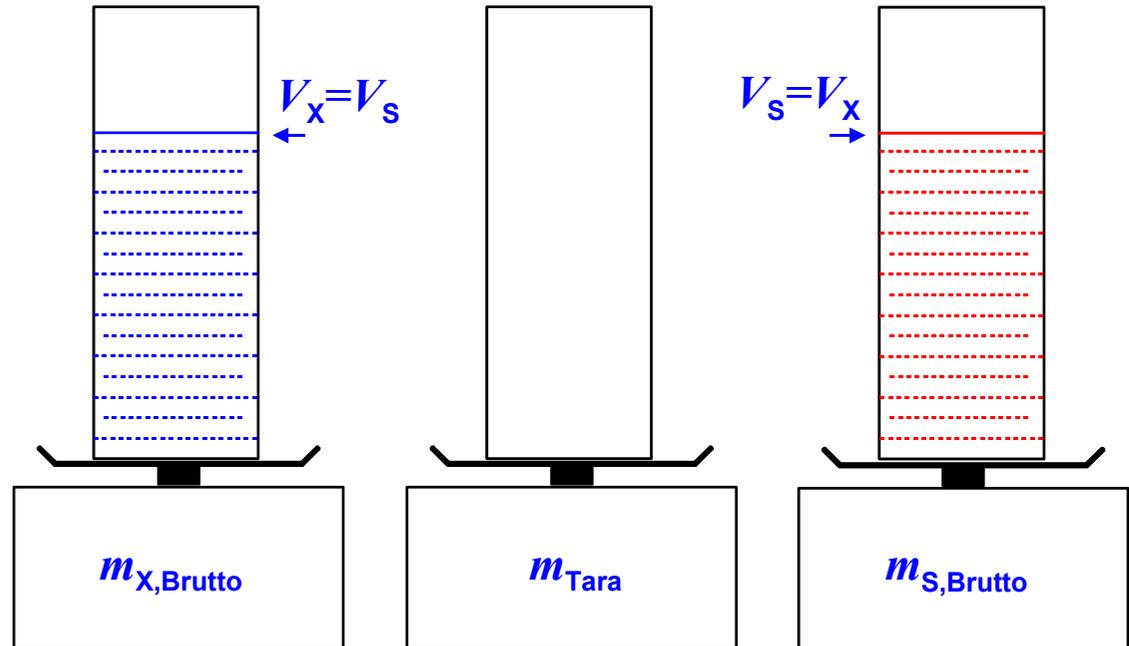
$$v = \frac{V_s}{V_x} = 1$$

dann gilt (ideale Messung)

$$\rho_x = \frac{m_x}{m_s} \rho_s$$

Durchführung

Ermittlung der Dichte ρ eines Fluids durch Vergleich mit einem Referenzfluid (i.Allg. Wasser) durch Wägung eines bestimmter Volumens der beiden Fluide.



Modell der Auswertung

$$\rho_x = \frac{m_{X,Brutto} - m_{Tara}}{m_{S,Brutto} - m_{Tara}} \cdot \nu \cdot \rho_s$$

Problem: die Bedingung

$$V_x = V_s \quad \text{resp.} \quad v = \frac{V_s}{V_x} = 1$$

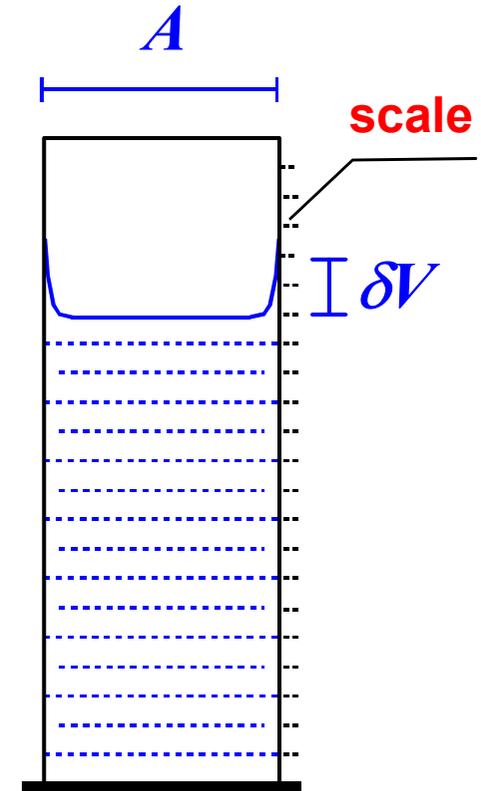
URSACHE Auf Grund der Molekularkräfte im Fluid und zwischen Fluid und Gefäßwand ist die freie Oberfläche nicht eben; es bildet sich ein Meniskus aus.

Die resultierende, mögliche Volumen-Abweichung δV liegt bei Ablesung des ebenen Teils der freien Oberfläche im Bereich

$$\delta V : 0 \dots \delta V_{\max} = Q_{\text{Meniskus}} \cdot l_A$$

Q_{Meniskus} – Querschnittsfläche des Meniskus;

l_A – innerer Umfang des Messzylinders.

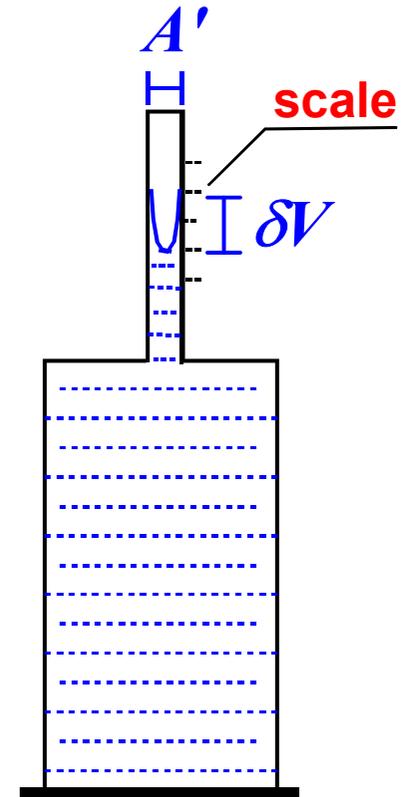


1-te Verbesserung: Verkleinerung der maximalen Volumen-Abweichung durch Verkleinerung der freien Oberfläche im Ablesebereich (Füllstandsrohr)

$$\delta V : 0 \dots \delta V'_{\max} = Q_{\text{Meniskus}} \cdot l_{A'} \\ \ll Q_{\text{Meniskus}} \cdot l_A$$

Q_{Meniskus} – Querschnittsfläche des Meniskus;
 $l_{A'}$ – innerer Umfang des Füllstandrohres.

NACHTEIL Füllung des Gefäßes mit dem Fluid durch die enge Öffnung des Füllstandsrohres ist schwierig.



2-te Verbesserung:

Füllstandsrohr durch Stöpsel mit Bohrung ersetzen:

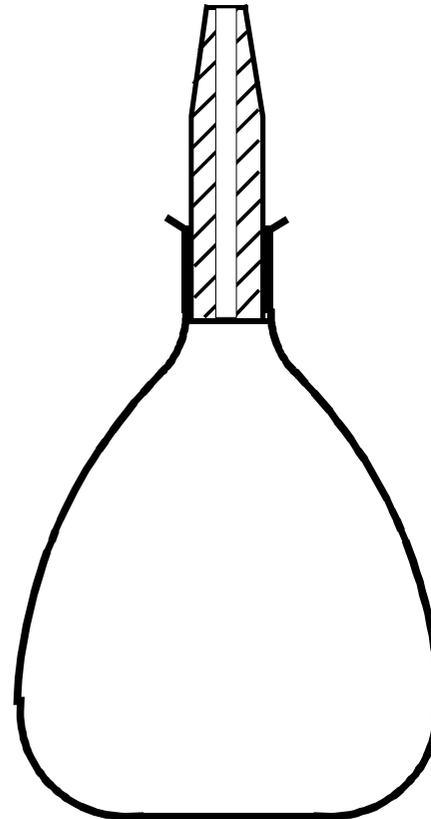
- Einfüllen ohne Stöpsel,
- Messen mit Stöpsel (Masse-Ermittlung) .

Die Ermittlung der Dichte mit dem Pyknometer basiert auf einem Vergleich bei dem die Bedingung

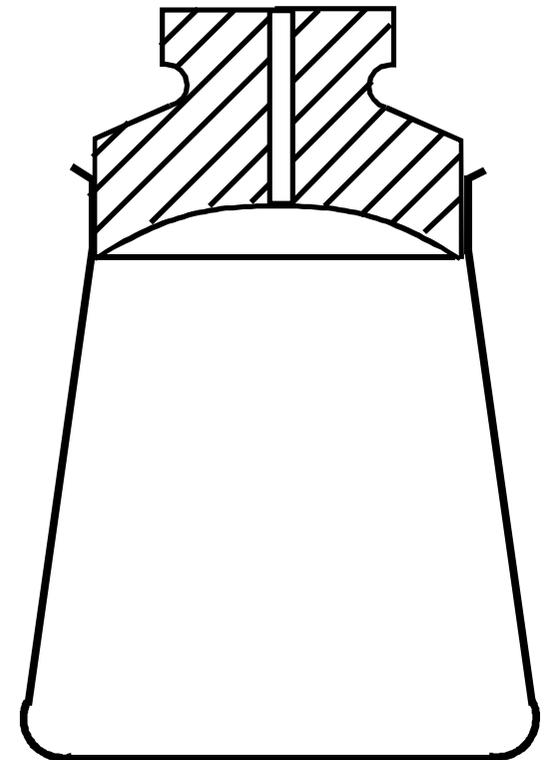
“gleiches Volumen“

gut kontrollierbar ist (kleiner Unsicherheitsbeitrag) .

Pyknometer



nach Gay-Lussac



nach Hubbard

- **Messmethode** (method of measurement) [VIM 2.4]
allgemeine Beschreibung der logischen Abfolge von Handlungen zur Durchführung von Messungen.

ANMERKUNG

Messmethoden können auf verschiedene Arten qualifiziert werden

- Substitutionsmessmethode;
- Differenzmessmethode;
- Nullabgleich.

- **Messverfahren** (measurement procedure) [VIM 2.5]
Gesamtheit der genau beschriebenen Tätigkeiten, wie sie bei der Ausführung spezieller Messungen entsprechend einer vorgegebenen Messmethode angewendet werden.

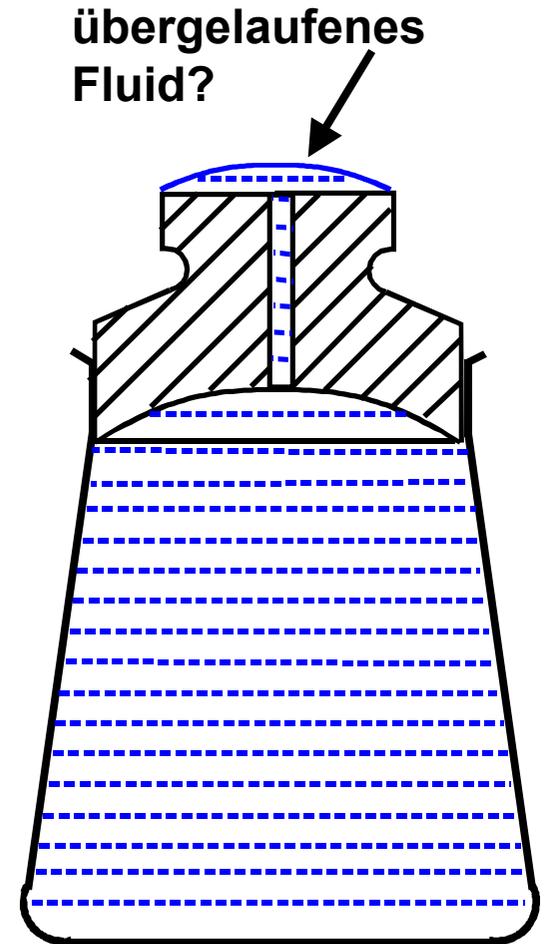
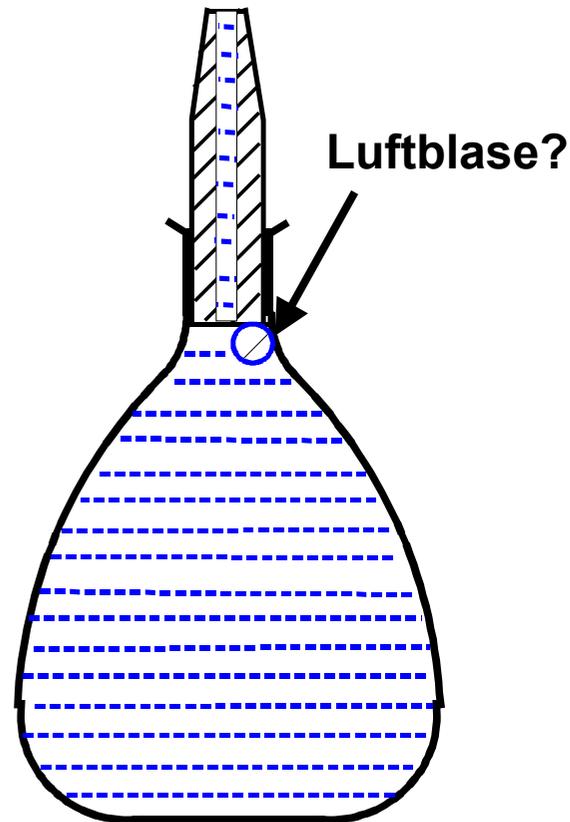
ANMERKUNG

Messverfahren werden i.Allg. in einem Dokument (Messanweisung, Messregel) niedergelegt, das genügend Einzelheiten enthält, um den Anwender in die Lage zu versetzen, die Messung ohne weitere Information auszuführen.

BEISPIEL Messanweisung

Messung der Dichte eines Fluids mit einem Pyknometer.

- Masse m_{Tara} ermitteln (Pyknometer-Gefäß ohne Fluid).
- Pyknometer-Gefäß mit Fluid unbekannter Dichte füllen.
- Pyknometer-Gefäß mit Stöpsel verschliessen; auf Luftblasen-Freiheit achten:
 - übergelaufenes Fluid entfernen;
 - bei Luftblaseneinschluss Einfüllung wiederholen.



- Masse $m_{X,Brutto}$ ermitteln
(Pyknometer-Gefäß mit dem Fluid nicht bekannter Dichte).
- Fluid ausleeren.
- Pyknometer-Gefäß reinigen
(Reinigungsprozess entsprechend der Art des Fluids wählen).
- Pyknometer-Gefäß mit dem Fluid bekannter Dichte füllen
(Normal-Fluid, z.B. destilliertes Wasser).
- Pyknometer-Gefäß mit Stöpsel verschliessen;
auf Luftblasen-Freiheit achten:
 - übergelaufenes Fluid entfernen;
 - bei Luftblaseneinschluss Einfüllung wiederholen.
- Masse $m_{S,Brutto}$ ermitteln
(Pyknometer-Gefäß mit dem Fluid bekannter Dichte).
- Fluid ausleeren.

- Pyknometer-Gefäß reinigen
(Reinigungsprozess entsprechend der Art des Fluids wählen).
- Auswerten.

Modell der Auswertung

$$\rho_x = \frac{m_{X,Brutto} - m_{Tara}}{m_{S,Brutto} - m_{Tara}} \cdot v \cdot \rho_s$$

$m_{X,Brutto}$ - Masse des Pyknometer-Gefäßes mit Fluid unbekannter Dichte.

$m_{S,Brutto}$ - Masse des Pyknometer-Gefäßes mit Fluid bekannter Dichte.

m_{Tara} - Masse des Pyknometer-Gefäßes ohne Fluid.

v - Korrektionsfaktor (Volumengleichheit).

ρ_s - Dichte des Normalfluids (Tabelle).