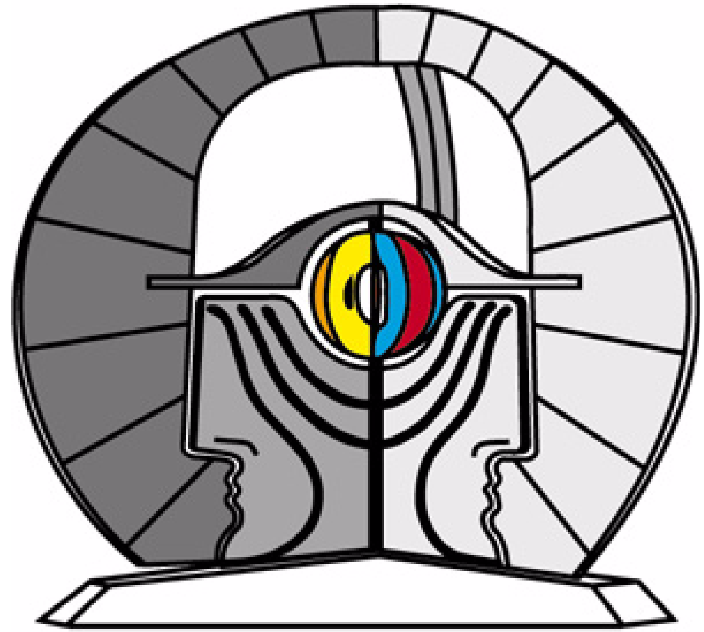
Einführung in die Messtechnik
Die ISO/BIPM-GUM Sicht:
Schätzwert & Messunsicherheit

Wolfgang Kessel
Braunschweig



Institut für Experimentalphysik

Moderne Sichtweise

In der Sicht der maximal zulässigen Messabweichung werden Intervallgrenzen für die möglichen, aber nicht bekannten Werte miteinander kombiniert.
Dabei wird nicht berücksichtigt, dass den möglichen Werten aufgrund der Zusammenhänge in der Messung unterschiedliche Verwirklichungsgewichte (Wahrscheinlichkeiten) der Realisierung bei der Beurteilung zugeordnet werden müssen.
Die moderne Sichtweise des ISO/BIPM-GUM stellt das in Rechnung, indem sie zur Beurteilung die Technik der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet.
Sie beschreibt dazu die nicht ausreichenden Kenntnisse über den Wert der relevanten Größen durch Wahrscheinlichkeiten der möglichen Werte und nutzt die sich ergebenden Erwartungen als Aussagen im Sinne der Messtechnik.

Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (1993)

Internationale Organisationen

INTERNATIONAL UNION OF PURE AND APPLIED PHYSICS

BIPM - International Bureau of Weights and Measures
http//: www.bipm.org

IEC - International Electrotechnical Commision
http//: www.iec.ch

IFCC - International Federation of Clinical Chemistry
http//: www.ifcc.org

IUPAP - International Union of Pure and Applied Physics
http//: www.iupap.org

IUPAC - International Union of Pure and Applied Chemistry
http//: www.iupac.org

ISO - International Organisation for Standardisation
http//: www.iso.ch

OIML - International Organisation for legal metrology
http//: www.oiml.org

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Es gibt stets Fälle, bei denen die Kenntnisse, die man besitzt, nicht ausreichen, um eindeutig vorher- oder aussagen zu können, ob eine bestimmte Aussage zutrifft wird oder zutreffen könnte.

BEISPIEL **Spielwürfel**

Auch wenn man weiss oder annehmen kann,

- dass ein Spielwürfel ideal ist,
  d.h. seine 6 Flächen durch nichts von einander zu unterscheiden sind als durch die angebrachte Augenzahl, und
- dass er ideal geworfen wird,

reicht diese Kenntnis nicht aus, sicher vorherzusagen, welche Augenzahl der Würfel beim nächsten Wurf zeigen wird.

Es kann jede der Augenzahlen $1,2,3,4,5,6$ auftreten.

Man benötigt in diesen Fällen ein Maß für das Zutreffen einer Aussage, d.h. die *Wahrscheinlichkeit* für die betreffende Aussage.

Häufig wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit einer Aussage als Grenzwert der Häufigkeit eingeführt, mit der die betreffende Aussage bei Wiederholung des Versuchs zutrifft.

BEISPIEL **Würfel**

Wird ein Würfel wiederholt geworfen, so ist die Häufigkeit der Augenzahl i

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

mit

n_i – Anzahl der Würfe, bei denen die betreffende Augezahl aufgetreten ist;

n - Anzahl der Würfe.

Als Wahrscheinlichkeit wird der Grenzwert für große Versuchszahlen angesehen

$$P_i = \lim_{n \to \infty} f_i = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n}$$

KRITIK

- der Grenzwert-Prozess kann in der Realität nicht durchgeführt werden, da
  a) zwar eine große, jedoch immer nur endliche Anzahl von Versuchen sind,
  b) die Bedingungen während der Durchführung der große Anzahl der Versuche gleich bleiben müssen (Reproduzierbarkeit);
- der Schluss aus endlich vielen Versuchen auf eine unendliche Folge voraus setzt, dass aus der endlichen Anzahl der Versuche die waltende Gesetzmäßigkeit erkannt werden kann (Schluß vom Einzelnen auf das Ganze).

Man definiert daher

Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit (engl.: probabiliy) $\mathbf{Pr}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{H})$ ist das Gewicht, das dem Zutreffen der Aussage $\boldsymbol{A}$ zugeschrieben wird, wenn man weiss oder annehmen kann, dass die Grundaussage (Hypothese) $\boldsymbol{H}$ zutrifft.

Die Hypothese $\boldsymbol{H}$ umfasst die Kenntnisse, die man besitzt, die aber nicht ausreichen, zu entscheiden, ob $\boldsymbol{A}$ wirklich zutreffen wird oder zutreffen kann.

BEISPIEL **Spielwürfel**

Die (meist unausgesprochne) Hypothese

H_{Dice}: "der Würfel ist ideal und wird ideal geworfen";

Elementaraussagen

D_i: "das Ergebnis des Wurfs ist die Augenzahl i";

$\mathrm{Pr}(D_i|\,H_{\text{Dice}})$ - Wahrscheinlichkeit,

dass die Aussage "das Ergebnis des Wurfs ist die Augenzahl i" für einen Versuch mit dem idealen Würfel zutrifft.

Damit ist jeder Aussage D_i ein Verwirklichungsgewicht zugeordnet:

Aussage	D_1	D_2	...	D_6
Wahrscheinlichkeit	$\mathrm{Pr}(D_1\|H_{\text{Dice}})$	$\mathrm{Pr}(D_2\|H_{\text{Dice}})$	...	$\mathrm{Pr}(D_6\|H_{\text{Dice}})$

REGELN und EIGENSCHAFTEN

(1) Die Wahrscheinlichkeit ist ein (positives) Gewicht

$$0 \leq \Pr(A \mid H) \leq 1$$

(2) Sind zwei Aussagen äquivalent, d.h. sie sind unterschiedliche Formulierungen des gleichen Inhalts, so besitzen sie die gleiche Wahrscheinlichkeit

$$(A_1 \Leftrightarrow A_2) \quad \Rightarrow \quad \Pr(A_1 \mid H) = \Pr(A_2 \mid H)$$

BEISPIEL **Gerade Augenzahl beim Spielwürfel**

Die Aussage

D_{Even} : "das Ergebnis eines Wurfs ist eine gerade Augenzahl"

und die Aussage

$D_2 \vee D_4 \vee D_6$: "das Ergebnis eines Wurfs ist die Augenzahl 2 oder 4 oder 6"

sind äquivalent, also

$$\Pr(D_{\mathrm{Even}} | H_{\mathrm{Dice}}) = \Pr(D_2 \vee D_4 \vee D_6 | H_{\mathrm{Dice}})$$

BEISPIEL **Wert einer Größe**

Die Aussagen

A_1 : “das Quadrat der Größe X ist kleiner als $\mathbf{2}$", d.h $X^2 < 2$

A_2 : “der Betrag der Größe X ist kleiner als √ $\mathbf{2}$" , d.h. $|X| < \sqrt{2}$

A_3 : “der Wert der Größe X liegt im Bereich **-2...2**", d.h. $-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}$

sind äquivalent, also

$$\mathbf{Pr}(X^2 < 2 \mid H) = \mathbf{Pr}(|X| < \sqrt{2} \mid H) = \mathbf{Pr}(-\sqrt{2} < X < +\sqrt{2} \mid H)$$

Die (nicht explizit erwähnte) Grundhypothese: die Rede ist von einer Größe, die den Rechenregeln der reellen Zahlen genügt.

(3) Trifft eine Aussage A unter der Hypothese H immer (mit Sicherheit) zu, so ist ihre Wahrscheinlichkeit EINS (Sicherheit)

$$(H \Rightarrow A) \quad \Rightarrow \quad \Pr(A \mid H) = 1$$

BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Die Aussage

D : "das Ergebnis eines Wurfs ist eine Augenzahl"

ist eine sichere Aussage, die zur Aussage

$D_1 \vee D_2 \vee D_3 \vee D_4 \vee D_5 \vee D_6$: "das Ergebnis des Wurfs ist die Augenzahl 1 oder 2 oder ... oder 6"

äquivalent ist, also

$$\Pr(D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_6 | H_{\mathrm{Dice}}) = \Pr(D | H_{\mathrm{Dice}}) = 1$$

(4) Trifft eine Aussage A unter der Hypothese H nie zu (Widerspruch zur Grundhypothese), so ist ihre Wahrscheinlichkeit NULL (Unvereinbarkeit)

$$(H \Rightarrow \neg A) \quad \Rightarrow \quad \Pr(A \mid H) = 0$$

BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Die Aussage

$D_{i>6}$: "das Ergebnis eines Wurfs ist eine Augenzahl $i > 6$"

ist ein Widerspruch zur Hypothese des idealen Würfels, also

$$\Pr(D_{i>6} | H_{\text{Dice}}) = 0$$

(5) Impliziert eine Aussage A_1 eine andere Aussage A_2 so gilt

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \quad \Rightarrow \quad \Pr(A_1 \mid H) \leq \Pr(A_2 \mid H)$$

BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Die Aussagen D_2 impliziert die Aussage D_{Even} , dass die Augenzahl gerade ist, also

$$\Pr(D_2 | H_{\mathrm{Dice}}) \leq \Pr(D_{\mathrm{Even}} | H_{\mathrm{Dice}})$$

Diese Regel macht keine unmittelbare Aussage über die Werte der Wahrscheinlichkeiten, sondern nur über die Relation, in der sie zueinander stehen. Sie liefert eine wichtige Kosistenzbedingung zur Überprüfung von Folgerungen, die sich aus komplexen logischen Zusammenhängen ergeben.

(6) Schliessen sich zwei Aussagen A_1 und A_2 unter der Hypothese H gegenseitig aus (A_1 steht im Widerspruch zu A_2 und umgekehrt), so gilt

$$(H \Rightarrow \neg(A_1 \wedge A_2)) \quad \Rightarrow \quad \Pr(A_1 \vee A_2 \mid H) = \Pr(A_1 \mid H) + \Pr(A_2 \mid H)$$

BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Die beiden Aussagen D_1 und D_2 schliessen sich gegenseitig aus, also

$$\Pr(D_1 \vee D_2 \mid H_{\text{Dice}}) = \Pr(D_1 \mid H_{\text{Dice}}) + \Pr(D_2 \mid H_{\text{Dice}})$$

(6a) Schliessen sich die (endliche) Anzahl von Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_N$ unter der Hypothese H wechselseitig aus (Widerspruch), so gilt

$$\Pr(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_N \mid H) = \sum_{1 \le i \le N} \Pr(A_i \mid H)$$

BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Die Aussagen $D_1, D_2, \ldots, D_6$ schliessen sich gegenseitig aus, also

$$\Pr(D_1 \mid H_{\text{Dice}}) + \Pr(D_2 \mid H_{\text{Dice}}) + \ldots + \Pr(D_6 \mid H_{\text{Dice}}) = \Pr(D \mid H_{\text{Dice}}) = 1$$

und

$$\Pr(D_2 \mid H_{\text{Dice}}) + \Pr(D_4 \mid H_{\text{Dice}}) + \Pr(D_6 \mid H_{\text{Dice}}) = \Pr(D_{\text{Even}} \mid H_{\text{Dice}})$$

(7) Die Aussagen A und ihre Negation

$\neg A$: "die Aussage A trifft nicht zu"

- schliessen sich unter jeder Grundhypothese gegenseitig aus (Kontradiktion)
- ergeben zusammen eine sichere Aussage (Tautologie).

Daher gilt

$$\mathbf{Pr}(A \mid H) + \mathbf{Pr}(\neg A \mid H) = 1$$

BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Die Aussage

D_{Even}: "das Ergebnis eines Wurfs ist eine gerade Augenzahl"

und die Aussage

D_{Odd}: "das Ergebnis eines Wurfs ist eine ungerade Augenzahl"

schliessen sich gegenseitig aus und ergeben zusammen eine sichere Aussage, also

$$\mathbf{Pr}(D_{\text{Odd}} \mid H_{\text{Dice}}) = 1 - \mathbf{Pr}(D_{\text{Even}} \mid H_{\text{Dice}})$$

(8) Prinzip des unzureichenden Grundes (F.Bacon 1605)

Sind unter der gleichen Hypothese H mehrere Aussagen $A_1, A_2, \dots, A_N$ möglich, die sich wechselseitig ausschliesen, so ist ihnen die gleiche Wahrscheinlichkeit zu zuordnen, wenn es keinen ausreichenden Grund gibt, unterschiedliche Gewichte der Verwirklichung anzunehmen.

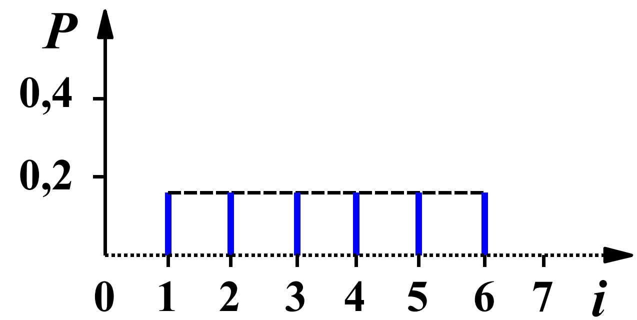
BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Bei einem idealen Würfel gibt es keinen Grund eine der Augenzahlen vor irgendeiner anderen zu bevorzugen.

Daher sind die Wahrscheinlichkeiten für die Aussagen $D_1, D_2, \dots, D_6$ gleich, also

$$\Pr(D_1|H_{\text{Dice}}) = \Pr(D_2|H_{\text{Dice}}) = \dots = \Pr(D_6|H_{\text{Dice}}) = P$$

$$\Rightarrow \quad P = 1/6$$



Ebenso ergibt sich

$$\Pr(D_{\text{Odd}}|H_{\text{Dice}}) = \Pr(D_{\text{Even}}|H_{\text{Dice}}) = 1/2$$

(9) Bayessche (Schluss-)Regel (T.Bayes 1761)

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Aussagen A_1 und A_2 unter der Hypothese H zugleich zutreffen, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit, dass die Aussage A_2 unter der Hypothese H zutrifft und der Wahrscheinlichkeit, dass die Aussage A_1 unter der simultanen Hypothese von $H \wedge A_2$ zutrifft.

$$\Pr(A_1 \wedge A_2 \mid H) = \Pr(A_1 \mid H, A_2) \cdot \Pr(A_2 \mid H)$$

BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Wahrscheinlichkeit die Augenzahl 2 oder 6 gewürfelt zu haben, wenn eine gerade Augenzahl gewürfelt wurde

$$\Pr(D_2 \vee D_6 \mid H_{\text{Dice}}, D_{\text{Even}}) = \Pr(D_2 \vee D_6 \mid H_{\text{Dice}}) \,/\, \Pr(D_{\text{Even}} \mid H_{\text{Dice}})$$
$$= (1/6+1/6)/(1/2) = 2/3$$

(9a) Bayessche Formel

Die Aussagen $A_1 \wedge A_2$ ist ein symmetrischer Ausdruck (die beiden Aussagen $A_1 \wedge A_2$ und $A_2 \wedge A_1$ sind zu einander äquivalent) daher gilt

$$\Pr(A_1 \mid H, A_2) \cdot \Pr(A_2 \mid H) = \Pr(A_2 \mid H, A_1) \cdot \Pr(A_1 \mid H)$$

(9b) Die beiden Aussagen A_1 und A_2 sind voneinander *unabhängig*, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass die Aussage A_1 unter der simultanen Hypothese von H und A_2 zutrifft, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass die Aussage A_1 schon unter der Hypothese von H allein zutrifft, d.h

$$\Pr(A_1 \mid H, A_2) = \Pr(A_1 \mid H)$$

Es gilt dann auch

$$\Pr(A_2 \mid H, A_1) = \Pr(A_2 \mid H)$$

Das ist z.B. der Fall, wenn Aussage A_1 oder A_2 aus der Hypothese H folgt.

BEISPIEL **Augenzahl beim Spielwürfel**

Beim Doppelwurf eines Spielwürfels ist aufgrund des idealen Würfels und des idealen Wurfes

a) die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl beim 2. Wurf gleich der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Augenzahl überhaupt, d.h.

$$\mathbf{Pr}(D_6|H_{\text{Dice}}, D_2) = \mathbf{Pr}(D_6|H_{\text{Dice}})$$

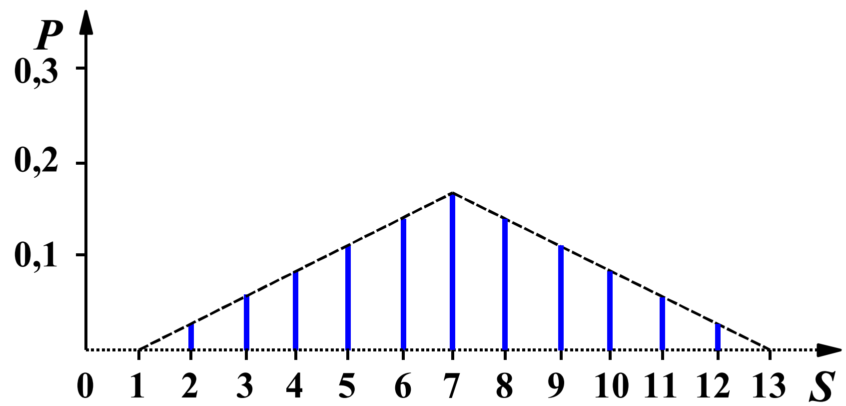
$$\Rightarrow \mathbf{Pr}(D_{2,6}|H_{\text{Dice}}) = \mathbf{Pr}(D_2 \wedge D_6|H_{\text{Dice}}) = (1/6) \cdot (1/6) = 1/36$$

b) die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten Augenzahl-Summe $S_2(5)$: "das Ergebnis eines Doppelwurfes ist die Augenzahl-Summe **5**"

$$\begin{aligned}\mathbf{Pr}(S_2(5)|H_{\text{Dice}}) &= \mathbf{Pr}(D_{1,4}|H_{\text{Dice}}) + \mathbf{Pr}(D_{2,3}|H_{\text{Dice}}) \\ &\quad + \mathbf{Pr}(D_{3,2}|H_{\text{Dice}}) + \mathbf{Pr}(D_{4,1}|H_{\text{Dice}}) \\ &= 4 \cdot (1/36) = 1/9\end{aligned}$$

Augenzahlen und Möglichkeiten beim Doppelwurf mit einem Würfel

Summe der Augenzahlen	Möglichkeiten der Verwirklichung	Anzahl
2	(1,1)	1
3	(2,1) (1,2)	2
4	(3,1) (2,2) (1,3)	3
5	(4,1) (3,2) (2,3) (1,4)	4
6	(5,1) (4,2) (3,3) (2,4) (1,5)	5
7	(6,1) (5,2) (4,3) (3,4) (2(,5) (1,6)	6
8	(6,2) (5,3) (4,4) (3,5) (2,6)	5
9	(6,3) (5,4) (4,5) (3,6)	4
10	(6,4) (5,5) (4,6)	3
11	(6,5) (5,6)	2
12	(6,6)	1



Wie entsteht die Erwartung?

In den Fällen, in denen die in der Hypothese H ausgedrückten Kenntnisse nicht ausreichen, eindeutig vorherzusagen, ob eine bestimmte Aussage zutrifft, kann man ein (endliches) Basisaussagen-System (vollständiges System, sich wechselseitig ausschliessender Aussagen) $B_1, B_2, \ldots, B_N$ angeben, das die (verschiedenen) Zustände kennzeichnet, die unter der Hypothese H möglich sind.

$$H \Rightarrow B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_N \qquad \text{(Vollständigkeit)}$$

$$H \Rightarrow (i_1 \neq i_2 \Rightarrow \neg(B_{i_1} \wedge B_{i_2})) \qquad \text{(wechselseitiger Ausschluss))}$$

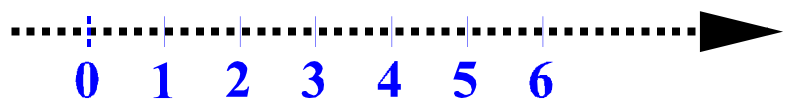
Wird jeder Basisaussage B_i ein (Größen-)Wert ξ_i zugeordnet, wird eine Zufallsgröße X generiert.

Basisaussage	B_1	B_2	...	B_N
Wahrscheinlichkeit	$\Pr(B_1 \mid H)$	$\Pr(B_2 \mid H)$	...	$\Pr(B_N \mid H)$
Wert der Zufallsgröße X	ξ_1	ξ_2	...	ξ_N

BEISPIEL **Spielwürfel**

Beim Spielwürfel bildet die Aussagen $D_1, D_2, \ldots, D_6$, mit denen die verschiedenen Zustände (Würfelflächen) identifiziert werde, ein Basisaussagen-System.
Die Augenzahl ist zugleich eine Zufallsgröße, wenn die Augenzahl als Wert auffasst.

Basisaussage	D_1	D_2	...	D_6
Wahrscheinlichkeit	1/6	1/6	...	1/6
Augenzahl	1	2	...	6



Bei vielen Würfelspielen wird den einzelnen Augenzahlen auch ein Gewinn resp. Verlust zugeordnet; dieser Gewinn jedes Spielers ist eine Zufallsgröße.

Erwartung einer Funktion f der Zufallsgröße X

$$\mathbf{E}[f(X) \mid H] = \sum_{1 \le i \le N} f(\xi_i) \cdot \mathbf{Pr}(B_i \mid H)$$

Genauer betrachtet ist der Wert ξ_i die Erwartung der Größe X unter der simultanen Bedingung

- die Hypothese H trifft zu und
- die Basisaussage B_i trifft zu,

also

$$\xi_i = \mathbf{E}[X \mid H, B_i]$$

d.h. unter Grundhypothese H reicht die Kenntnis, dass die Basisaussage B_i zutrifft (vollständig) aus, um einen eindeutig bestimmten Wert der Zufallsgröße X anzugeben (sichere Erwartung).

BEISPIEL **Erwartung beim Würfel**

a) Funktion $f(i) = a \; (= konst)$

$$\mathrm{E}[a \mid H_{\text{Dice}}] = a$$

b) Funktion $f(i) = i$

$$\mathrm{E}[i \mid H_{\text{Dice}}] = 1 \cdot \Pr(D_1 \mid H_{\text{Dice}}) + 2 \cdot \Pr(D_2 \mid H_{\text{Dice}}) + \ldots + 6 \cdot \Pr(D_6 \mid H_{\text{Dice}})$$

$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

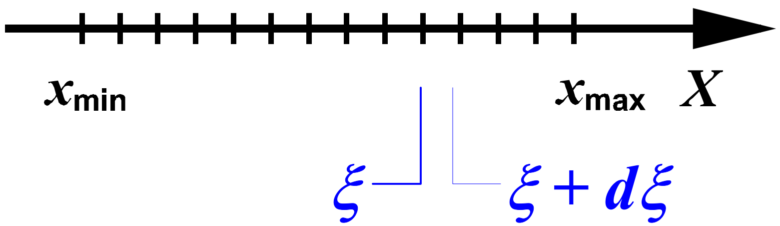
c) Funktion $f(i) = i^2$

$$\mathrm{E}[i^2 \mid H_{\text{Dice}}] = 1 \cdot \Pr(D_1 \mid H_{\text{Dice}}) + 4 \cdot \Pr(D_2 \mid H_{\text{Dice}}) + \ldots + 36 \cdot \Pr(D_6 \mid H_{\text{Dice}})$$

$$= \frac{91}{6} = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

Kontinuierliche Zufallsgröße X

- Unterteilung des Variationsbereiches $x_{\text{min}} \ldots x_{\text{max}}$ der Größe X in infinitesimale Bereiche der Weite $d\xi$



die ein Basisaussagen-System bilden.

- Übergang zur Wahrscheinlichkeitsdichte für die Zufallsgröße X

$$\mathbf{Pr}(\xi \leq X < \xi + d\xi) = \varphi_X(\xi \mid H) \cdot d\xi$$

- Ersetzen der Summen durch Integrale

$$\mathbf{E}[f(X) \mid H] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \varphi_X(\xi \mid H) \cdot d\xi$$

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichte

(1) Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist eine nicht negative Funktion

$$\varphi_X(\xi \mid H) \geq 0$$

(2) Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsgröße X im Bereich $x_1 \ldots x_2$ liegt

$$\Pr(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_X(\xi \mid H) \cdot d\xi$$

(3) Normierung

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(\xi \mid H) \cdot d\xi$$

BEISPIEL **Rechteck-förmige Verteilung**

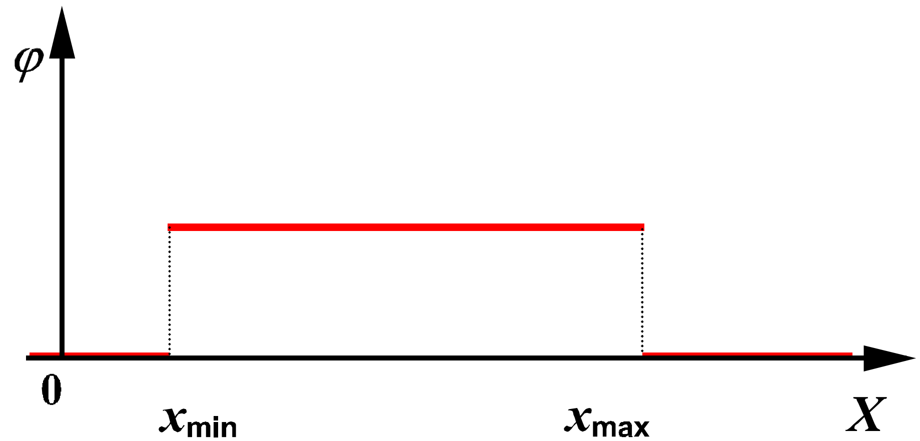
Hypothese $H_{\mathrm{Rect}}(x_{\mathrm{min}}, x_{\mathrm{max}})$:

"Die möglichen Werte der Zufallsgröße X liegen im Bereich $x_{\mathrm{min}} \ldots x_{\mathrm{max}}$ und besitzen dort für jedes Teilintervall der gleichen Weite die gleiche Wahrscheinlichkeit"

Es ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdiche

$$\varphi_X(\xi \mid H_{\text{Rect}}(x_{\text{min}}, x_{\text{max}}) = p$$

Wahrscheinlichkeitsdichte φ der möglichen Werten der Größe X über dem jeweiligen Wert ξ.



Äquivalente Hypothese $H_{\text{Rect}}(x, \Delta x)$:

"Die möglichen Werte der Zufallsgröße X liegen im Bereich $\pm\Delta x$ (Halbweite, $\Delta x = (x_{\text{max}}\text{-}x_{\text{min}})/2$) um $x = (x_{\text{max}}+x_{\text{min}})/2$ (Mittelpunkt) und besitzen dort für jedes Teilintervall der gleichen Weite die gleiche Wahrscheinlichkeit"

Normierung:

$$1 = \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} p \cdot d\xi \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{2 \cdot \Delta x}$$

a) Funktion $f(X) = a\ (= konst)$

$$\mathrm{E}[a \mid H_{\text{Rect}}(x,\Delta x)] = \frac{1}{2\cdot\Delta x}\cdot\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} a\cdot d\xi = a$$

b) Funktion $f(X) = \mathrm{X}$

$$\mathrm{E}[X \mid H_{\text{Rect}}(x,\Delta x)] = \frac{1}{2\cdot\Delta x}\cdot\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \xi\cdot d\xi = \frac{1}{2\cdot\Delta x}\cdot\left(\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{x-\Delta x}^{x+\Delta x}$$

$$= \frac{1}{2\cdot\Delta x}\cdot\left(\frac{(x+\Delta x)^2}{2} - \frac{(x-\Delta x)^2}{2}\right) = x$$

c) Funktion $f(X) = X^2$

$$\mathrm{E}[X^2 \mid H_{\text{Rect}}(x,\Delta x)] = \frac{1}{2\cdot\Delta x}\cdot\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} \xi^2\cdot d\xi = \frac{1}{2\cdot\Delta x}\cdot\left(\frac{\xi^3}{3}\right)\Bigg|_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} = x^2 + \frac{(\Delta x)^2}{3}$$

EIGENSCHAFTEN

1) Die Erwartung einer Konstanten a ist die Konstante selbst (Normierung)

$$X = a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}[a] = a$$

2) Wird zu einer Größe X eine Konstante a addiert, so ist die Erwartung der Summe gleich der Summe der Erwartung einer Größe X und der Konstanter a (Verschiebungssatz)

$$\mathbf{E}[X + a] = \mathbf{E}[X] + a$$

3) Ergibt sich eine Größe als Produkt einer Konstanten a und einer Größe X, so ist die Erwartung des Produktes gleich dem Produkt aus der Konstanten a und der Erwartungen der Größe X (Homogenität)

$$\mathbf{E}[a \cdot X] = a \cdot \mathbf{E}[X]$$

BEISPIEL **Radius eines Kreises**

Die Erwartung des Durchmessers d eines kreiszylindrischen Stabes kann durch Messen des Abstandes diametral gegenüberliegender Punkte auf dem Umfang direkt ermittelt werden.

Die Erwartung des Radius r der kreisförmigen Querschnittsfläche kann nicht direkt ermittelt werden. Sie ergibt sich aus der geometrischen Beziehung

$$r = \frac{1}{2} \cdot d$$

Erwartung des Durchmessers: $\mathrm{E}[d] = 4{,}8\ \mathrm{cm}$

Erwartung des Radius: $\mathrm{E}[r] = 2{,}4\ \mathrm{cm}$

BEISPIEL **Bogen eines Kreises**

Die Zahlenwert eines Winkels φ eines Kreisbogens gemessen in **rad** ist mit dem Zahlenwert in **Grad** verknüpft durch die numerische Beziehung

$$\frac{\varphi}{\mathbf{1\,rad}} = \frac{\pi}{\mathbf{180}} \cdot \frac{\varphi}{\mathbf{1°}}$$

Erwartung des Winkels in **rad** : $\mathbf{E}[\frac{\varphi}{\mathbf{1°}}] = \mathbf{2{,}4}$

Erwartung des Winkels in **Grad**: $\mathbf{E}[\frac{\varphi}{\mathbf{1\,rad}}] = \mathbf{0{,}048\,879}$

4) Ergibt sich eine Größe X als Summe zweier Größen X_1 und X_2, so ist die Erwartung der Summe gleich der Summe der Erwartungen

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$$

5) Ergibt sich eine Größe X als Produkt zweier Größen X_1 und X_2 und sind die *Beobachtungen der beiden Größen von einander unabhängig*, so ist die Erwartung des Produktes gleich dem Produkt der Erwartungen

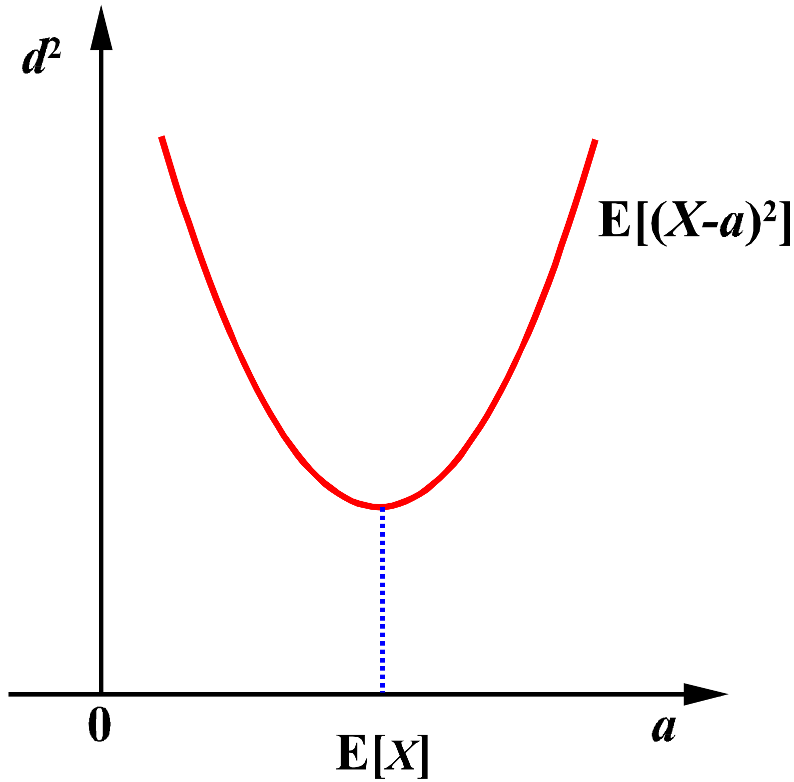
$$\mathbf{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathbf{E}[X_1] \cdot \mathbf{E}[X_2]$$

Steinerscher+) Satz

Die Erwartung des Quadrates des Abstandes einer Zufallsgröße X von einer Konstanten a (Quadrat des mittleren Abstand der Zufallsgröße X von a) nimmt mit dem Quadrat der Differenz aus der Erwartung x der Zufallsgröße X und der Konstanten a zu.

$$\mathrm{E}[(X-a)^2] = \mathrm{E}[(X-x)^2] + (a-x)^2$$

mit $x = \mathrm{E}[X]$



Quadrat des mittleren Abstandes der Zufallsgröße X von der Konstanten a aufgetragen über dem Abstand der Konstanten a von der Erwartung $x = \mathrm{E}[X]$.

+) ***Jakob Steiner* (1796-1863),** Schweizer Mathematiker und Physiker.

Kovarianz

Die Kovarianz zweier Zufallsgröße X_1 und X_2 ist die Erwartung des Produktes der Abweichungen der jeweiligen Größe von ihrer Erwartung.

$$\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = \mathrm{E}[(X_1 - \mathrm{E}[X_1]) \cdot (X_2 - \mathrm{E}[X_2])]$$

Eigenschaften

1) Sind die Kenntnisse über die beiden Zufallsgrößen Zufallsgröße X_1 und X_2 *voneinander unabhängig*, so verschwindet ihre Kovarianz.

$$\mathrm{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_2] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}[X_1, X_2] = 0$$

2) Die Kovarianz ist symmetrisch in den Argumentgrößen X_1 und X_2.

$$\mathrm{Cov}[X_1, X_2] = \mathrm{Cov}[X_2, X_1]$$

3) Die Kovarianz einer Konstanten a und einer Zufallsgröße X verschwindet

$$\mathrm{Cov}[a, X] = 0$$

4) Ist eine Größe eine Summe aus einer Zufallsgröße X_1 und einer Konstanten a so ist die Kovarianz der Summe und einer weiteren Größe X_2 ist gleich der Kovarianz der Größen X_1 und X_2 .

$$\mathrm{Cov}[X_1 + a, X_2] = \mathrm{Cov}[X_1, X_2]$$

5) Die Kovarianz eines Produktes, aus einer Konstanten a und einer Zufallsgröße X_1, und einer weiteren Größe X_2 ist gleich dem Produkt der Konstanten a und Kovarianz der Größen X_1 und X_2 .

$$\mathrm{Cov}[a \cdot X_1, X_2] = a \cdot \mathrm{Cov}[X_1, X_2]$$

6) Die Kovarianz der Summe zweier Zufallsgröße X_1 und X_2 und einer weiteren Zufallsgröße X ist gleich der Summe der einzelnen Kovarianzen der beiden Zufallsgröße X_1 und X_2 mit der Zufallsgröße X.

$$\mathrm{Cov}[X_1 + X_2, X] = \mathrm{Cov}[X_1, X] + \mathrm{Cov}[X_2, X]$$

Varianz

Die Varianz einer Zufallsgröße X ist die Kovarianz der Größe mit sich selbst.

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Cov}[X, X]$$

Eigenschaften

1) Die Varianz einer Konstanten a verschwindet.

$$\mathrm{Var}[a] = 0$$

2) Die Varianz der Summe einer Zufallsgröße X und einer Konstanten a ist gleich der Varianz der Größe selbst.

$$\mathrm{Var}[X + a] = \mathrm{Var}[X]$$

3) Die Varianz eines Produktes aus einer Konstanten a und einer Zufallsgröße X ist gleich dem Produkt des Quadrates der Konstanten a und Varianz der Zufallsgrößen selbst.

$$\mathrm{Var}[a \cdot X] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$$

4) Die Varianz der Summe zweier Zufallsgröße X_1 und X_2 ist gleich der Summe der einzelnen Varianzen der beiden Zufallsgröße X_1 und X_2 vermehrt um ihre doppelte Kovarianz.

$$\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + 2 \cdot \mathrm{Cov}[X_1, X_2]$$

Sind über die beiden Zufallsgröße X_1 und X_2 *unabhängige Kenntnisse* vorhanden, ist die Varianz ihrer Summe gleich der Summe ihrer Varianzen.

$$\mathrm{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_2]$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2]$$

BEISPIEL **Steinerscher Satz**

Der Steinersche Satz kann mit der Varianz geschrieben werden

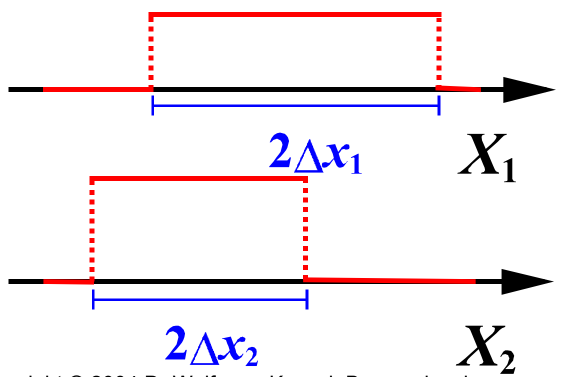
$$\mathrm{E}[(X - a)^2] = \mathrm{Var}[X] + \left(a - \mathrm{E}[X]\right)^2$$

BEISPIEL **Trapez-förmige Verteilung**

Hypothese $H_{\text{Trapezoid}}$:

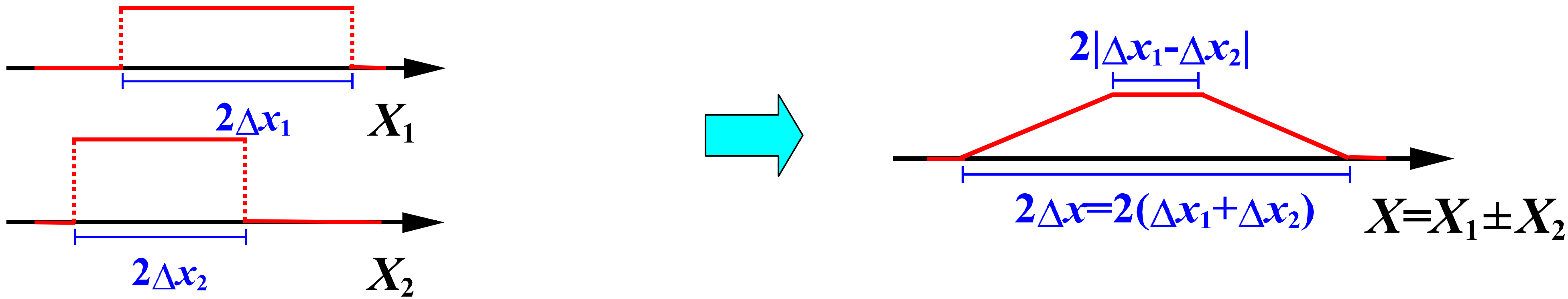
" - Die Größe X ist die Summe/Differenz zweier Zufallsgrößen X_1 und X_2,
d.h. $X = X_1 \pm X_2$;

- die beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 sind rechteckförmig verteilt;
- die Kenntnisse über die beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 sind voneinander unabhängig."



Zufallsgröße	X_1	X_2
Variationsbereich	$x_{1,\min} \dots x_{1,\max}$	$x_{2,\min} \dots x_{2,\max}$
Schätzwert	x_1	x_2
Halbweite	Δx_1	Δx_2

Wahrscheinlichkeitsdichte für die möglichen Werte der Zufallsgröße X
(Faltung der beiden rechteckförmigen Wahrscheinlichkeitsdichten):



Die möglichen Werte der Zufallsgröße X sind trapez-förmig verteilt mit

Zufallsgröße	$X_1 \pm X_2$
Variationsbereich	$x_{1,\mathrm{min}} \pm x_{2,\mathrm{min}} \ldots x_{1,\mathrm{max}} \pm x_{2,\mathrm{max}}$
Schätzwert	$x_1 \pm x_2$
Halbweite	$\Delta x_1 + \Delta x_2$
Knickpunkt-Parameter	$\beta = \lvert\Delta x_1 - \Delta x_2\rvert / (\Delta x_1 + \Delta x_2)$

Was sind die Ursachen der Unsicherheit?

Ergebnisse von Messungen sind, nach Ausweis der experimentellen Erfahrung, stets durch Messabweichungen verfälscht (Abweichungen vom gewünschten, idealen Verhalten). Um die Größe der Abweichungen einzuschätzen und damit die Unsicherheit der Messergebnisse zu beurteilen, umfasst jede Auswertung einer Messung eine Unsicherheitsanalyse.

Die Ursachen der Abweichungen und damit der Unsicherheit beim Messen liegen in den Unzulänglichkeiten bei der Realisierung der Messung. Daher besteht eine Unsicherheitsanalyse in der Evaluierung der Realisierung, d.h. in einer Zusammenstellung der relevanten Abweichung und der Einschätzung ihres Beitrags. Als wesentliche Ursachen sind zu nennen:

- Unklares Ziel der Messung, unzureichende Präzisierung der Messaufgabe; speziell eine nicht richtig erkannte Aufgabengröße oder eine falsch gewählte Messgröße führen zu schwer erkennbaren Abweichungen .

- Beiträge durch das Verhalten des Messobjektes; bestimmte Objekteigenschaften wie Elastizität, Oberflächenbeschaffenheit, Verunreinigungen, Innenwiderstände, Kontaktspannungen u.ä. bewirken Abweichungen der Messgröße von der realisierten Größe.
- Beiträge aufgrund der Rückwirkung;
- Beiträge, die auf das Messverfahren zurückzuführen sind; sie bewirken Abweichungen, falls der ausgenutzte physikalische Effekt durch andere Effekte oder Einflüsse überlagert ist, die in der Auswertung nicht berücksichtigt sind oder nicht berücksichtigt werden konnten, oder wenn bei der Realisierung des Messverfahrens Vernachlässigungen vorgenommen wurden.
- Beiträge durch die Maßverkörperungen; die Einheiten, mit denen die Mess- oder Abbildungsgröße beim Messen verglichen wird, sind direkt oder indirekt im Messmittel realisiert. Da auch die Einheiten nicht exakt realisiert werden können, trägt die Unkenntnis des genauer Wertes zur Abweichungen bei. Hinzu kommt eine mögliche Veränderung des Wertes der Maßverkörperung im Laufe des Gebrauchs (Alterung, Drift).

- Beiträge von den Messmitteln; aus Fertigungsungenauigkeiten, Verschleiss, Alterung von Bauelementen und anderen technischen Unzulänglichkeiten resultierenn Abweichungen, die als Hauptanteile anzusehen sind.
- Beiträge aus der Bedienung; Abweichungen beim Ablesen der Anzeige auf-grund der Quantisierung, Abweichungen aufgrund unzureichender Hand-(Durchführung der Justierung, von Ausgleichsvorgänge, Beurteilung von Störungen, Rundung beim Maschinenrechnen) u.ä..
- Beiträge, die auf Einflüssgrößen zurückzuführen sind; Einflussgrößen sind alle Größen, die auf ein Messmittel wirken. Ist die Beeinträchtigung ungewollt, liegt eine Störung vor, die das Messergebnis mehr oder weniger verfälscht. Wesentlichen Einflüsse sind
  * klimatische (Temperatur, Luftdruck, Feuchte, Sonneneinstrahlung, Luftzug),
  * mechanische (Lageabhängigkeiten, Schwingungen und Stöße),
  * elektrische (über Stromversorgungen oder äußere Felder),
  * ionisierende Strahlung.

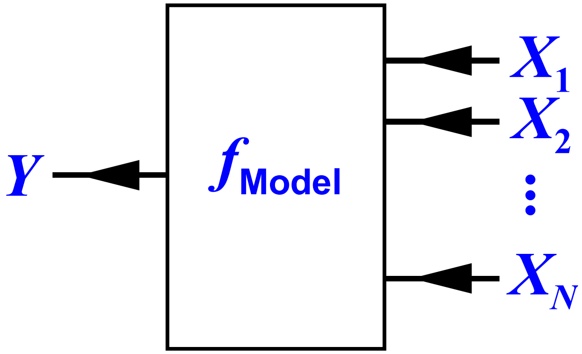
Was ist die GUM-Methode?

- **Ziel der Messung:**
  Aussage über die möglichen Werte der zu messenden Größe, d.h. über diejenigen Werte, die der mehr oder weniger vollständigen Kenntnis über die Messgröße nicht widersprechen (Konsistenz).
- **Lösungsweg:**
  - klare Darstellung der Kenntnisse,
  - eindeutige Schlussfolgerungen.

Kenntnisse

- **über das Messverfahren:** Beschreibung der Kenntnisse über das Messverfahren durch ein Modell der Auswertung:
- **über die Daten:** Umsetzung der Kenntnisse über die für die Messung als relevant angesehenen Größen in Verteilungen ihrer Werte.

Kenntnisse über das Messverfahren



Y - Messgröße, deren Wert ermittelt werden soll,

$X_1, X_2, ..., X_N$ - Einflussgrößen, deren Werte für die Ermittlung als relevant angesehen werden,

N - Anzahl der Einflussgrößen.

Modell der Auswertung, Funktion oder Funktionen mit der (denen) die numerische Auswertung durchgeführt wird

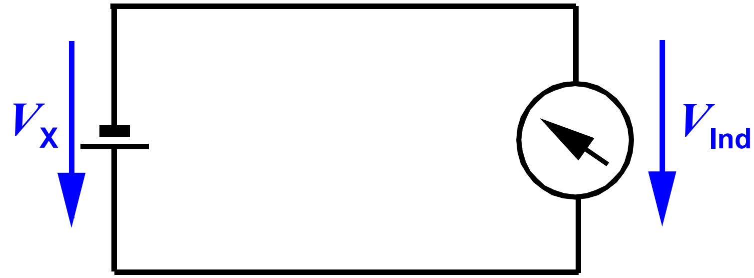
$$Y = f_{\text{Model}}(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

BEISPIEL **Direkte Messung einer elektrischen Gleichspannung**

- **Messaufgabe** (Definition der Messgröße)
  Ermittlung des Wertes einer elektrischen Gleichspannung von etwa **1,5 V**.
- **Messmethode**
  Ausschlagmethode (digitales Spannungsmessgerät).
- **Messverfahren**
  Ermittlung der elektrischen Spannung aus der Anzeige des Spannungsmessgerätes.

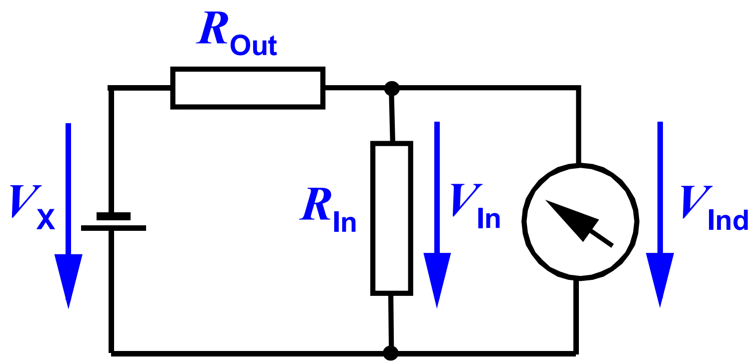
Messaufbau (schematisch)

V_X - zu messende Spannung,
V_{Ind} - angezeigte Spannung.

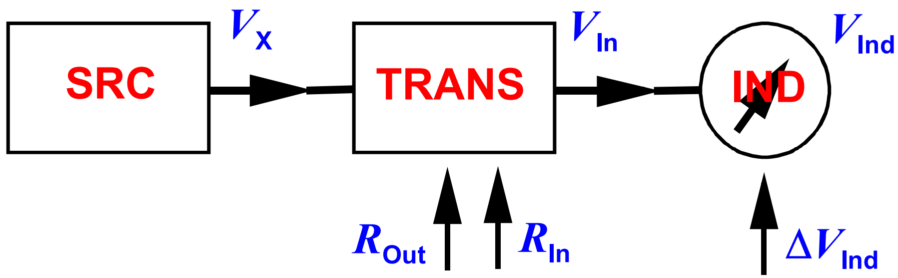


Realisierung in der Messung (Response-Funktion)

Schematischer Messaufbau (Schaltbild)



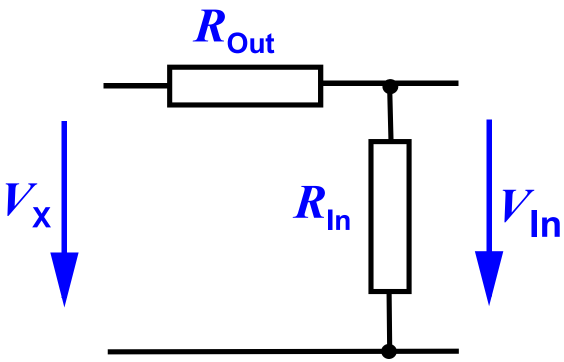
Ursache-Wirkung-Diagramm



V_X - zu messende Spannung,
R_{Out} - Ausgangswiderstand,
V_{in} - Spannung am Eingangswiderstand,
R_{in} - Eingangswiderstand,
V_{Ind} - angezeigte Spannung.

Einfluss des Eingangswiderstandes des Spannungsmessgerätes

Aufbau (Reihenschaltung, schematisch)



V_{X} - zu messende Spannung;
R_{Out} - Innenwiderstand der Quelle;
V_{In} - Spannung am Eingangswiderstand;
R_{In} - Eingangswiderstand des Spannungsmessgerätes.

Response-Funktion

$$V_{\text{In}} = \frac{R_{\text{In}}}{R_{\text{Out}} + R_{\text{In}}} \cdot V_{\text{X}} = \frac{1}{1+r} \cdot V_{\text{X}}$$

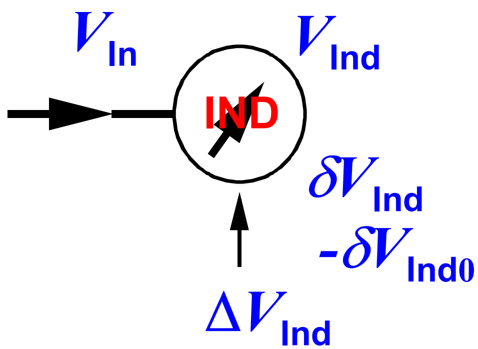
r - Widerstandsverhältnis von Innenwiderstand der Spannungsquelle zu Eingangswiderstand des Spannungsmessgerätes

$$r = \frac{R_{\text{Out}}}{R_{\text{In}}} : 0_{[R_{\text{In}} \to \infty]} \ldots r_{\text{max}} = \frac{R_{\text{Out,max}}}{R_{\text{In,min}}}$$

ISO/BIPM-GUM Sicht

Kenntnisse über das Messverfahren

Anzeige mit dem Spannungsmessgerät



ΔV_{Ind} - Messabweichung der Anzeige

δV_{Ind}, δV_{Ind0} - mögliche, jedoch unbekannte Abweichungen aufgrund der endlichen digitalen Auflösung (Skalenteilung) bei der Anzeige/Nullpunktsüberprüfung.

Modell der Werteskala einer Größe X

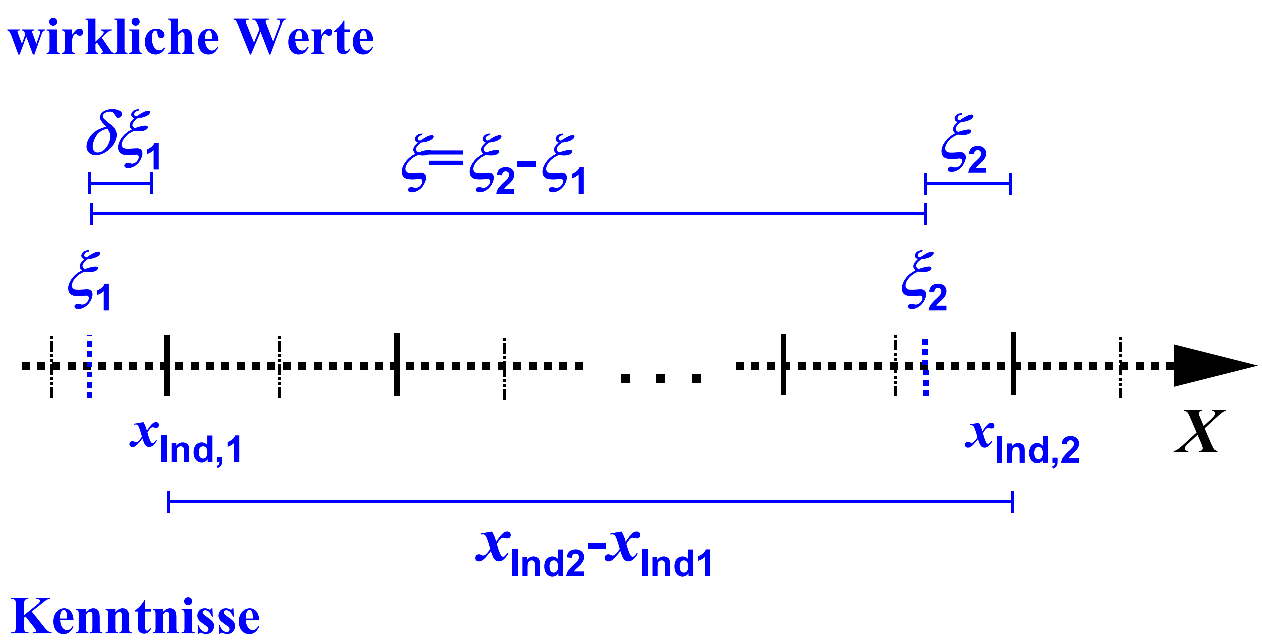
Diskrete Menge von (meist äquidistanten) Werten zusammen mit einem Verfahren, wie die Menge der kontinuierlichen Werte der Größe X abzubilden sind. I.Allg. ist ein Skalenwerte x_{Ind} der Mittelpunkt des Intervalles der Werte der Größe X, die auf den Skalenwert (Anzeige) abgebildet werden. Die Abbildung ist nicht 1-1-deutig, und die Kenntnis der 1-deutigen Anzeige nicht ausreichend den wirklichen Wert zu charakterisieren. Größe X wird zur Zufallsgröße.

Definition Messabweichung

$$x_{\mathrm{Ind}} = \xi + \delta\xi$$

also

$$x_{\mathrm{Ind,2}} - x_{\mathrm{Ind,1}}$$
$$= \xi_2 - \xi_1$$
$$+ \delta\xi_2 - \delta\xi_1$$



Response-Funktion für das anzeigende Messgerät

$$V_{\mathrm{Ind}} = V_{\mathrm{In}} + \Delta V_{\mathrm{Ind}}$$
$$+ \delta V_{\mathrm{Ind}} - \delta V_{\mathrm{Ind0}}$$

Zusammenhang zwischen angezeigten und möglichen (wirklichen) Werten einer Größe X.

$x_{\mathrm{Ind,1}}$, $x_{\mathrm{Ind,2}}$ - angezeigte Werte;

ξ_1, ξ_2 - mögliche Werte;

$\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$ - Abweichungen zwischen möglichen und angezeigten Werten.

Modell der Auswertung

$$V_X = (1 + r) \cdot V_{In}$$

$$V_{In} = V_{Ind} - \Delta V_{Ind} - \delta V_{Ind} + \delta V_{Ind0}$$

Relevante Größen der Auswertung

V_X - (zu ermittelnder) elektrische Spannung (Messgröße);

$r = R_{Out}/R_{In}$ - Widerstandsverhältnis von Ausgangswiderstand der Spannungsquelle zu Eingangswiderstand des Spannungsmessgerätes;

V_{In} - Eingangsspannung am Spannungsmessgerät (Zwischengröße);

V_{Ind} - (vom Spannungsmessgerät) angezeigte elektrische Spannung;

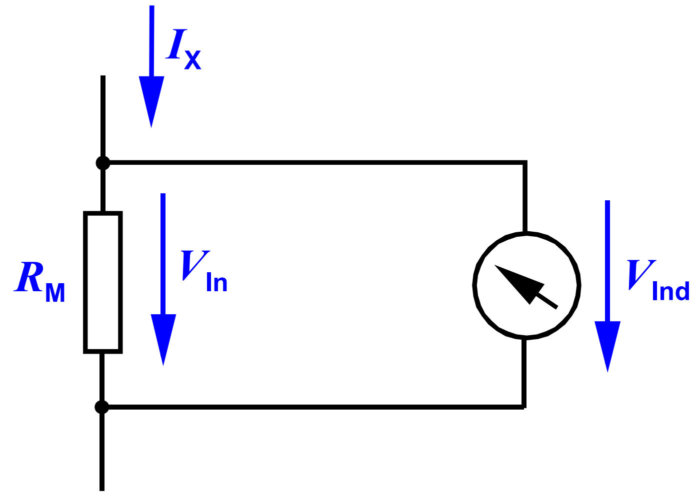
ΔV_{Ind} - Messabweichung des Spannungsmessgerätes (bei der angezeigten Spannung);

δV_{Ind}, δV_{Ind0} - mögliche Messabweichung des Spannungsmessgerätes bei der angezeigten Spannung bzw. der Nullpunkt-Überprüfung aufgrund der endlichen Auflösung der Anzeige.

BEISPIEL **Indirekte Messung eines elektrischen Gleichsstromes**

- **Messaufgabe** (Definition der Messgröße)
  Ermittlung der Stärke eines elektrischen Gleichstromes von etwa **10 A**.
- **Messmethode**
  Ausschlagmethode (Umformung in eine elektrische Spannung).
- **Messverfahren**
  Ermittlung der elektrischen Spannung, die der Strom an den Enden eines Messwiderstandes erzeugt.

Messaufbau (schematisch)



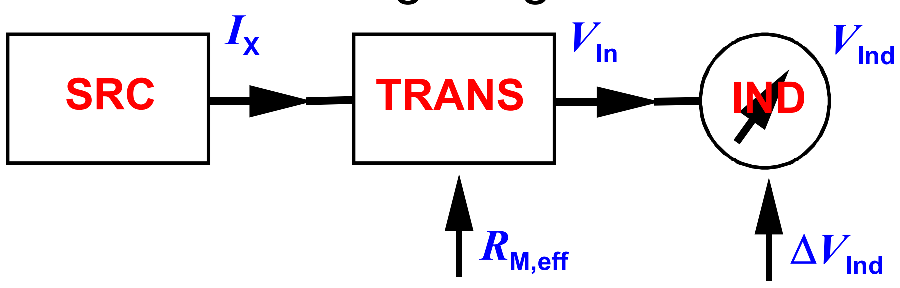
I_X - zu messender Strom,
R_M - Messwiderstand,
V_{In} - Spannung am Messwiderstand,
V_{Ind} - angezeigte Spannung,

ISO/BIPM-GUM Sicht

Kenntnisse über das Messverfahren

Realisierung in der Messung (Response-Funktion)

Ursache-Wirkung-Diagramm



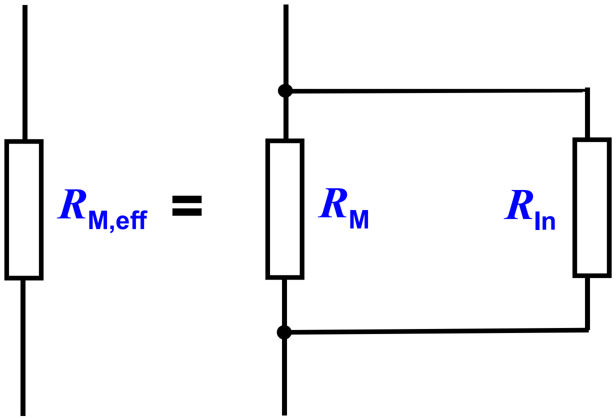
Response-Funktion
(effektiver Strom-Spannung-Messumformer)

$$V_{In} = R_{M,eff} \cdot I_X$$

mit

$R_{M,eff}$ - effektiver Messwiderstand

Eingangswiderstand des Spannungsmessgerätes
Aufbau (Nebenschluss, schematisch)



$R_{\mathrm{M,eff}}$ - effektiver Messwiderstand,
R_{M} - Messwiderstand,
R_{In} - Eingangswiderstand des Spannungsmessgerätes

$$\frac{1}{R_{\mathrm{M,eff}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{M}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{In}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{M}}}(1+r)$$

r - Widerstandsverhältnis von Mess- zu Eingangswiderstand des Spannungsmessgerätes

$$r = \frac{R_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{In}}} : 0_{[R_{\mathrm{In}} \to \infty]} \ldots r_{\mathrm{max}} = \frac{R_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{In,min}}}$$

Einfluss der Temperatur

Temperaturabhängigkeit des Widerstandswertes des Messwiderstandes

$$R_{\mathrm{M}} = R_{\mathrm{M}\,0} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

mit

R_{M0} - Wert des Messwiderstandes bei der Referenztemperatur ϑ_0,

α - Temperaturkoeffizient (TK) des Widerstandsmaterials,

$\Delta\vartheta$ - Abweichung der Messtemperatur von der Referenztemperatur ϑ_0 (in der elektrischen Messtechnik $\vartheta_0 = 23°\mathrm{C}$, in der Längenmesstechnik $\vartheta_0 = 20°\mathrm{C}$).

Modell der Auswertung

$$I_X = \frac{V_{In}}{R_{M,eff}}$$

$$R_{M,eff} = \frac{R_M}{1+r}$$

$$R_M = R_{M0}(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

$$V_{In} = V_{Ind} - \Delta V_{Ind} - \delta V_{Ind} + \delta V_{Ind0}$$

Relevante Größen der Auswertung

I_X - (zu ermittelnder) elektrischer Strom (Messgröße);

V_{Ind} - angezeigte elektrische Spannung;

ΔV_{Ind} - Messabweichung des Spannungsmessgerätes;

δV_{Ind}, δV_{Ind0} - Abweichung, Skalenteilung;

$r = R_M/R_{In}$ - Verhältnis von Mess- zu Eingangswiderstand des Spannungsmessgerätes;

R_{M0} - Wert des Messwiderstandes bei der Referenztemperatur ϑ_0;

α - Temperaturkoeffizient des Messwiderstandes;

$\Delta\vartheta$ - Abweichung der Messtemperatur von der Referenztemperatur ϑ_0.

Kenntnissen über die Daten

(Kenntnisse/Ermittlungsmethode Typ B)

Wissenschaftlich fundierte Beurteilung der Variabilität der möglichen Werte, die unmittelbar in eine Verteilung der möglichen Werte übersetzt werden kann:

- Daten aus vorhergehenden Messungen,
- Erfahrungen/allgemeine Kenntnis über das Verhalten/Eigenschaften von Messgeräten/Materialien,
- Hersteller-Spezifikationen,
- Angaben in Kalibrierscheinen und/oder anderen Zertifikaten,
- Werteangaben in Handbücher u.ä.

Mehr oder weniger genaue Kenntnisse über verträgliche Werte einer messbaren Größe X werden durch Verteilungen der möglichen Werte ξ beschrieben.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi_X(\xi\,|H)$ bestimmt das Gewicht, das einem Wert ξ der Größe X aufgrund der vorhandenen Kenntnisse (Hypothese H) beigemessen wird.

Normierung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(\xi \mid H) \cdot d\xi = 1$$

Erwartung

$$x = \mathrm{E}[X \mid H] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \cdot \varphi_X(\xi \mid H) \cdot d\xi$$

Varianz

$$u^2(x) = \mathrm{Var}[X \mid H] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 \varphi_X(\xi \mid H) \cdot d\xi$$

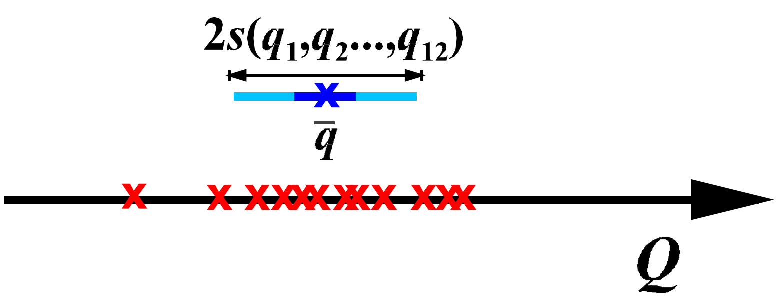
[die Varianz ist das Quadrat der mittleren Abweichung (Weite, Standardabweichung) der Werte von der Erwartung]

Kenntnisse, **Verteilungsform**	**Parameter der Verteilung**	**Bester Schätzwert** x	**Standard-messuns.** $u(x)$	**Erweiterungs-faktor** $k_{0,95}$
Wert innerhalb der Grenzen x_{min}, x_{max} **rechteck-förmig**	Halbweite $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/2$	$x = (x_{max} + x_{min})/2$	$\Delta x/\sqrt{3}$	1,65
$X = X_1 \pm X_2$ beide rechteckförmig gleiche Halbweite $\Delta x_1 = \Delta x_2$ unabhängig, **dreieck-förmig**	Halbweite $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$	$x = x_1 \pm x_2$	$\Delta x/\sqrt{6}$	1,91
$X = x_{Amp} \cdot \cos(\varphi)$ Phase unbestimmt, **U-förmig**	Halbweite $\Delta x = x_{Amp}$	$x = 0$	$\Delta x/\sqrt{2}$	1,34
Schätzwert Standardabweichung, **normal**	Standardabweichung σ,	Erwartung μ	σ	2

(Kenntnisse/Ermittlungsmethode Typ A)

Kenntnisse für die keine wissenschaftlich fundierte Beurteilung der Variabilität der möglichen Werte bekannt ist, sondern unmittelbar aus während der Messung gemachten Beobachtungen erschlossen werden muss:

Wiederholte Beobachtungen der Größe Q zeigen aufgrund der großen Empfindlichkeit des Messverfahrens eine Streuung.



arithmetischer Mittelwert

$$\mu = \bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{1 \le j \le n} q_j$$

empirische Standardabweichung der Einzelbeobachtung

$$\sigma = s(\underline{q}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{1 \le j \le n} (q_j - \bar{q})^2}$$

Statistische Auswertung der Daten

(1) Beurteilung der einzelnen Beobachtungen

Die Kenntnis der Erwartung μ und der Varianz σ^2 wird umgesetzt in eine glocken-förmige Normal-(Gauß-)Verteilung[+)] (Prinzip der maximalen Entropie);

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi_X(\xi \mid H_{\text{Normal}}(\mu,\sigma)) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\exp\left(-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\cdot\sigma_2}\right)$$

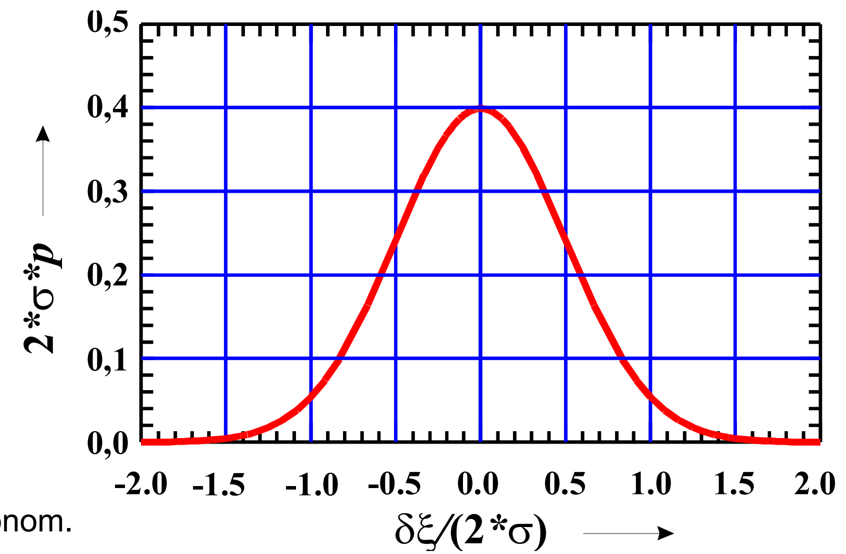
Erwartung

$$\mathrm{E}[Q \mid H_{\text{Normal}}(\mu,\sigma)] = \mu = \bar{q}$$

Varianz

$$\mathrm{Var}[Q \mid H_{\text{Normal}}(\mu,\sigma)] = \sigma^2 = s^2(\underline{q})$$

Abweichungen von der Erwartung



+) ***Carl Friederich Gauß* (1777-1855),** deutscher Mathematiker und Astronom.

(2) Beurteilung der Gesamtheit der Beobachtungen:
Jede Beobachtung hat das gleiche Gewicht in der Verwirklichung.
Daher ist der arithmetische Mittelwert zugleich das Verfahren,
das die Kenntnisse über die unabhängig beobachteten Größen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$
geeignet zusammenfasst (Modell der Auswertung).

$$\overline{Q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Q_j$$

bester Schätzwert

$$q = \mathrm{E}[\overline{Q} \mid H] = \overline{q}$$

beigeordnete Standardmessunsicherheit

$$u(\overline{q}) = \sqrt{\mathrm{Var}[\overline{Q} \mid H]} = \frac{s(q)}{\sqrt{n}}$$

Wiederholte Beobachtungen sind somit eine Form der Evaluation (Beurteilung), bei der die benötigten (speziellen) Kenntnisse über die Messung erst in der Messung selbst gewonnen werden.

Wie wird ausgewertet?

(1) Kenntnisse über das Messverfahren: (Messtechnische Zusammenhänge)

Modell der Auswertung

$$Y = f_{\text{Model}}(X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

Y - Ergebnisgröße der Auswertung

$X_1, X_2, \ldots, X_N$ - Eingangsgrößen der Auswertung

(2) Kenntnisse über die Daten: (Verteilungen der Werte der Eingangsgrößen)

(bester Schätz-)Wert, der einer Eingangsgröße zugeordnet wird

$$x = \mathrm{E}[X]$$

Standardmessunsicherheit, die dem Wert beigeordnet ist

$$u(x) = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

(3) Messwert (bester Schätzwert für den Wert der Messgröße)

$$y = f_{\text{Model}}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

y - Messergebnis,

$x_1, x_2, \ldots, x_N$ - Eingangswerte.

(4) Standardmessunsicherheit, die dem Messwert beigeordnet wird

Sensitivitätskoeffizienten

$$c_i = \left.\frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial X_i}\right|_{X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_N=x_N} = \frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial x_i}$$

Unsicherheitsbeiträge

$$u_i(y) = c_i \cdot u(x_i)$$

Standardmessunsicherheit

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{N} u_i(y) r(x_i, x_k) u_k(y)}$$

Korrelationskoeffizienten (der Kenntnisse)

$$r(x_i, x_k) = \frac{\mathrm{Cov}[X_i, X_k]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_i]} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}[X_k]}}$$

	X_1	X_2	...	X_N
X_1	1,0	r_{12}	...	r_{1N}
X_2	r_{21}	1,0		r_{2N}
:	:	:	:	:
X_N	r_{N1}	r_{N2}	...	1,0

Quadratisches Schema
der Korrelationskoeffizienten

Allgemeine Eigenschaften

$$|r(x_i, x_k)| \leq 1$$

$$r(x_i, x_i) = 1$$

$$r(x_i, x_k) = r(x_k, x_i)$$

Nicht korrellierte Kenntnisse über die Eingangsgrößen

(meist vorliegender Fall bei Messungen)

$$i_1 \neq i_2 \quad \Rightarrow \quad r(x_{i_1}, x_{i_2}) = 0$$

$$u^2(y) = u_1^2(y) + u_2^2(y) + \ldots + u_N^2(y)$$

	X_1	X_2	...	X_N
X_1	1,0	0	...	0
X_2	0	1,0		0
:	:	:	:	:
X_N	0	0	...	1,0

Schema der Korrelationskoeffizienten bei unabhängigen Kenntnissen über die Eingangsgrößen

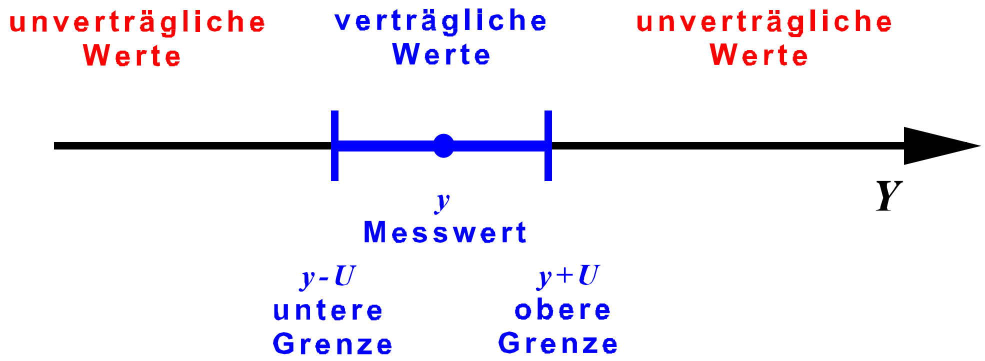
Die Kenntnisse über zwei Eingangsgrößen X_i und X_k können als unkorrelliert gelten, wenn [GUM F.1.2]

- die Eingangsgrößen wiederholt, jedoch nicht gleichzeitig in verschiedenen Experimenten beobachtet werden oder wurden,
- die Eingangsgrößen Ergebnisgrößen zweier Auswertungen sind, die unabhängig voneinander ausgeführt werden oder wurden,
- eine den Größen bezüglich der anderen als konstant angesehen wird, oder
- es keinen (wissenschaftlich fundierten oder fundierbaren) Hinweis auf eine wechselseitige Abhängigkeit gibt.

Unsicherheitsintervall

Halbweite eines Intervalles, das die verträglichen Werte umfasst

$$I_Y = [y - U, y + U]$$



Erweiterte Messunsicherheit

- **Messergebnis** $y \pm U$
- **erweiterte Messunsicherheit** $U = k_P \cdot u(y)$
- Wahl eines Erweiterungsfaktors (coverage factor) k_P, so dass das Intervall I_Y den gewünschten hohen Anteil P (Überdeckungswahrscheinlichkeit, coverage probability), i. Allg. $0{,}95$, überdeckt.
- Für eine nahezu glocken-förmige Normalverteilung der möglichen Werte der Messgröße ist $k_{0,95} \cong 2$

Effektiver Freiheitsgrad

Zuverlässigkeit der Einschätzung der Standardmessunsicherheit wird ausgedrückt durch den effektiven Freiheitsgrad

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\frac{u_1^4(y)}{\nu_1} + \frac{u_2^4(y)}{\nu_2} + \ldots + \frac{u_N^4(y)}{\nu_N}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

- Freiheitsgrad eines Unsicherheitsbeitrages
- Ermittlungsmethode A mit ***n*** Beobachtungen $\nu = n - 1$
- Ermittlungsmethode B $\nu = \infty$
- Erweiterungsfaktoren für verschieden effektive Freiheitsgrade [EA-4/02]

ν_{eff}	1	2	3	4	6	8	10	20	50	∞
$k_{0,95}$	14,0	4,53	3,31	2,87	2,52	2,37	2,28	2,13	2,05	2,00

Spezialfall

Die Kenntnisse für eine Eingangsgröße der Auswertung bestehen in wiederholten Beobachtungen; die statistische Auswertung nach der Ermittlungsmethode A liefert den Unsicherheitsbeitrag $u_\mathsf{A}(y)$.
Die übrigen Eingangsgrößen werden nach der Ermittlungsmethode B ausgewertet mit dem Unsicherheitsbeitrag

$$u_\mathsf{B}^2(y) = \sum_{i=1}^{N_\mathsf{B}} u_{\mathsf{B}\,i}^2(y)$$

Der effektive Freiheitsgrad für die Kenntnisse über das vollständige Messergebnis ergibt sich in diesem Fall zu

$$\nu_\mathsf{eff} = \nu_\mathsf{A} \cdot \left(1 + \left(\frac{u_\mathsf{B}(y)}{u_\mathsf{A}(y)}\right)^2\right)^2$$

Hier gilt die Abschätzung

$$\nu_{\text{eff}} \geq \nu_{\text{A}} \cdot \left(1 + \sum_{u_{\text{B}}(y) \geq u_{\text{A}}(y)} \frac{u_{\text{B}\,i}^2(y)}{u_{\text{A}}^2(y)} \right)^2 \geq \nu_{\text{A}} \cdot \left(1 + N_{u_{\text{B}}(y) \geq u_{\text{A}}(y)} \right)^2$$

d.h. ist die Anzahl der Eingangsgrößen, deren nach der Ermittlungsmethode B berechneter Unsicherheitsbeitrag nicht kleiner ist als der (einzige) nach der Ermittlungsmethode A berechnete Unsicherheitsbeitrag, größer oder gleich 4 und die Anzahl der wiederholten Beobachtungen nicht kleiner als 3,

$$N_{u_{\text{B}}(y) \geq u_{\text{A}}(y)} \geq 4 \qquad \nu_{\text{A}} \geq 3$$

so ist der effektive Freiheitsgrad

$$\nu_{\text{eff}} \geq 50$$

und der Erweiterungsfaktor gleich dem Erweiterungsfaktor, der sich allein aus dominierenden Unsicherheitsbeiträgen nach der Ermittlungsmethode B ergibt (i.Allg. $k_{0,95} \cong 2$).

BEISPIEL **Indirekte Messung eines elektrischen Gleichstroms**
(Modell der Auswertung MEAS05F48...52)

Die Aufgabe besteht in einem Laboratorium darin, einen elektrischen Gleichstrom von etwa **10 A** zu messen, mit dem für eine umfassendere Messung in einer Spule ein magnetisches Feld erzeugt wird:

- zur Verfügung steht ein **4½**-stelliges Digitalvoltmeter;
- ein kalibrierter Messwiderstand mit dem Nennwert **10 mΩ**;
- aus dem Datenblatt des Digitalvoltmeters ergibt sich, dass sein Eingangswiderstand des Digitalvoltmeters größer als **1 MΩ** ist.
- Die Raumtemperatur wird während der Messung im Bereich **(23±2)°C** gehalten.

Der Messwiderstand wird benutzt, um den wertmäßig nicht genau bekannten elektrischen Strom in eine elektrische Spannung umzuformen. Ihr Wert wird mit dem Digitalvoltmeter ermittelt

Bewertung der Kenntnisse

δI_{Src} : Leckströme innerhalb **0,0 ... -1,0 mA**

V_{Ind} : 12 Beobachtungen (Erfassen von Rauscheinflüssen)

ΔV_{Ind} : maximal zulässige Messabweichung (MPE)

$$0{,}25 \cdot 10^{-3} \times V_{Ind} + 0{,}10 \cdot 10^{-3} \times V_{Range}$$

(Herstellerangabe für den Temperaturbereich **15...25 °C**)

Anzeige **100 mV**, Messbereich **0...200 V**

Abweichung innerhalb **± 0,045 mV**

δV_{Ind}, $\delta V_{Ind,0}$: digitale Auflösung (**4½**-stelliges DVM, **200 mV**-Bereich,)

0,01 mV, Abweichung innerhalb **±0,005 mV**

$r = R_{Out}/R_{In}$: Widerstandsverhältnis

Ausgangswiderstand $R_M < 10\ \mathrm{m\Omega}$, Eingangswiderstand $R_{In} > 1\ \mathrm{M\Omega}$

$$0{,}0 \ldots 10 \cdot 10^{-9}$$

Bewertung der Kenntnisse

R_{M0} : Widerstandwert des Messwiderstandes bei der Referenztemperatur $t_0 = 23\ °C$ (Kalibrierschein, $k = 2$) — $10{,}0180 \cdot (1 \pm 0{,}6 \cdot 10^{-3})\ m\Omega$

α : Temperaturkoeffizient, Messwiderstand — $50{,}0 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$

Δt : Temperaturabweichung innerhalb — $\pm 2\ K$

Ablesungen der Anzeige (da keine Vorverarbeitung der Ablesungen vorgenommen wird, sind die Beobachtungen gleich den Ablesungen):

Lfd.Nr.	Wert
1	100,13 mV
2	99,98 mV
3	99,94 mV
4	100,09 mV
5	100,20 mV
6	99,93 mV
7	99,98 mV
8	99,90 mV
9	100,06 mV
10	100,15 mV
11	100,06 mV
12	99,94 mV

Größe X_i	Wert x_i	Standard-messuns. $u(x_i)$	Ver-teilung	Freiheits-grad ν_i	Sensitivitäts-koeffizient c_i	Unsicherheits-beitrag $u_i(y)$
V_{IN}	100,0300 mV	0,0387 mV				
R_{Meff}	10,0180 mΩ	$3{,}06\cdot10^{-3}$ mΩ				
δI_X	-0,5 mA	$0{,}289\cdot10^{-3}$ A	rectang	∞	-1,0	$-0{,}29\cdot10^{-3}$ A
V_{Ind}	100,0300 mV	0,0284 mV	normal	11	0,10 mΩ^{-1}	$2{,}8\cdot10^{-3}$ A
ΔV_{Ind}	0,0 mV	0,0260 mV	rectang	∞	-0,10 mΩ^{-1}	$-2{,}6\cdot10^{-3}$ A
δV_{Ind}	0,0 mV	$2{,}89\cdot10^{-3}$ mV	rectang	∞	-0,10 mΩ^{-1}	$-0{,}29\cdot10^{-3}$ A
$\delta V_{Ind,0}$	0,0 mV	$2{,}89\cdot10^{-3}$ mV	rectang	∞	0,10 mΩ^{-1}	$-0{,}29\cdot10^{-3}$ A
R_M	10,01800 mΩ	$3{,}06\cdot10^{-3}$ mΩ				
r	$0{,}5\cdot10^{-9}$	$0{,}289\cdot10^{-9}$	rectang	∞	10 A	$2{,}9\cdot10^{-9}$ A
R_{M0}	10,01800 mΩ	$3{,}01\cdot10^{-3}$ mΩ	normal	50	-1,0 AmΩ^{-1}	$-3{,}0\cdot10^{-3}$ A
α	$50{,}0\cdot10^{-6}$ K^{-1}					
Δt	0,0 K	1,15 K	rectang	∞	$-0{,}5\cdot10^{-3}$ AK^{-1}	$-0{,}58\cdot10^{-3}$ A
I_X	9,9855 A	$4{,}93\cdot10^{-3}$ A		78		

Vollständiges Messergebnis

Messergebnis $I_X = 9{,}986\ \mathrm{A}$

erweiterte Messunsicherheit ($P = 0{,}95;\ k = 2$) $U = 10\ \mathrm{mA}$

Runden

- Wahrscheinlichkeiten $0 \leq P \leq 1$
- nur Angaben mit einer Präzision größer als 3-5% sind sinnvoll
- Unsicherheitsangaben resultieren aus Wahrscheinlichkeit-Einschätzungen
- Angabe der Messunsicherheit mathematisch runden
  auf nicht mehr als 2 signifikante Stellen
- weicht der gerundete Wert um mehr als 5% vom berechneten Wert ab, aufrunden.
- Messwert auf die signifikanten Stellen der Messunsicherheit mathematisch runden.

BEISPIEL **Runden**

	bester Schätzwert	**Erweiterte Messunsicherheit**
Rechnung	9,985 538 A	9,4647 mA
Rundung	9,9855 A	9,5 mA
praktisch	9,986 A	10 mA

Vollständiges Messergebnis

- Die bei einer Temperatur von **23 °C** gemessene Stärke des elektrischen Gleichstroms, der in der Spule das magnetische Feld erzeugt, beträgt
- $\mathbf{(9{,}986 \pm 0{,}010)\ A}$,

  $\mathbf{9{,}986\ A \pm 10\ mA}$

  oder $\mathbf{9{,}986\ A\ (1 \pm 1{,}0 \cdot 10^{-3})}$
- Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie entspricht im Normalfall einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95%.
- Die Standardmessunsicherheit ist in Übereinstimmung mit der Richtlinie EA-4/02(DKD-3) ermittelt worden.

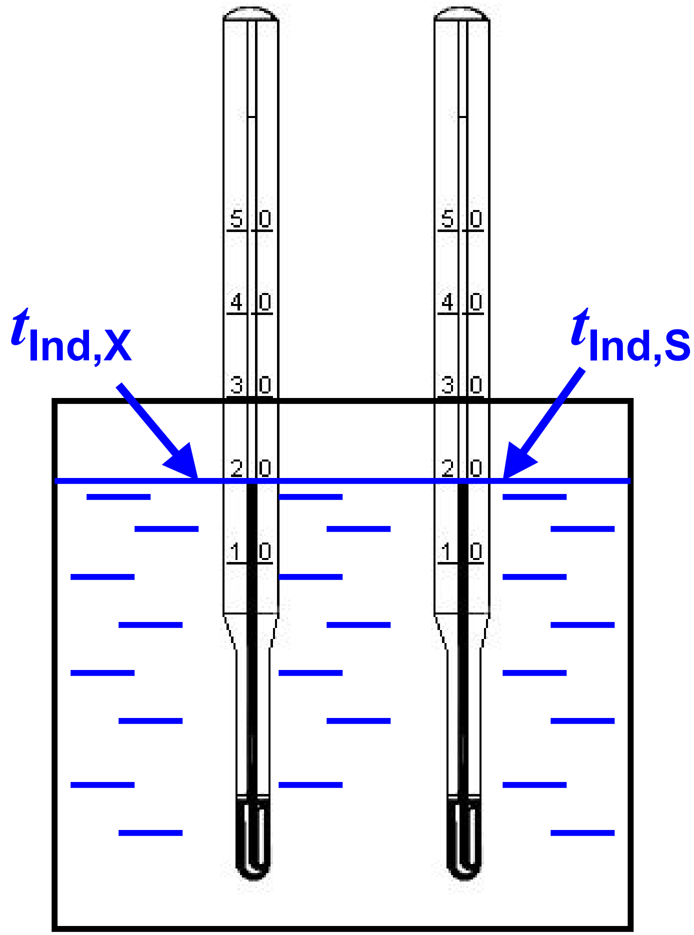
BEISPIEL **Kalibrierung eines Thermometers**

Messaufgabe (Definition der Messgröße)
Ermittlung der Messabweichung eines Quecksilber-Glasthermometers bei 20°C.

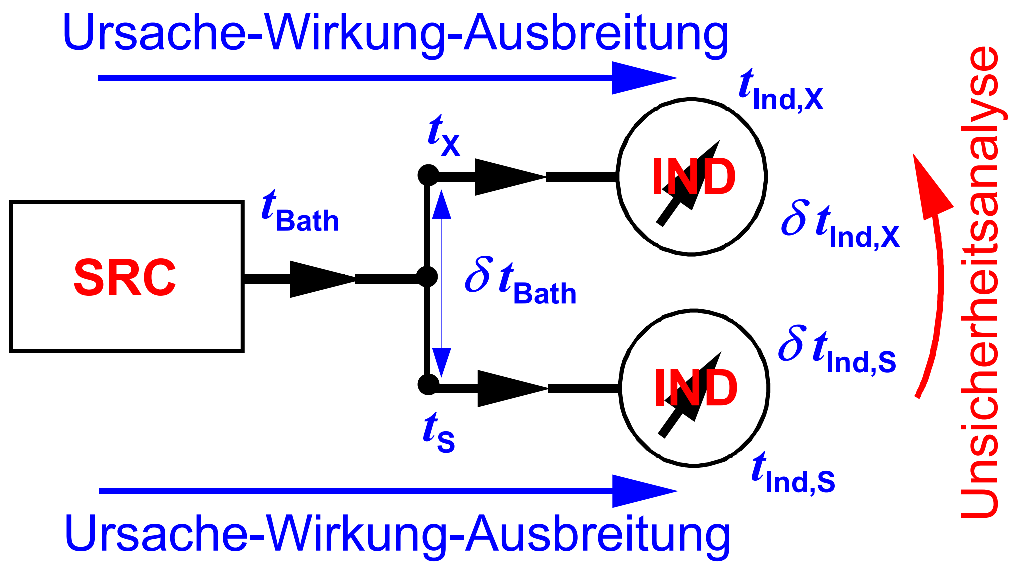
Messmethode:
Ausschlagmethode.

Messverfahren:
Vergleich der Anzeigen des zu kalibrierenden Quecksilber-Glasthermometers (Kalibrierobjekt) mit einem bekannten Quecksilber-Glasthermometer im gerührten Wasserbad.

Messaufbau
(schematisch)



Ursache-Wirkung-Ausbreitung



Δt_X - (zu ermittelnde) Messabweichung des zu kalibrierenden Thermometers (Kalibrierobjekt) bei der Temperatur von $20°C$,

$t_{Ind,X}$ - vom Kalibrierobjekt angezeigte Temperatur,

$\delta t_{Ind,X}$ - unbekannte , jedoch mögliche Abweichung aufgrund der endlichen Auflösung der Anzeige des Kalibrierobjektes,

t_X - Temperatur im gerührten Bad am Ort des Kalibrierobjektes,

t_S - Temperatur im gerührten Bad am Ort des Gebrauchsnormals,

δt_{Bath} - unbekannte, jedoch mögliche Abweichung zwischen den Temperaturen im gerührten Bad am Ort des Gebrauchsnormals und am Ort des Kalibrierobjektes,

$t_{Ind,S}$ - vom Gebrauchsnormal angezeigte Temperatur,

$\delta t_{Ind,S}$ - unbekannte , jedoch mögliche Abweichung aufgrund der endlichen Auflösung der Anzeige des Gebrauchsnormals,

$\Delta t_{Ind,S}$ - Messabweichung der Anzeige des Gebrauchsnormals zur Zeit der letzten Kalibrierung,

$\delta t_{Drift,S}$ - unbekannte, jedoch mögliche Abweichung der Messabweichung des Gebrauchsnormals vom Wert bei der letzten Kalibrierung (Drift).

Modell der Auswertung

$$\Delta t_X = t_{Ind,X} - (t_X + \delta t_{Ind,X})$$

$$t_X = t_S - \delta t_{Bath}$$

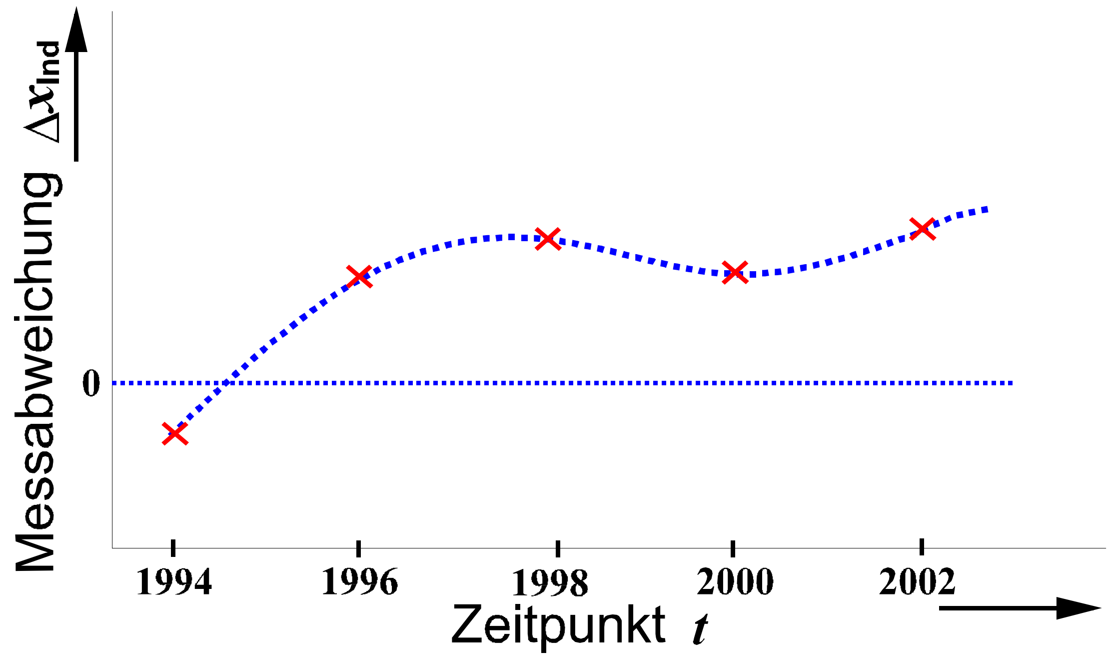
$$t_S = t_{Ind,S} - \delta t_{Ind,S} - \Delta t_{Ind,S} - \delta t_{Drift,S}$$

ISO/BIPM-GUM Verfahren

Auswertung

- **Messgerätedrift** (drift) [VIM 5.16]

  Langsame Änderung eines metrologischen Merkmals eines Messgerätes.



Die Drift ist **nicht allein** eine Geräteeigenschaft; sie ist abhängig vom

- konstruktiven Entwurf und Ausführung des Messgerätes,
- der Alterung des Messgerätes, aber auch
- dem Umgang mit dem Messgerät.

Bewertung der Kenntnisse

- $t_{\mathrm{Ind,X}}$: 9 Ablesungen der am Kalibrierobjekt angezeigten Temperatur
- $\delta t_{\mathrm{Ind,X}}$: Skalenteilungswert des Kalibrierobjektes **0,1 K**; Abweichung aufgrund der digitalen Auflösung innerhalb **± 0,05 K**
- δt_{Bath} : aus früheren (detaillierteren) Untersuchungen ist bekannt, dass der Temperaturgradient in dem gerührten Bad dem Betrage nach nicht größer ist als **0,5 Km^{-1}**.
  Abstand der Thermometer im Bad **60 mm**;
  resultierende Temperaturdifferenz innerhalb **± 30 mK**
- $t_{\mathrm{Ind,S}}$: 10 Ablesungen am Gebrauchsnormal angezeigten Temperatur
- $\delta t_{\mathrm{Ind,S}}$: Skalenteilungswert des Gebrauchsnormals **0,05 K**; Abweichung aufgrund der digitalen Auflösung innerhalb **± 0,025 K**

- $\Delta t_{\mathrm{Ind,S}}$: Anzeige des Gebrauchsnormals **20,0°C**
  zugeordnete richtige Temperatur
  laut Kalibrierschein **19,96°C ± 30 mK (k = 2)**
  resultierende Messabweichung **0,04°C ± 30 mK (k = 2)**
- $\delta t_{\mathrm{Drift,S}}$: aus der Kalibrierhistorie des Gebrauchsnormals ist bekannt, dass die Messabweichung von Kalibrierung zu Kalibrierung ihren Wert zufällig ändert und dass diese Änderung dem Betrage nach nicht größer ist als **40 mKa^{-1}** .
  Das Gebrauchsnormal wurde zuletzt vor einem halben Jahr kalibriert.
  resultierende Abweichung aufgrund der Drift
  innerhalb **± 20 mK**

Ablesungen der angezeigten Temperaturen (da keine Vorverarbeitung durchgeführt wird, sind die Ablesungen gleich den Beobachtungen)

$t_{\mathrm{Ind,X}}$

Lfd.Nr.	Wert
1	19,8 °C
2	19,9 °C
3	19,9 °C
4	20,0 °C
5	19,8 °C
6	19,8 °C
7	19,9 °C
8	19,8 °C
9	19,9 °C

$t_{\mathrm{Ind,S}}$

Lfd.Nr.	Wert
1	20,05°C
2	19,95°C
3	20,05°C
4	20,10°C
5	20,00°C
6	20,10°C
7	20,05°C
8	19,95°C
9	20,15°C
10	20,10°C

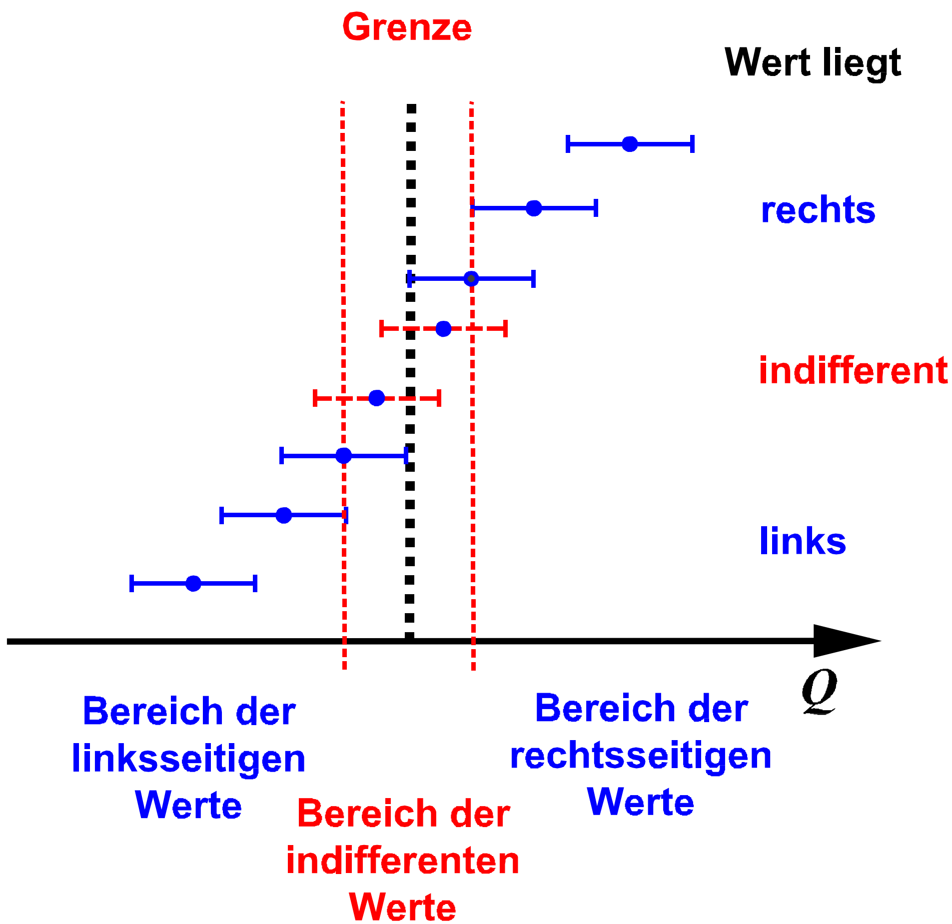
Größe X_i	Wert x_i	Standard-messuns. $u(x_i)$	Form	Freiheits-grad ν_i	Sensitivitäts-koeffizient c_i	Unsicher-heitsbeitrag $u_i(y)$
$t_{\mathrm{Ind,X}}$	19,867°C	23,6 mK	normal	8	1,0	24 mK
$\delta t_{\mathrm{Ind,X}}$	0,0 K	28,9 mK	rectang	∞	-1,0	-29 mK
δt_{Bath}	0,0 K	17,3 mK	rectang	∞	1.0	17 mK
$t_{\mathrm{Ind,S}}$	20,050°C	21,1 mK	normal	9	-1,0	-21 mK
$\delta t_{\mathrm{Ind,S}}$	0,0 K	14,4 mK	rectang	∞	1,0	14 mK
$\Delta t_{\mathrm{Ind,S}}$	0,040 K	15,0 mK	normal	50	1,0	15 mK
$\delta t_{\mathrm{Drift,S}}$	0,0 K	11,5 mK	rectang	∞	1,0	12 mK
$\Delta t_{\mathrm{Ind,X}}$	-0,143 K	52 mK		120		

Vollständiges Messergebnis

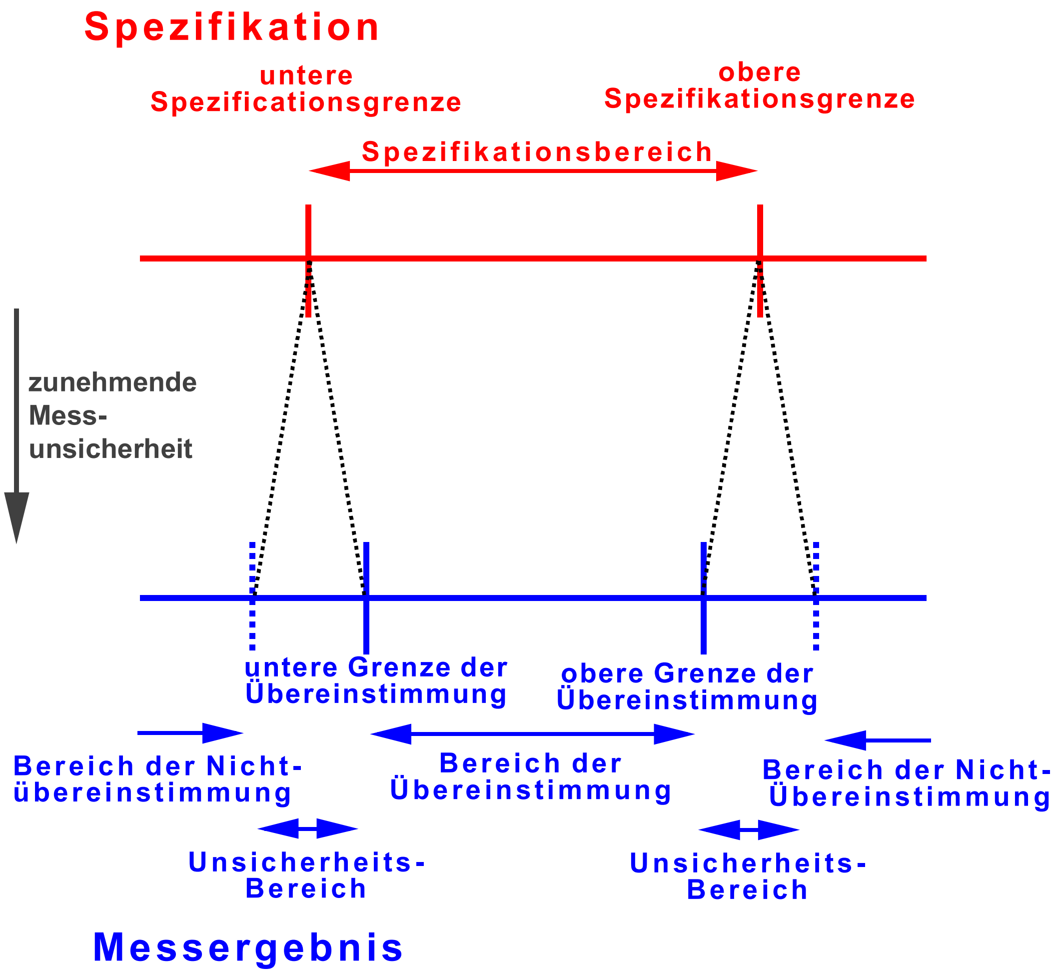
Messergebnis $\Delta t_{\mathrm{Ind,X}} = -0{,}14\ \mathrm{K}$

erweiterte Messunsicherheit ($P = 0{,}95$; $k = 2$) $U = 0{,}10\ \mathrm{K}$

Erweiterte Messunsicherheit und Konformität



Spezifikationen [ISO DIN 14 253]



Wie kann der Einengung des Spezifikationsbereichs begegnet werden?

- **Re-Evaluation (Verbreiterung) des Spezifikationsbereichs,**
- **Verringerung des Unsicherheitsbereichs**
  - Erhöhung der Genauigkeit der Messung,
  - realistischere Ermittlung der Messunsicherheit.

In der modernen Wirtschaftsstruktur besteht die
Notwendigkeit, das Ergebnis einer Messung in Bezug auf richtige Werte darzustellen, um internationales Vertrauen und Akzeptanz zu erreichen

- für Mess- und Prüfergebnisse
- für Hersteller-Spezifikationen
- für Werteangaben in Normen

Das fördert

- einen Handel, frei von technischen Hemmnissen,
- die Vergabe von Aufträgen an Subunternehmen und Zulieferfirmen,
- eine effiziente Nutzung materieller Ressourcen
- die Verbesserung des Gesundheitssystems, die Herabsetzung der Umweltbelastung und die Verringerung des Sicherheitsrisikos
- die technische und wissenschaftliche Entwicklung
- die Qualitätssicherung, die Akkreditierung und die Zertifizierung von Produkten und Systemen.

[R. Kaarls (1992), Chairman WECC, Vice-Chair EA]

Das erfordert

- **(messtechnische) Rückverfolgbarkeit,**

  Rückführung (traceability) [VIM 6.10]

  Eigenschaft eines Messergebnisses oder des Wertes eines Normals, durch eine ununterbrochene Kette von Vergleichsmessungen mit angegebenen Messunsicherheiten auf geeignete Normale, im Allgemeinen internationale oder nationale Normale, bezogen zu sein.

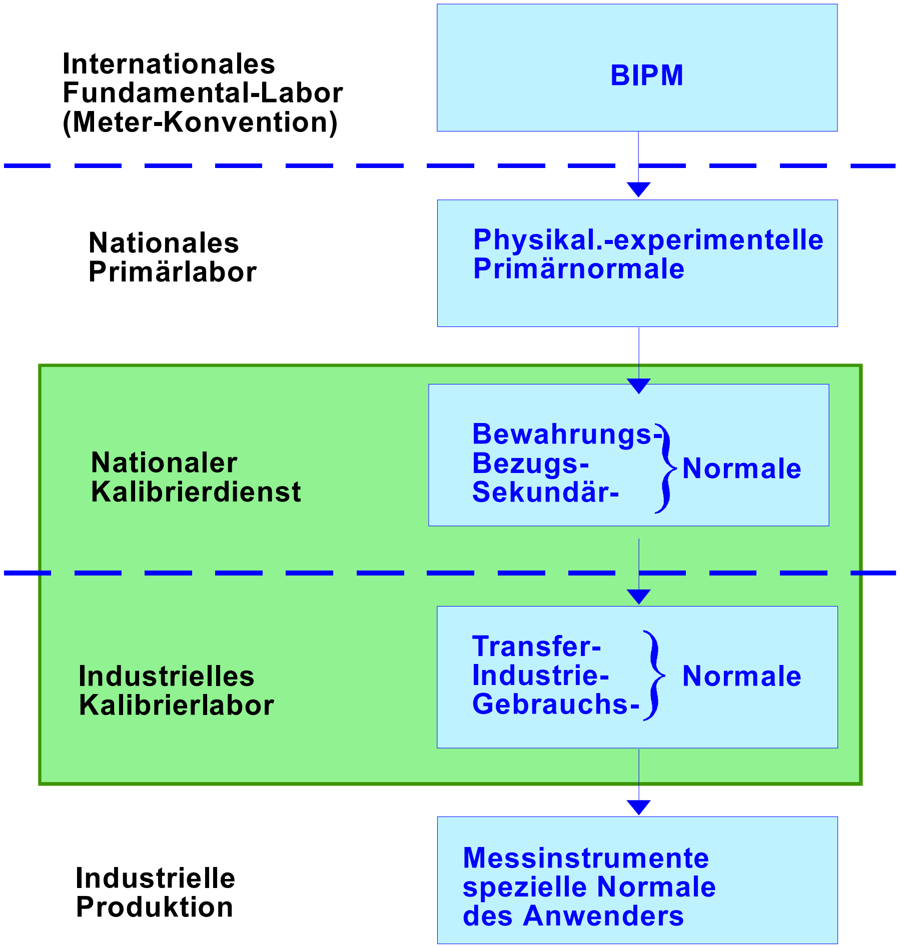
ÖKD Österreichischer Kalibrierdienst

http://www.bmwa.gv.at/BMWA/Themen/Unternehmen/TechnikAkkreditierung/Metrologie/metrologieokd

European co-operation for Accreditation

http//: www.european-accreditation.org

Rückführungskette (Rückführungshierarchie)



Definition/Realisierung

Übertragung

Anwendung

Messunsicherheit, definiert in einer **international anerkannten Form,** ist das Maß, mit dem das Vertrauen in das Ergebnis einer Messung quantitativ ausgedrückt wird.

Vertrauen in die Rückführung

gründet sich

auf die realistische Angabe der

Messunsicherheit

ÖKD Österreichischer Kalibrierdienst

http://www.bmwa.gv.at/BMWA/Themen/Unternehmen/TechnikAkkreditierung/Metrologie/metrologieokd

European co-operation for Accreditation

http//: www.european-accreditation.org

DIN EN ISO/IEC 17 025

- **Messunsicherheit** (uncertainty of measurement)
  [VIM 3.9, GUM 2.2.3, DIN V ENV 13005, DIN 1319-T1 3.6]
  Kennwert, der dem Messergebnis beigeordnet ist und den Bereich der Werte charakterisiert, die der Messgröße (aufgrund der über die Messung vorhandenen Kenntnisse) vernünftigerweise zugeordnet werden können.

Griechische Schriftzeichen

Großbuchstabe	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ
Kleinbuchstabe	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ
Name	**alpha**	**beta**	**gamma**	**delta**	**epsilon**	**zeta**	**eta**	**theta**

Großbuchstabe	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π
Kleinbuchstabe	ι	ε	λ	μ	ν	ξ	o	π
Name	**iota**	**kappa**	**lambda**	**my**	**ny**	**xi**	**omikron**	**pi**

Großbuchstabe	P	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω
Kleinbuchstabe	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
Name	**rho**	**sigma**	**tau**	**ypsilon**	**phi**	**chi**	**psi**	**omega**