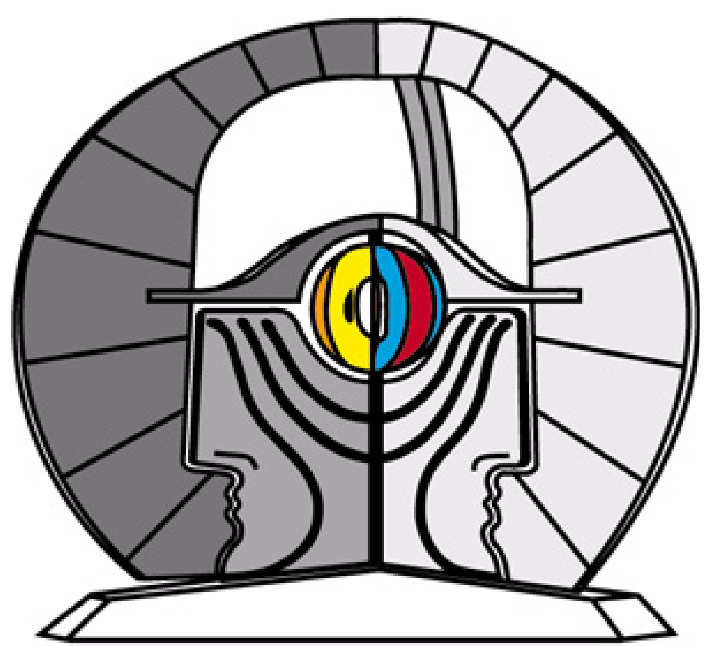
Aufgaben
zur Einführung in die Messtechnik
Die ISO/BIPM-GUM Sicht:
Schätzwert & Messunsicherheit

Wolfgang Kessel
Braunschweig



Institut für Experimentalphysik

AUFGABE01: Kovarianz zweier Größen.

In der Vorlesung wurden die Rechenregeln für Erwartungen einer Größe angegeben.

$$(E1) \qquad X = a \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}[a] = a$$

$$(E2) \qquad \mathrm{E}[X + a] = \mathrm{E}[X] + a$$

$$(E3) \qquad \mathrm{E}[a \cdot X] = a \cdot \mathrm{E}[X]$$

$$(E4) \qquad \mathrm{E}[X_1 + X_2] = \mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2]$$

$$(E5) \qquad \mathrm{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_2]$$

Beweisen Sie damit die ebenfalls in der Vorlesung angegebenen Regeln für das Rechnen mit der Kovarianz zweier Größen.

$$(C1) \qquad \mathrm{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_2] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cov}[X_1, X_2] = 0$$

$$(C2) \qquad \mathrm{Cov}[X_1, X_2] = \mathrm{Cov}[X_2, X_1]$$

$$(C3) \qquad \mathrm{Cov}[a, X] = 0$$

$$(C4) \qquad \mathrm{Cov}[X_1 + a, X_2] = \mathrm{Cov}[X_1, X_2]$$

$$(C5) \qquad \mathrm{Cov}[X_1 + X_2, X] = \mathrm{Cov}[X_1, X] + \mathrm{Cov}[X_2, X]$$

AUFGABE02: Varianz einer Größe.

Beweisen Sie aus den Regeln der vorstehenden Aufgabe01 die in der Vorlesung zusammengestellten Regeln für das Rechnen mit der Kovarianz zweier Größen (die Regeln wurden auch in der Vorlesung angegeben) die Regeln für das Rechnen mit der Varianz einer Größe.

$$(V1) \qquad \mathrm{Var}[a] = 0$$

$$(V2) \qquad \mathrm{Var}[X + a] = \mathrm{Var}[X]$$

$$(V3) \qquad \mathrm{Var}[a \cdot X] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$$

$$(V4) \qquad \mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + 2 \cdot \mathrm{Cov}[X_1, X_2]$$

$$(V5) \qquad \mathrm{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathrm{E}[X_1] \cdot \mathrm{E}[X_2]$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2]$$

AUFGABE03: Steinerscher Satz.

Benutzen Sie den Steinerscher Satz, um die Formel abzuleiten

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$$

AUFGABE04: Kovarianz von Summe und Differenz.

Von zwei Größen X_1 und X_2 sind die Erwartungen $x_1 = \mathrm{E}[X_1]$ und $x_2 = \mathrm{E}[X_2]$ sowie die zugehörigen Varianzen $u^2(x_1) = \mathrm{Var}[X_1]$ und $u^2(x_2) = \mathrm{Var}[X_2]$ bekannt. Darüber hinaus sind die Kenntnisse über sie als unabhängig anzusehen. Zeigen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Kovarianzen/Varianzen, dass unter diesen Voraussetzungen der Korrelationskoeffizient der beiden Zufallsgrößen $Y_1 = a_1 + b_1 \cdot (X_1 + X_2)$ und $Y_2 = a_2 + b_2 \cdot (X_1 - X_2)$ gleich dem Verhältnis der Differenz zur Summe der Varianzen der ursprünglichen Größen X_1 und X_2 ist, d.h.

$$r(y_1, y_2) = \frac{\mathrm{Var}[X_1] - \mathrm{Var}[X_2]}{\mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2]}$$

AUFGABE05: Linearisiertes/lineares Modell der Auswertung

Wird zur Auswertung einer Messung Modell der Auswertung um den Arbeitspunkt in den Abweichungen von den Erwartungen der Eingangsgrößen) linearisiert

$$f_{\text{Model}}(X_1, X_2, \ldots, X_N) \cong f_{\text{Model}}(x_1, x_2, \ldots, x_N) + \sum_{1 \le i \le N} c_i \cdot (X_i - x_i)$$

wobei

$$c_i = \left. \frac{\partial f_{\text{Model}}}{\partial X_i} \right|_{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_N = x_N}$$

die Sensitivitätskoeffizienten im Arbeitspunkt sind, so ergibt sich das Messergebnis und das ihm beigeordnete Quadrat der Standard-Messunsicherheit durch

$$y = \mathrm{E}[Y] \cong f_{\text{Model}}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

$$u^2(y) = \mathrm{Var}[Y] = \sum_{\substack{1 \le i_1 \le N \\ 1 \le i_2 \le N}} c_{i_1} \cdot \mathrm{Cov}[X_{i_1}, X_{i_2}] \cdot c_{i_2} = \sum_{\substack{1 \le i_1 \le N \\ 1 \le i_2 \le N}} u_{i_1}(y) \cdot r(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot u_{i_2}(y)$$

Weisen Sie diesen Zusammenhang nach, indem Sie die Rechenregeln für Erwartungen, Varianzen und Kovarianzen anwenden, nachdem Sie Werte und beigeordnete Messunsicherheiten im Sinne der ISO/BIPM-GUM-Sicht durch Erwartungen und Varianzen ausgedrückt haben.

BEMERKUNG Beachten Sie, dass das Modell nur in den Abweichungen, nicht jedoch in den Werten linearisiert ist, und damit nur voraussetzt, dass die Abweichungen hinreichend klein, d.h. die Kenntnisse hinreichend vollkommen sind.

AUFGABE06: Beurteilung von Kenntnissen.

Übersetzen Sie die in der Tabelle angegebenen Kenntnisse in die für die Auswertung notwendigen Abgaben entsprechend den Spaltenüberschriften.

Kenntnisse	Ermittlungs-methode	Verteilungs-form	bester Schätzwert	Standard-messuns.
Gebrauchsnormal, Parallelendmaß (DIN ISO 3650) Nennmaß **10,3 mm** maximal zulässige Messabweichung (MPE) **±0,3 µm**				
Beobachtungsreihe, Widerstandsverhältnis: 16 Ablesungen Mittelwert: **1,000 15** empirische Standardabweichung der Einzelbeobachtung $\mathbf{15 \cdot 10^{-6}}$				
Temperatur-Einfluss: Variationsbereich **18°C ... 30°C**				

Kenntnisse	Ermittlungs-methode	Verteilungs-form	bester Schätzwert	Standard-messuns.
Der lineare thermische Ausdehnungs-koeffizient ist für einen Stahltyp spezifiziert mit $11 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$				
4-stelliges digitales Spannungsmessgerät: maximal zulässige Messabweichung (Herstellerangabe) **0,025% der Anzeige** $\pm$ **0,015% vom Messbereich** angezeigter Wert **150 mV** eingestellter Bereich **200 mV**				
Zwei in einer elektrische Messung ein-gesetzte Manganin-Drahtwiderstände besitzen laut Tabelle den Temperatur-Koeffizienz (TK) $0{,}01 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$ Bei der Auswertung werden benötigt Mittelwert $\alpha_{av} = (\alpha_1 + \alpha_{2v})/2$ halbe Differenz $\Delta\alpha = (\alpha_1 - \alpha_{2v})/2$				

AUFGABE07: Mathematisches Pendel.

Mit einem mathematisches Pendel wird die Fallbeschleunigung im Schwerefeld der Erde entsprechend der messtechnischen Realisierung der Relation

$$g = (2\pi)^2 \frac{l}{T^2}$$

ermittelt. Als Masse wird eine (große) Stahlkugel verwendet, die einen Durchmesser von $D_{\text{Ball}} = 12{,}06\ \text{mm}$ besitzt (gemessen mit einem Messschieber mit Nonius-Einrichtung mit einer $0{,}1\ \text{mm}$ Teilung), die man an einem festen Faden der Länge $l_{\text{Ball}} = 188{,}45\ \text{cm}$ (gemessen mit einem Stahlbandmaß mit einer Teilung in $0{,}5\ \text{mm}$) schwingen lässt. Die Messabweichungen des Messschiebers und des Stahlbandmaßes sind nicht größer als die jeweilige digitale Auflösung. Die Zeitmessung wird mit einer Quarz-kontrollierten elektrischen Stopuhr mit einer Taktfrequenz $f_{\text{CLOCK}} = 1\ \text{kHz}$ durchgeführt. Die StartStop-Signale für die Stopuhr werden opto-elektronisch über eine Photozelle beim Fadendurchgang durch die Nullauslenkung (Triggerung der Stopuhr) mit einer maximalen Abweichung von **10%** des Taktzeitintervalles ermittelt. Abgelesen werden auf der Anzeige eines Impulszähler **61 607** Taktpulse für **22** volle Schwingungen.

Stellen sie die Unsicherheitsanalyse (nach GUM) auf und geben sie das vollständige Messergebnis an.

AUFGABE08: Brennweite einer Linse.

Es wird die Brennweite einer dünnen optischen Linse mit Hilfe der Linsenformel

$$f = \frac{g \cdot b}{b + g}$$

ermittelt.

Dazu wird die Gegenstandsweite fest auf den Wert $g = 60\ \mathrm{cm}$ (Abstand von der Linse) eingestellt und durch wiederholtes Scharfstellen des Bildes die zugehörige Bildweite ermittelt.
Die Abstände werden auf einem in Millimeter geteilten Maßstab an der optischen Bank abgelesen.

Die Lage der Linse kann aufgrund ihrer Fassung nur auf $\pm 2\ \mathrm{mm}$ ermittelt werden (Beachte: die daraus resultierende Abweichung wirkt gleichermaßen auf Gegenstands- und Bildweite jedoch jeweils mit umgekehrten Vorzeichen).

Für die Bildweite b ergeben sich die Werte

Lfd.-Nr.	Abgelesene Bildweite
1	62,6 cm
2	62,8 cm
3	62,2 cm
4	62,5 cm
5	62,3 cm
6	62,7 cm
7	62,2 cm
8	62,8 cm
9	62,5 cm
10	62,3 cm
11	62,2 cm

Stellen sie die Unsicherheitsanalyse (nach GUM) auf und geben sie das vollständige Messergebnis an.

AUFGABE09: Messung der Brechzahl.

Mit einem Prismenspektrometer wird die Brechzahl eines optischen Mediums gegenüber Luft mit Hilfe der Fraunhoferschen+)-Formel

$$f = \frac{g \cdot b}{b + g}$$

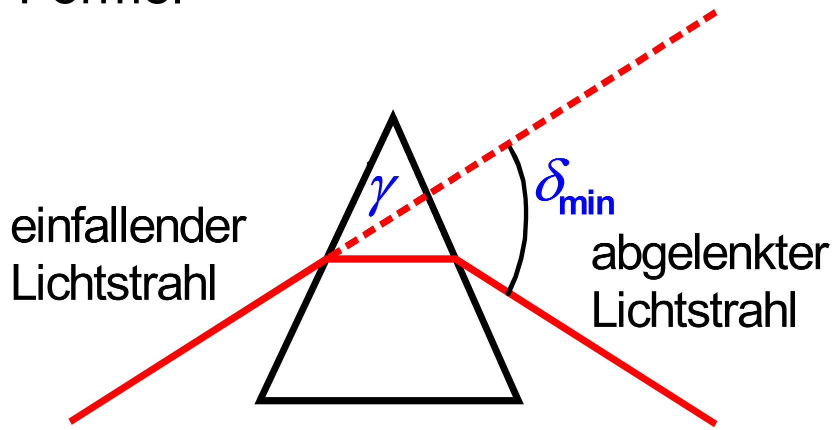
aus dem brechenden Winkel γ eines aus dem betreffenden Medium hergestellten Prismas und dem beobachteten Winkel δ_{min} der minimalen Ablenkung ermittelt.

Die gemessenen Winkel sind

$$\gamma = 60{,}0^{\circ} \pm 30'$$

$$\delta_{\text{min}} = 15{,}0^{\circ} \pm 30'$$

Wie ergibt sich aus diesen Angaben das vollständige Messergebnis und wie lautet es?



Schematische Darstellung des Strahlenganges im Refraktometer bei minimaler Ablenkung.

γ - brechender Winkel des Prismas;

δ_{min} - Winkel bei minimalen Ablenkung.

+) ***Joseph von Frauenhofer* (1787-1826),** deutscher Optiker und Physiker.