Institute of
Applied Mechanics
Institut für Baumechanik

Graz University of Technology

Bachelorarbeit im Studiengang Bauingenieurwissenschaften
am Institut für Baumechanik

Technische Universität Graz

Visualisierung eines instationären Ausflusses aus einem Behälter

Sandra Glatz

Graz, 30. September 2021

Betreuer: Ass.Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn.Bsc
Michael Helmut Gfrerer

Statutory Declaration

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Graz, ______________________________ ____________________________________

Date Signature

Eidesstattliche Erklärung[1]

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am ______________________________ ____________________________________

Datum Unterschrift

[1] Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008; Genehmigung des Senates am 1.12.2008

Abstract

The aim of this paper is the visualization of an non-steady flow from a reservoir with a pipe using the software LATEX . Firstly, the fundamental theory that is needed to solve the problem is explained in order to get an extensive overview of the topic. Secondly, the step-by-step solution of the example is displayed and the result is analysed with the help of two figures. The main part of this paper is the animation of the solved example. Two different animations are shown, which are both then anaylised and compared with one another.

Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Visualisierung einer instationären Strömung aus einem Behälter mit Rohr unter Verwendung der Software LATEX. Dazu wird zuerst die grundlegende Theorie zur Lösung des Beispiels erklärt, um einen umfassenden Überblick über die Thematik zu bekommen. Anschließend wird der Lösungsweg des Beispiels präsentiert und dessen Ergebnis mithilfe einiger Abbildungen interpretiert. Den Hauptteil der Arbeit stellt die Animation dar, welche für zwei unterschiedliche Fälle dargestellt wird und beide anschließend analysiert und miteinander verglichen werden.

Dankesagung

An dieser Stelle möchte ich meinen aufrichtigen Dank besonders meinem Betreuer Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Bsc Michael Helmut Gfrerer aussprechen, der mich sehr kompetent betreut hat und sich für alle meine Fragen immer viel Zeit genommen hat. Durch das Verfassen dieser Arbeit konnte ich außerdem mein Wissen im Bereich der Hydromechanik und besonders meine Kenntnisse des Programms LATEX intensiv vertiefen, wofür ich ebenfalls dankbar bin.

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINLEITUNG

Besonders in Zeiten der Online-Lehre ist die Visualisierung von Lehrinhalten von großer Bedeutung: Eine unkomplizierte logische Struktur und eine einprägsame Vorstellung des Themas gestatten ein besseres Verständnis und erleichtern das Lernen. Dies kann mit Hilfe von Präsentationen und Bildern erfolgen, aber besonders in der Hydromechanik sind Animationen, also bewegte Bilder, essentiell, um hydrodynamische Probleme und deren Lösung verständlich darzustellen. Diese Arbeit dient als Unterstützung der Lehrinhalte für die Lehrveranstaltung „Hydromechanik", gelehrt vom Institut für Baumechanik an der Technischen Universität Graz, sowie als Hilfestellung zum Erstellen weiterer zukünftiger Animationen.

Das erste Kapitel „Grundlagen" befasst sich mit einigen Themengebieten der Hydromechanik, um einen groben Überblick über die verwendeten Anwendungen zu geben. Im zweiten und dritten Kapitel wird das vorliegende Beispiel gelöst und anschließend interpretiert. Es werden auch Sonderfälle der Lösung besprochen, bei denen das vorangehende Beispiele abgewandelt wird.

Danach folgt der Kernaspekt der Arbeit: die Animation eines instationären Ausflusses aus einen Behälter mit Rohr. Es werden zwei unterschiedliche Fälle beleuchtet, die anhand von Bildern das Ergebnis der Rechnung deutlich machen sollen. Die in diesem Kapitel vorhandenen Animationen kann man mit einem geeigneten PDF-Reader, beispielsweise mit dem „Adobe Acrobat Reader" abspielen. Das abschließende Fazit fasst alle Informationen der Arbeit zusammen und gibt einen kurzen Ausblick auf zukünftige Forschungsarbeiten.

Anmerkung: Um eine gute Lesbarkeit der Arbeit zu gewährleisten, wurde auf eine Angabe der Literatur bei den einzelnen Formeln verzichtet. Es wird hiermit aber darauf hingewiesen, dass besonders in Kapitel 2 und 4 die Literaturquelle [3] häufig verwendet wird. Alle anderen verwendeten Quellen sind ordnungsgemäß gekennzeichnet.

2. GRUNDLAGEN

Um die Lösung des folgenden Beispiels aus Kapitel 3 zu verstehen, ist es notwendig, die grundlegende Theorie dahinter zu betrachten. Auf den nachstehenden Seiten werden die Grundlagen der Kontinuitätsgleichung, der Bernoulli-Gleichung und die Torricelli-Gleichung aufgegriffen.

2.1 Eigenschaften von Fluiden

Fluide können grundsätzlich in zwei Gruppen eingeteilt werden: Flüssigkeiten (tropfbar) und Gase (nicht tropfbar). Sie werden aufgrund ihrer gemeinsamen Eigenschaften als eine Obergruppe zusammengefasst. Bei der Deformation von Fluiden können zwei elementare Änderungen beobachtet werden:

Formänderung:

- Bei langsamer Formänderung setzen Flüssigkeiten kaum Widerstand entgegen, ihre Form kann mit sehr wenig Kraft beliebig verändert werden.
- Bei schneller Formänderung erfahren Flüssigkeiten einen sehr großen Widerstand. [1]

Volumsänderung:

- Um das Volumen einer Flüssigkeit zu verkleinern, muss eine erhebliche Kraft aufgewendet werden.
- Vergrößert man mit Hilfe einer Kraft das Volumen einer Flüssigkeit, entstehen Hohlräume. Bei Gasen hingegen entstehen keine Hohlräume, sie füllen den Raum, der verfügbar ist, voll aus. [1]

Weitere Eigenschaften von Fluiden:

- Fluide, welche ihre Dichte nicht ändern können, bezeichnet man als *inkompressibel*, jene Fluide, die ihre Dichte ändern können, als *kompressibel.*
- Fluide, in denen Schubspannungen auftreten, werden als *viskos* oder *zäh* bezeichnet. Fluide, in denen keine Schubspannungen, sondern nur Druckspannungen auftreten, bezeichnet man als *reibungsfrei.*
- Das *ideale Euler'sche Fluid* ist inkompressibel und reibungsfrei.
- Die Temperatur hat auf Flüssigkeiten nur einen minimalen Einfluss, auf Gase wiederum einen enormen. [1]

2.2 Vergleich stationäre/instationäre Strömung

Strömungen können grundsätzlich in stationäre und instationäre Strömungen untergliedert werden. Reale Strömungen sind (fast immer) instationäre Strömungen, da dort Strömungsverluste auftreten, welche berücksichtigt werden müssen, da ansonsten zu große Abweichungen im Ergebnis auftreten. Eine stationäre Betrachtung kann sinnvoll sein, wenn der Unterschied in den Ergebnissen klein beziehungsweise nicht relevant ist, da die Lösung der beschreibenden Gleichungen einfacher wird.

Bei einer instationären Strömung ist die Geschwindigkeit v vom Ort x und der Zeit t abhängig, bei einer stationären Strömung ist v zeitlich unabhängig. Im Idealfall einer stationären Strömung ist der Zustand (Geschwindigkeit, Dichte, Druck) an einem Punkt zeitlich konstant: „An einem Punkt passiert immer das Gleiche". Dies hat zur Folge, dass die lokale Zeitableitung in der gesamten Strömung verschwindet ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$). Da sich beispielsweise die Geschwindigkeit mit dem Ort ändern kann (z.B. bei einer Querschnittsänderung in einem Rohr), kann die substanzielle Zeitableitung von null verschieden sein. [3]

Beispiele für stationäre Strömungen/Betrachtungen:

- Der Zufluss und der Abfluss in einen Behälter sind gleich groß. Der Wasserspiegel im Behälter ändert sich nicht.
- Der Behälter ist vergleichsweise sehr groß (z.B. bei einem Stauraum) und Wasserspiegeländerungen passieren nur sehr langsam. In diesem Fall kann die Strömung als stationär betrachtet werden. Die Abweichungen zu einer instationären Betrachtung werden gering sein, sodass man sie vernachlässigen darf.
- Direkt nach dem Einschalten einer Pumpe muss das Wasser aus der Ruhe heraus in Bewegung gebracht (beschleunigt) werden. Nach hinreichend langer Zeit wird sich ein stationärer Zustand einstellen. [3]

2.3 Kontinuitätsgleichung

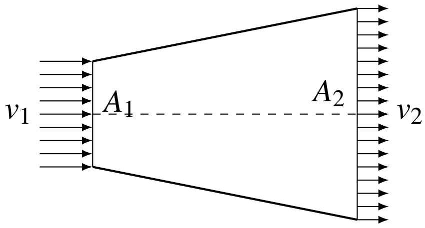


Abbildung 2.1: Stromröhre

In Abbildung 2.1 wird die Strömung eines Fluides mit der Dichte ρ durch eine Stromröhre dargestellt. Dabei wird zuerst die Querschnittsfläche A_1 mit der Fließgeschwindigkeit v_1 und anschließend die Querschnittsfläche A_2 mit der Fließgeschwindigkeit v_2 durchströmt. Da die Dichte des inkompressiblen Fluides konstant und somit an beiden Querschnittsstellen gleich groß ist, kann sich die Masse der Flüssigkeit nicht verändern: die eintretende Masse muss folglich gleich groß sein wie die austretende Masse. Durch die Massenerhaltung erhält man die folgende Gleichung. [4]

Kontinuitätsgleichung bei stationären Verhältnissen für inkompressible Rohrströmung

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \text{bzw. } v_2 = \frac{A_2}{A_1} v_1 \tag{2.1}$$

Das pro Zeiteinheit durch den Querschnitt strömende Volumen nennt man Volumenstrom oder auch Durchfluss. Nach (2.1) ist der Volumenstrom an jeder Stelle des Querschnitts A der Stromröhre gleich groß, es verändert sich lediglich die Fließgeschwindigkeit v. Diese Beziehung nennt man **Kontinuitätsgleichung**.

Volumenstrom (Durchfluss)

$$Q = vA \tag{2.2}$$

$$Q = Q_{Zufluss} - Q_{Abfluss} \tag{2.3}$$

2.4 Bernoulli-Gleichung

Das Bernoulli-Gesetz (Daniel Bernoulli, 1700-1782) gilt für reibungsfreie strömende Fluide und Gase. Dabei werden auch die Eigenschaften des Fluides berücksichtigt: wir betrachten ein inkompressibles (ρ = const.) und schweres Fluid. Es ist der Energieerhaltungssatz für reibungsfreie Strömungen, der besagt, dass die Summe aller Energieteile (siehe Seite 7) konstant ist. [1]

Bernoulli-Gleichung
reibungsfreies, schweres, inkompressibles Fluid

$$\left[\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right]_1=\left[\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right]_2+\int_1^2\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot d\mathbf{x} \tag{2.4}$$

- p Druck $[\frac{kg}{m\cdot s^2}]$
- ρ Dichte des Fluids (Masse pro Volumen) $[\frac{kg}{m^3}]$
- v Geschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$
- g Erdbeschleunigung $\rightarrow g \approx 9,81[\frac{m}{s^2}]$
- z Ortshöhe über Bezugsniveau $[m]$
- $\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot d\mathbf{x}$ lokale Zeitableitung

Anmerkungen zur Bernoulli-Gleichung:

- Die Bernoulli-Gleichung lässt sich aus der lokalen Impulsbilanz herleiten.
- Aus Gleichung 2.5 ist zu erkennen, dass bei großer Geschwindigkeit v_1 der Druck p_1 klein ist und bei kleiner Geschwindigkeit v_2 der Druck p_2 groß ist.
- Für stationäre Verhältnisse wird die Bernoulli-Gleichung auch 'Energiesatz für verlustfreie Strömung' genannt.
- Das Bernoulli-Gesetz kann auch in vielen alltäglichen Anwendungen beobachtet werden, beispielsweise in einer Wasserstrahlpumpe oder dem Prandtl'schen Staurohr. [3]

Für stationäre Verhältnisse ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$) vereinfacht sich die Bernoulli-Gleichung zu:

Bernoulli-Gleichung für stationäre Verhältnisse [3]

$$\left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right]_1 = \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right]_2 \tag{2.5}$$

bzw.

$$\left[\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{g\rho} + z\right]_1 = \left[\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{g\rho} + z\right]_2 \tag{2.6}$$

bzw.

$$\left[\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gz\right]_1 = \left[\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gz\right]_2 \tag{2.7}$$

Die einzelnen Terme der Gleichung (2.5) können auch als Energie pro Masseneinheit gedeutet werden (Einheit = $\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$ = $\left[\frac{J}{kg}\right]$ = spezifische Energie):

- $\frac{v^2}{2}$ kinetische Energie pro Masseneinheit
- gz potentielle Energie pro Masseneinheit
- $\frac{p}{\rho}$ Strömungsenergie pro Masseneinheit

Umgeformt haben die einzelnen Terme von Gleichung (2.6) die Dimension einer Höhe (Einheit = $[m]$):

- $\frac{v^2}{2g}$ Geschwindigkeitshöhe
- z Ortshöhe
- $\frac{p}{g\rho}$ Druckhöhe

bzw. die Dimension des Drucks in der Schreibweise von Gleichung (2.7) (Einheit = $\left[\frac{kg}{m \cdot s^2}\right]$ = $[Pa]$ = $[Nm]$):

- $\frac{\rho v^2}{2}$ Staudruck (dynamischer Druck)
- ρgz geodätischer Druck
- p statischer Druck

2.5 Verallgemeinerte Bernoulli-Gleichung

In realen Fluiden tritt Reibung auf, welche zu Strömungsverlusten führt (mechanische Energie wird in Wärme umgewandelt). Diese Verluste können in der allgemeinen Energiegleichung mittels energetischer Korrekturtermen berücksichtigt werden. [3]

Allgemeine Energiegleichung
reibungsbehaftetes, schweres, inkompressibles Fluid

$$E_1 = E_2 + \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \sum g h_V + \sum g H_T - \sum g H_P$$

- $\sum g h_V$ ... Summe der Verluste durch Rohreibung, Umlenkung, Verzweigung, Drosselung,...
- $\sum g H_T$ ... Summe der von Turbinen entzogenen Energie
- $\sum g H_P$ ... Summe der von Pumpen zugeführten Energie

Der Grund, warum in der Theorie die Strömungsverluste oft vernachlässigt werden, ist die Lösbarkeit der auftretenden Differentialgleichung. Diese ist dann häufig nicht mehr analytisch, sondern nur noch numerisch lösbar, wodurch man eine Näherungslösung erhält, die dem realen Ergebnis zwar nahe kommt, allerdings immer geringe Abweichungen enthält.

Um die Notwendigkeit der verallgemeinerten Bernoulli-Gleichung zu veranschaulichen, wird nachstehend ein Beispiel gelöst, bei dem die Reibung in der Bernoulli-Gleichung vernachlässigt wird und das Ergebnis mit dem realen Wert verglichen wird.

Veranschaulichung anhand eines Beispiels: [3]

Abfluss der Mur ins Schwarze Meer mit einer Höhendifferenz von 2050m (Schmalzgrube(Salzburg) 2050m → Drau → Donau → Schwarzes Meer 0m)

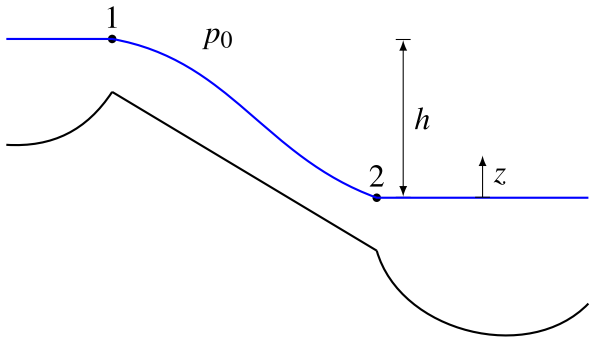


Abbildung 2.2

Die Bernoulli-Gleichung von 1 nach 2 lautet

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_2.$$

Es gelten die folgenden Annahmen

$$z_1 = h, z_2 = 0, v_1 \approx 0.$$

Daraus folgt die Torricelli-Gleichung (siehe Abschnitt 2.6)

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 * 10 * 2050} \approx 202m/s.$$

Die tatsächliche Ausflussgeschwindigkeit ins Meer beträgt: $v \approx 0.8 - 3m/s$. [2]

→ Anhand dieses Beispiels ist gut erkennbar, warum die Reibung mit Hilfe von Zusatztermen in der Bernoulli-Gleichung in der Praxis berücksichtigt werden muss.

2.6 Torricelli-Gleichung

Zum besseren Verständnis des folgenden Kapitels 3 wird zuerst der **quasi-stationäre** Ausfluss aus einem Behälter **ohne** Rohr beschrieben. In diesem Beispiel gibt es keinen zusätzlichen Zufluss in den Behälter, weshalb eine rein stationäre Betrachtung falsch wäre. Da ein sehr großer Behälter (A $\gg$) vorhanden ist, kann die Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche trotzdem 0 gesetzt werden.

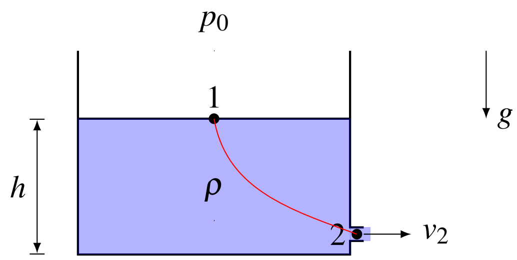


Abbildung 2.3: Behälter ohne Rohr

Gegeben: Dichte des Fluids ρ, Höhe des Wasserstandes h, Querschnittsfläche des Behälters A_B, Querschnittsfläche der Austrittsöffnung A_R, Erdbeschleunigung $g \approx 9,81\frac{m}{s^2}$

Gesucht: Ausflussgeschwindigkeit v_2

Unbekannt: Umgebungsdruck p_0

Die Bernoulli-Gleichung für stationäre Verhältnisse von 1-2 lautet (siehe Abb. 2.3)

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}. \tag{2.8}$$

$\rightarrow$ Der unbekannte Umgebungsdruck p_0 ist an der Wasseroberfläche und am Austritt gleich und kürzt sich folglich weg.

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$A_B v_1 = A_R v_2. \tag{2.9}$$

Die Geschwindigkeit v_1 lautet somit

$$v_1 = \frac{A_R}{A_B} v_2. \tag{2.10}$$

Die Bernoulli-Gleichung (2.8) kann wie folgt umgeformt werden

$$gh = \frac{v_2^2}{2}\left(1 - \left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right). \tag{2.11}$$

Durch die Annahme, dass A_B sehr groß ist, gilt $\frac{A_R}{A_B} \approx 0$.

Somit vereinfacht sich Gleichung (2.8) zu

$$gh = \frac{v_2^2}{2}, \tag{2.12}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \tag{2.13}$$

Torricelli-Gleichung
Ausflussgeschwindigkeit eines quasi-stationären Ausflusses aus einem großen Behälter

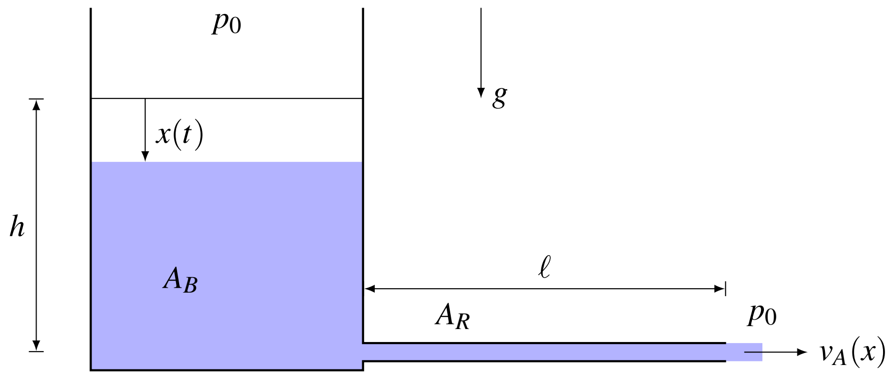
$$v = \sqrt{2gh} \tag{2.14}$$

Anmerkungen zur Torricelli-Gleichung:

- Die Gleichung berücksichtigt weder den Umgebungsdruck p_0, noch die Gefäßgeometrie oder die Form der Austrittsöffnung.
- Die Austrittsgeschwindigkeit v hängt folglich nur von der Wasserstandhöhe h und der Erdbeschleunigung $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ ab.
- Der aus der Öffnung austretende Strahl folgt der Form einer Parabel (Wurfparabel).
- In der Praxis ist die Austrittsgeschwindigkeit etwas geringer als die mit der Torricelli-Gleichung berechnete Geschwindigkeit. Das liegt an der Reibung, die in der Gleichung (2.14) nicht berücksichtigt wird.

3. ANGABE

Aus einem Behälter fließt eine schwere, inkompressible Flüssigkeit widerstandsfrei aus. Anfänglich ist der Behälter bis zur Höhe h gefüllt und die Flüssigkeit befindet sich in Ruhe. Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeit $v_A(x)$ in Abhängigkeit der Spiegelabsenkung x.



Gegeben: Umgebungsdruck p_0, Dichte des Fluides ρ, Höhe des Wasserstandes h, Länge des Rohrs ℓ, Querschnittsfläche des Behälters A_B, Querschnittsfläche des Rohrs A_R, Erdbeschleunigung $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$

Gesucht: Ausflussgeschwindigkeit $v_A(x)$

4. LÖSUNG DES BEISPIELS

4.1 Ausfluss aus großem Behälter

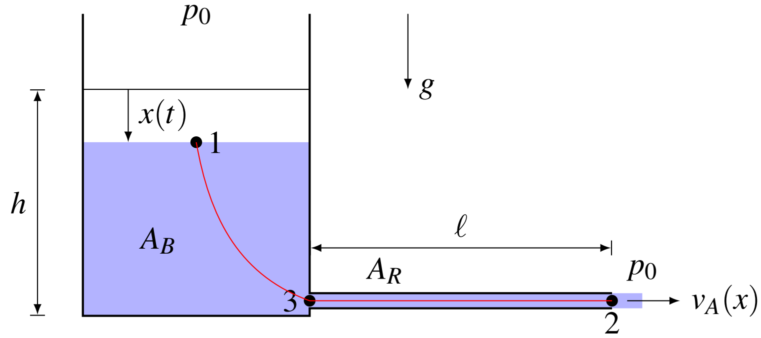


Abbildung 4.1

Wir berechnen die Ausflussgeschwindigkeit $v_A(x)$

Die Bernoulli-Gleichung von 1 nach 2 lautet (siehe Abb. 4.1)

$$\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g(h-x) = \frac{v_A(x)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x}. \tag{4.1}$$

Die Kontinuitätsgleichung für die Flüssigkeit im Rohr lautet

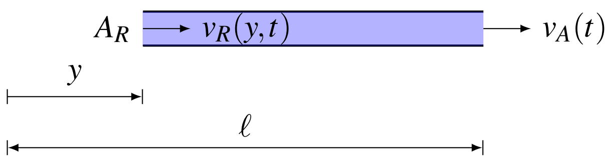


Abbildung 4.2: Detailansicht Rohr

$\rightarrow$ In Abb. 4.2 entspricht $v_R(y,t)$ der Geschwindigkeit im Rohr und $v_A(t)$ der Austrittsgeschwindigkeit.

$$A_R v_R(y,t) = A_R v_A(t), \tag{4.2}$$

$$v_R(y,t) = v_A(t). \tag{4.3}$$

$\rightarrow$ Es folgt die Annahme, dass die Geschwindigkeit im Rohr überall gleich ist.

Die Kontinuitätsgleichung für die Flüssigkeit im Behälter lautet

$$A_B\dot{x}(t) = A_R v_A(x) \rightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{A_R}{A_B} v_A(x). \tag{4.4}$$

Der instationäre Term in der Bernoulli-Gleichung (4.1) wird wie folgt zerlegt

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} = \int_1^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \int_3^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x}. \tag{4.5}$$

Wegen $A_B \gg A_R$ gilt näherungsweise

$$\int_1^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} \ \approx 0,\ \ddot{x} \approx 0,\ \frac{\dot{x}^2}{2} \approx 0 \tag{4.6}$$

mit

$$\int_3^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} = \int_{y=0}^{\ell} \frac{\partial \mathbf{v}(y,t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{y} = \int_{y=0}^{\ell} \frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} \cdot d\mathbf{y}. \tag{4.7}$$

Es gilt

$$v(y,t) = v_A(x(t)) \tag{4.8}$$

$$\int_{y=0}^{\ell} \frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} \cdot d\mathbf{y} = \frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} \int_{y=0}^{\ell} dy = \frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt}(\ell - 0). \tag{4.9}$$

Die sogenannte **Zeitfreie Identität** lautet

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} &= \frac{dv_A(x)}{dx}\frac{dx(t)}{dt} && (4.10)\\
&= \frac{v_A(x)}{dx}\dot{x}(t) && (4.11)\\
&= \frac{dv_A(x)}{dx}\frac{A_R}{A_B}v_A(x) && (4.12)\\
&= \frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right). && (4.13)
\end{aligned}$$

Es folgt somit

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} = \ell \frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right). \tag{4.14}$$

Einsetzen von Gleichung (4.34) in die Bernoulli-Gleichung (4.1) liefert

$$\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + g(h-x) = \frac{v_A(x)^2}{2} + \ell \frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right), \tag{4.15}$$

was zu

$$g(h-x) = \frac{v_A(x)^2}{2}\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right) + \ell\frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right) \tag{4.16}$$

umgeformt werden kann.

Wegen $A_B \gg A_R$ gilt näherungsweise

$$\frac{v_A^2}{2}\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right) \approx \frac{v_A^2}{2} \tag{4.17}$$

Wir schreiben nun $\frac{v_A^2}{2} = y(x)$.

$$gh - gx = y(x) + \ell\frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(y(x)\right). \tag{4.18}$$

Dies ist eine Differenzialgleichung vom Typ

$$B + Cx = y(x) + A\frac{d}{dx}\left(y(x)\right), \tag{4.19}$$

mit

$$A = \ell\frac{A_R}{A_B}, \tag{4.20}$$

$$B = gh, \tag{4.21}$$

$$C = -g. \tag{4.22}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{A}} + C(x-A) + B, \tag{4.23}$$

sowie nach Einsetzen der Konstanten

$$\frac{v_A(x)^2}{2} = C_1 e^{-\frac{A_B x}{A_R \ell}} + (-g)\left(x - \frac{\ell A_R}{A_B}\right) + gh. \tag{4.24}$$

Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ gilt $x(t=0) = 0$ und die Anfangsbedingung $v_A(x=0) = 0$, es folgt somit

$$0 = C_1 \ell^{-0} + (-g)\left(0 - \frac{\ell A_R}{A_B}\right) + gh, \tag{4.25}$$

$$\rightarrow C_1 = (-g)\left(h + \frac{\ell A_R}{A_B}\right). \tag{4.26}$$

Die gesuchte Austrittsgeschwindigkeit lautet somit

$$v_A(x) = \sqrt{2gh}\sqrt{-\left(\frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h}+1\right)e^{-\frac{A_B x}{A_R \ell}} + \frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h}+1-\frac{x}{h}}. \tag{4.27}$$

Mit $\xi = \frac{x}{h}$ und $\varphi = \frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h}$ kann man die Austrittsgeschwindigkeit wie folgt schreiben

$$v_A(x) = \sqrt{2gh}\sqrt{(\varphi+1)(1-e^{-\frac{\xi(x)}{\varphi}})-\xi(x)}. \tag{4.28}$$

Für den Grenzübergang $\ell \to 0$ gilt $\varphi \to 0$ und es folgt

$$v_A(x) = \sqrt{2gh}\sqrt{1-\xi} \tag{4.29}$$

$$= \sqrt{2g(h-x)}. \tag{4.30}$$

Dieses Ergebnis ist auch als **Torricelli-Gleichung** bekannt, welche in Abschnitt 2.6 angeführt wurde (dort wurde eine stationäre Strömung betrachtet). Mit der Annahme, dass eine quasi-stationäre Strömung vorliegt, würde man das Ergebnis aus 4.30 direkt erhalten.

4.2 Ausfluss aus kleinem Behälter

Folgend wird der **Sonderfall** besprochen, in dem die Annahme $A_B \gg A_R$ fallengelassen wird, wir betrachten also einen kleinen Behälter. Die lokale Zeitableitung im Behälter $\int_1^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x}$ ist somit ungleich 0 , da sich die Geschwindigkeit im Behälter ändert.

Die Geschwindigkeit im Behälter lautet

$$\dot{x}(t) = \frac{A_R}{A_B} v_A(x). \tag{4.31}$$

Die Bernoulli-Gleichung 4.1 lautet unverändert

$$\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g(h-x) = \frac{v_A(x)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x}. \tag{4.32}$$

Der instationäre Term lässt sich wie folgt zerlegen

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} = \int_1^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \int_3^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x}. \tag{4.33}$$

Bereits bekannt aus Abschnitt 4.1 ist der zweite Teil des instationären Termes

$$\int_3^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} = \ell \frac{A_R}{A_B} \frac{d}{dx} \left(\frac{v_A(x)^2}{2} \right). \tag{4.34}$$

Da man an einer Stromlinie integriert und nicht bekannt ist, wie sich die Strömung im Behälter genau verhält, wird hier annähernd mit einer Stromlinienlänge von $(h-x)$ gerechnet.

$$\int_1^3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} = \int_{y=0}^{h-x} \frac{\partial \mathbf{v}(y,t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{y} = \int_{y=0}^{h-x} \frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} \cdot d\mathbf{y}. \tag{4.35}$$

Aufgrund der Kontinuitätsgleichung gilt

$$v(y,t) = v_A(x(t)). \tag{4.36}$$

Es gilt

$$\int_{y=0}^{h-x} \frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} \cdot d\mathbf{y} = \frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} \int_{y=0}^{h-x} dy = \frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} (h-x-0). \tag{4.37}$$

Mit der Zeitfreien Identität aus Gleichung (4.10) gilt

$$\frac{d\mathbf{v}_A(x(t))}{dt} = \frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right). \tag{4.38}$$

Der instationäre Term lautet somit

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot d\mathbf{x} = (h-x)\frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right) + \ell\frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right). \tag{4.39}$$

Einsetzen in die Bernoulli-Gleichung (4.1)

$$\frac{v_A(x)^2}{2}\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2 + g(h-x) = \frac{v_A(x)^2}{2} + (\ell+h-x)\frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right), \tag{4.40}$$

$$g(h-x) = \frac{v_A(x)^2}{2}\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right) + (\ell+h-x)\frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}\left(\frac{v_A(x)^2}{2}\right). \tag{4.41}$$

Nun wird $\frac{v_A(x)^2}{2} = y(x)$ gesetzt

$$gh - gx = y(x)\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right) + (\ell+h)\frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}(y(x)) - x\frac{A_R}{A_B}\frac{d}{dx}(y(x)). \tag{4.42}$$

Dies ist eine Differenzialgleichung vom Typ

$$B + Cx = Ey(x) + A\frac{d}{dx}(y(x)) + Dx\frac{d}{dx}(y(x)) \tag{4.43}$$

mit

$$A = (\ell+h)\frac{A_R}{A_B}, \tag{4.44}$$

$$B = gh, \tag{4.45}$$

$$C = -g, \tag{4.46}$$

$$D = -\frac{A_R}{A_B}, \tag{4.47}$$

$$E = \left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right). \tag{4.48}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y(x) = \frac{C_3}{(A+Dx)^{\frac{E}{D}}} + \frac{BD - AC + BE}{E(D+E)} + \frac{Cx}{D+E}, \tag{4.49}$$

$$\frac{v_A(x)^2}{2} = \frac{C_3}{(A+Dx)^{\frac{E}{D}}} + \frac{BD-AC+BE}{E(D+E)} + \frac{Cx}{D+E}. \tag{4.50}$$

Nach Einsetzen der Konstanten gilt

$$\frac{v_A(x)^2}{2} = \frac{C_3}{\left(\frac{A_R}{A_B}(l+h-x)\right)^{\frac{A_R^2-A_B^2}{A_R A_B}}} + \frac{gh\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)+(l+h)\frac{A_R}{A_B}g}{\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)} - \frac{gx}{\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)}, \tag{4.51}$$

$$\frac{v_A(x)^2}{2} = C_3\left(\frac{A_R}{A_B}(l+h-x)\right)^{\frac{A_B}{A_R}-\frac{A_R}{A_B}} + \frac{gh\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)+(l+h)\frac{A_R}{A_B}g}{\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)} - \frac{gx}{\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)}. \tag{4.52}$$

Zum Anfangszeitpunkt $t=0$ gilt $x(t=0)=0$ und die Anfangsbedingung $v_A(x=0)=0$, es folgt somit

$$0 = \frac{C_3}{A^{\frac{E}{D}}} + \frac{BD-AC+BE}{E(D+E)}. \tag{4.53}$$

Nach Einsetzen der Konstanten folgt

$$0 = C_3\left(\frac{A_R}{A_B}(l+h)\right)^{\frac{A_B}{A_R}-\frac{A_R}{A_B}} + \frac{gh\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)+(l+h)\frac{A_R}{A_B}g}{\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)}, \tag{4.54}$$

$$C_3 = -\frac{gh\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)+(l+h)\frac{A_R}{A_B}g}{\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)}\left(\frac{A_R}{A_B}(l+h)\right)^{-\left(\frac{A_B}{A_R}-\frac{A_R}{A_B}\right)}. \tag{4.55}$$

Die gesuchte Austrittsgeschwindigkeit $v_A(x)$ lautet

$$v_A(x) = \sqrt{2\left(C_3\left(\frac{A_R}{A_B}(l+h-x)\right)^{\frac{A_B}{A_R}-\frac{A_R}{A_B}} + \frac{gh\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)+(l+h)\frac{A_R}{A_B}g}{\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)} - \frac{gx}{\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)}\right)}. \tag{4.56}$$

(Der Lesbarkeit halber wurde hier auf das Einsetzen von C_3 in das Ergebnis verzichtet.)

Anmerkung: Dieses Beispiel dient zur Veranschaulichung, warum es notwendig ist, in der Theorie Vereinfachungen zu treffen. Dadurch werden nämlich nicht nur die beschreibenden Differentialgleichungen leichter, sondern auch die Ergebnisse weniger komplex und verständlicher.

Vergleich großer/kleiner Behälter

Wenn in die zwei Lösungen für die Austrittsgeschwindigkeit konkrete Zahlenwerte eingesetzt werden, sind aufgrund der unterschiedlich getroffenen Annahmen kleine Abweichungen zu erkennen. Für diese Berechnungen wurden folgende Werte eingesetzt: $h = 3m$, $\ell = 4m$, $A_R = 1\ m^2$ und $A_B = 6\ m^2$, somit gilt $\varphi \approx 0,2221$.

Die Abflussgeschwindigkeit aus Gleichung (4.27) lautet

$$v_{A2}(x) = \sqrt{2gh}\sqrt{-\left(\frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h}+1\right)e^{-\frac{A_B x}{A_R \ell}} + \frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h} + 1 - \frac{x}{h}}.$$

Die Abflussgeschwindigkeit aus Gleichung (4.56) lautet

$$v_{A3}(x) = \sqrt{2\left(C_3\left(\frac{A_R}{A_B}(l+h-x)\right)^{\frac{A_B}{A_R}-\frac{A_R}{A_B}} + \frac{gh\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)+(l+h)\frac{A_R}{A_B}g}{\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)} - \frac{gx}{\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)}\right)}$$

mit

$$C_3 = -\frac{gh\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)+(l+h)\frac{A_R}{A_B}g}{\left(1-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)\left(1-\frac{A_R}{A_B}-\left(\frac{A_R}{A_B}\right)^2\right)}\left(\frac{A_R}{A_B}(l+h)\right)^{-\left(\frac{A_B}{A_R}-\frac{A_R}{A_B}\right)}.$$

Ergebnisse		
$v_{A2}(x)$	$v_{A3}(x)$	Differenz in %
$v_{A2}(x=0) = 0\ \frac{m}{s}$	$v_{A3}(x=0) \approx 0\ \frac{m}{s}$	$\frac{v_{A2}(0)}{v_{A3}(0)} = 0 \rightarrow 0\%$
$v_{A2}(x=\frac{h}{3}) = 6,022\ \frac{m}{s}$	$v_{A3}(x=\frac{h}{3}) = 5,37\ \frac{m}{s}$	$\frac{v_{A2}(\frac{h}{3})}{v_{A3}(\frac{h}{3})} = 1,12 \rightarrow 12\%$
$v_{A2}(x=\frac{h}{2}) = 5,9099\ \frac{m}{s}$	$v_{A3}(x=\frac{h}{2}) = 5,589\ \frac{m}{s}$	$\frac{v_{A2}(\frac{h}{2})}{v_{A3}(\frac{h}{2})} = 1,057 \rightarrow 5,7\%$
$v_{A2}(x=h) = 3,504\ \frac{m}{s}$	$v_{A3}(x=h) = 3,6428\ \frac{m}{s}$	$\frac{v_{A2}(h)}{v_{A3}(h)} = 0,96 \rightarrow 4\%$

Das sind prozentuale Abweichungen von 4-12 %. Da sich der Rechenweg durch die verschiedenen Annahmen stark verkürzt, ist die Annahme eines großen Behälters in der Theorie meistens hinreichend genau.

4.3 Berechnung der Wasserspiegellinie

4.3.1 Berechnung der Wasserspiegellinie $x(t)$: Torricelli-Theorie

Zuerst wird die Wasserspiegellinie für die Torricelli-Theorie mit der Lösung $v_A(x) = \sqrt{2g(h-x)}$ (siehe Gleichung (4.30)) bestimmt.

Bereits bekannt ist die zeitliche Ableitung von $x(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{A_R}{A_B} v_A(x). \tag{4.57}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{A_R}{A_B} v_A(x), \tag{4.58}$$

$$\int \frac{1}{v_A(x)} \cdot dx = \frac{A_R}{A_B} \cdot \int dt. \tag{4.59}$$

Mit $v_A(x) = \sqrt{2g(h-x)}$ ist das Integral aus Gleichung (4.59) lösbar und lautet

$$\frac{-\sqrt{2g(h-x)}}{g} = \frac{A_R}{A_B} t + C_2. \tag{4.60}$$

Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ gilt $x(t = 0) = 0$ und die Anfangsbedingung $v_A(x = 0) = 0$, C_2 ergibt sich somit zu

$$\frac{-\sqrt{2g(h-0)}}{g} = \frac{A_R}{A_B} 0 + C_2, \tag{4.61}$$

$$C_2 = -\frac{\sqrt{2gh}}{g}. \tag{4.62}$$

Die gesuchte Wasserspiegelabsenkung $x(t)$ lautet

$$-\frac{\sqrt{2g(h-x)}}{g} = \frac{A_R}{A_B} t - \frac{\sqrt{2gh}}{g}, \tag{4.63}$$

$$\sqrt{2g(h-x)} = \sqrt{2gh} - \frac{A_R}{A_B} tg, \tag{4.64}$$

$$x(t) = h - \frac{1}{2g} \left(\sqrt{2gh} - \frac{A_R}{A_B} tg \right)^2. \tag{4.65}$$

Zum Zeitpunkt $x(t^*) = h$ ist der Behälter leer

$$x(t^*) = h = h - \frac{1}{2g}\left(\sqrt{2gh} - \frac{A_R}{A_B}t^*g\right)^2, \tag{4.66}$$

$$\sqrt{2gh} = \frac{A_R}{A_B}t^*g. \tag{4.67}$$

Der Zeitpunkt, an dem der Behälter entleert ist, lautet somit

$$t^* = \sqrt{2gh}\frac{A_B}{A_R g}. \tag{4.68}$$

4.3.2 Berechnung der Wasserspiegellinie $x(t)$: instationäre Theorie unter Vernachlässigung der Beschleunigung im Behälter

Beim Einsetzen von Gleichung (4.27) in Gleichung (4.59) ist zu erkennen, dass das Integral nicht mehr analytisch lösbar ist. Es wird folglich auf eine numerische Lösungsvariante zurückgegriffen, durch welche man eine Näherungslösung erhält. Für die Lösung dieses Problems wird hier das explizite Euler-Verfahren angewendet (sh. Mathematik 3).

Die Ableitung $\dot{x}(t)$ lässt sich auch schreiben als

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \tag{4.69}$$

bzw.

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \Delta t > 0. \tag{4.70}$$

Die Ausflussgeschwindigkeit $v_A(x)$ lautet

$$v_A(x_k) = \sqrt{2gh}\sqrt{-\left(\frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h}+1\right)e^{-\frac{A_B x}{A_R \ell}} + \frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h} + 1 - \frac{x}{h}}. \tag{4.71}$$

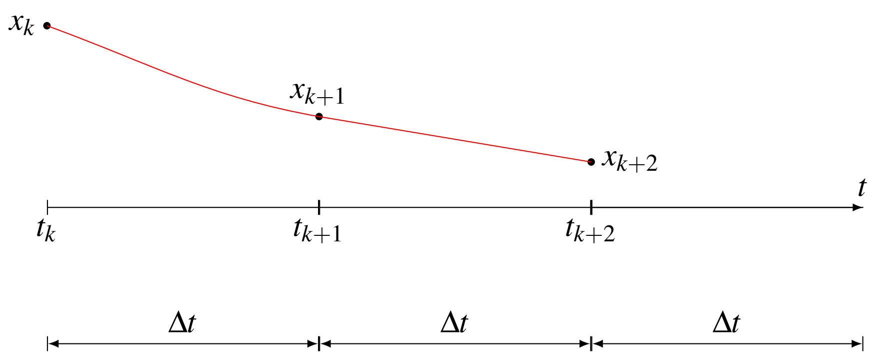


Abbildung 4.3

Die Zeit t verändert sich dabei wie folgt:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t. \tag{4.72}$$

Die gesuchte Näherungslösung für die Wasserspiegelabsenkung $x(t)$ lautet

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \dot{x}(t)\Delta t, \tag{4.73}$$

$$x(t+\Delta t) \approx x(t) + \frac{A_R}{A_B} v_A(x(t))\Delta t, \tag{4.74}$$

bzw.

$$x_{k+1} = x_k + \frac{A_R}{A_B} v_A(x_k)\Delta t. \tag{4.75}$$

.

4.4 Interpretation des Ergebnisses

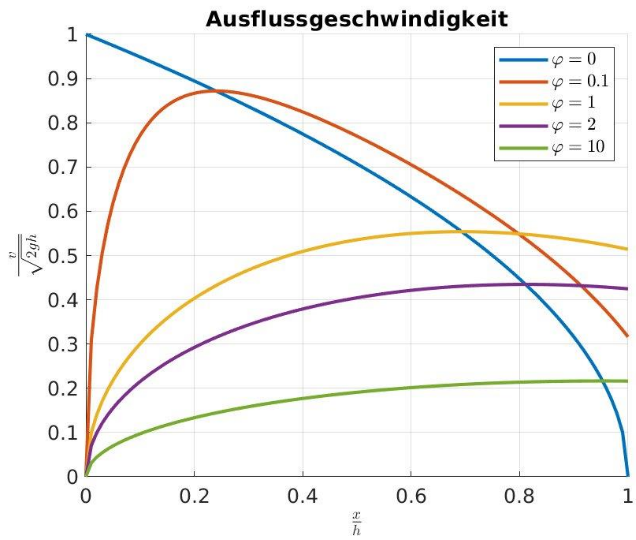


Abbildung 4.4

Abbildung 4.4 zeigt die Ausflussgeschwindigkeiten v für unterschiedliche $\varphi = \frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h} = \frac{V_R}{V_B}$. Dabei ist V_R das Volumen des Rohrs und V_B das Volumen des Behälters. Auf der Abszisse ist das Verhältnis $\frac{x}{h}$ von Wasserspiegelabsenkung x und der Höhe des Wasserstandes h aufgetragen, auf der Ordinate das Verhältnis $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ der Ausflussgeschwindigkeit v und der Torricelli-Lösung $\sqrt{2gh}$. Je größer V_B im Vergleich zu V_R, desto kleiner wird φ.

Wenn das Rohr ein kleines Volumen V_R ($\rightarrow \ell$ ist klein bzw. A_R ist klein) im Vergleich zu V_B hat, steigt die Ausflussgeschwindigkeit v anfangs sehr stark an, sie nimmt jedoch mit absinkender Wasserspiegellinie wieder ab. Da ein instationärer Vorgang vorliegt, wird die Beschleunigung des Fluids berücksichtigt, weshalb die Geschwindigkeit v am Beginn der Betrachtung 0 beträgt.

Wenn das Rohr ein großes Volumen V_R ($\rightarrow \ell$ ist groß bzw. A_R ist groß) im Vergleich zu V_B hat, steigt die Ausflussgeschwindigkeit v am Anfang der Betrachtung nicht so stark an wie bei einem kurzen Rohr. Außerdem wird die Geschwindigkeit mit absinkendem Wasserspiegel nicht so groß.

$\varphi = 0$ ist der *Sonderfall*, bei dem die Rohrlänge $\ell = 0$ ist und das Volumen des Behälters V_B alleine betrachtet wird. Da es keinen Zufluss gibt, liegt eine quasi-stationäre Betrachtung vor. Wie in Abschnitt 2.6 gezeigt, entspricht die Ausflussgeschwindigkeit für diesen Fall der Torricelli-Gleichung ($v = \sqrt{2g(h-x)}$), bei dem die Beschleunigung nicht beachtet wird (der instationäre Term in der Bernoulli-Gleichung wird vernachlässigt), weswegen der Quotient von $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ am Beginn der Betrachtung 1 und nicht 0 entspricht. Die Geschwindigkeit v sinkt mit absinkender Wasserspiegellinie x.

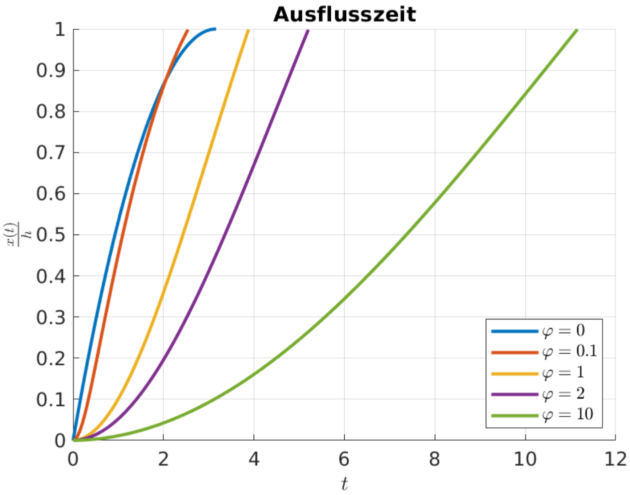


Abbildung 4.5

Abbildung 4.5 zeigt die Ausflusszeit t für verschiedene $\varphi = \frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h} = \frac{V_R}{V_B}$. Auf der Abszisse ist die Ausflusszeit t aufgetragen und auf der Ordinate das Verhältnis $\frac{x}{h}$ von Wasserspiegelabsenkung $x(t)$ und der Höhe des Wasserstandes h, welches mit ansteigender Zeit t immer größer wird.

Je größer φ, also je größer die Rohrlänge ℓ und die Querschnittsfläche des Behälters A_B, desto größer wird auch die Ausflusszeit t und umso langsamer sinkt die Wasserspiegellinie $x(t)$.

Da das Fluid im Fall $\varphi = 0.1$ beschleunigt wird, ist die gesamte Ausflusszeit t kürzer, im Gegensatz zum Sonderfall $\varphi = 0$.

5. ANIMATION DES BEISPIELS

Zur Visualisierung und zum besseren Verständnis der Ergebnisse aus Kapitel 4 , wurde mithilfe der Software LaTeX eine Animation des Ausflusses aus dem Behälter erstellt. Die untenstehenden Lösungen wurden direkt im Code implementiert.

5.1 Ausfluss aus Behälter ohne Rohr

Zuerst betrachten wir den Ausfluss aus einem Behälter ohne Rohr, es wird also der Ausfluss nach der Torricelli-Gleichung (siehe Abschnitt 2.6) dargestellt.

Die Ausflussgeschwindigkeit lautet

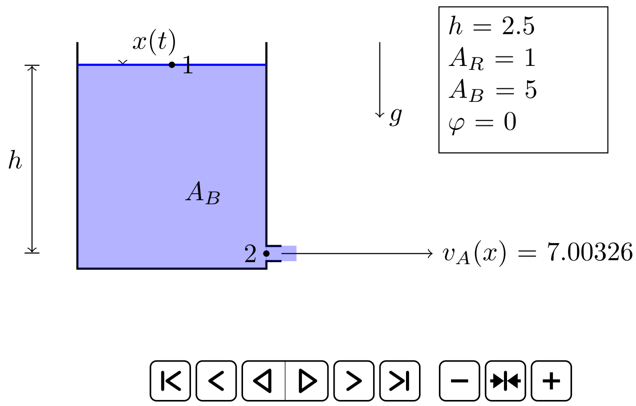
$$v_{A1}(x) = \sqrt{2g(h-x)}$$

und die Wasserspiegelabsenkung

$$x_1(t) = h - \frac{1}{2g}(\sqrt{2gh} - \frac{A_R}{A_B}tg)^2.$$

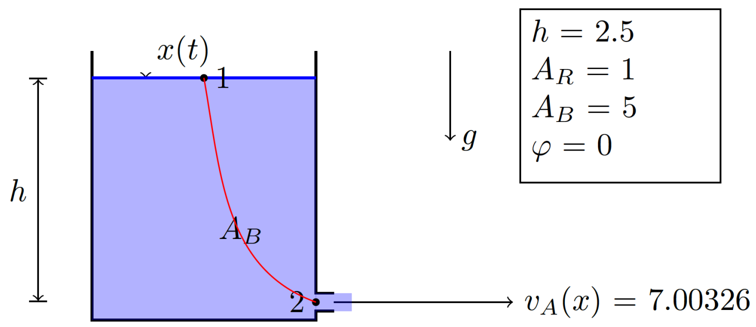
Animation

Nachstehend befindet sich die mit LaTeX erstellt Animation für einen quasi-stationären Ausfluss ohne Rohr. Die Animation lässt sich diversen PDF-Readern, beispielsweise dem „Adobe Acrobat Reader DC”, abspielen.

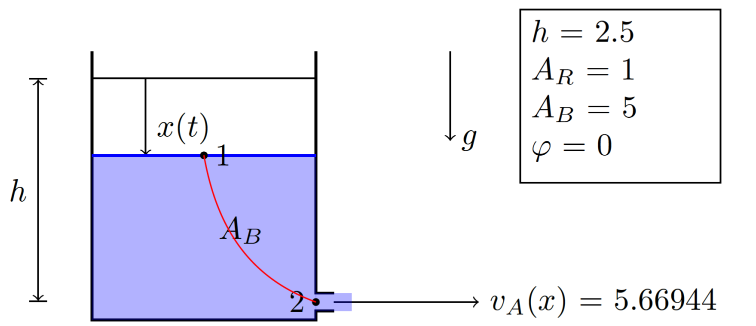


Animation in 3 Schritten

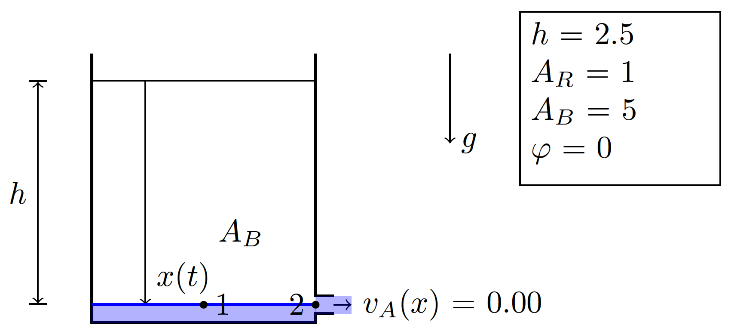
1. Zu Beginn der Betrachtung ist der Behälter voll gefüllt $x_1(t) = 0$. Die Geschwindigkeit ist zu diesem Zeitpunkt maximal.



2. Die Wasserspiegelabsenkung $x_1(t)$ erfolgt zuerst schneller und wird mit der Zeit immer langsamer. Die Geschwindigkeit nimmt ab.



3. Der Behälter ist entleert ($x_1(t) = h$), die Geschwindigkeit $v_{A1}(x)$ beträgt 0.



5.2 Ausfluss aus Behälter mit Rohr

Nun wird der instationäre Ausfluss aus einem Behälter mit Rohr betrachtet.

Die in der Animation dargestellte Ausflussgeschwindigkeit $v_{A2}(x)$ lautet

$$v_{A2}(x) = \sqrt{2gh}\sqrt{-\left(\frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h}+1\right)e^{-\frac{A_B x}{A_R \ell}}+\frac{A_R}{A_B}\frac{\ell}{h}+1-\frac{x}{h}}$$

und die Wasserspiegelabsenkung $x2,k+1(t)$ (Näherungslösung)

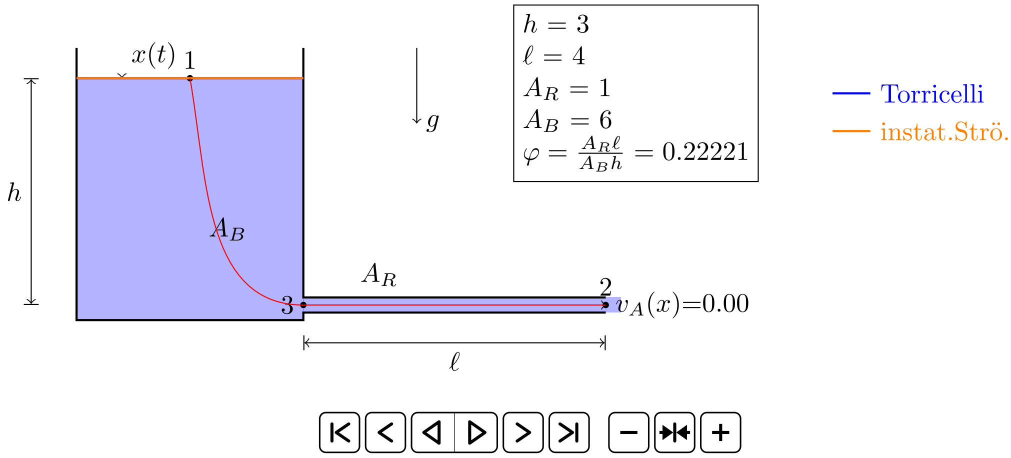
$$x_{2,k+1} = x_k + \frac{A_R}{A_B} v_A(x_k)\Delta t.$$

Die zweite, zum Vergleich der beiden Fälle eingezeichnete Wasserspiegelabsenkung lautet

$$x_1(t) = h - \frac{1}{2g}(\sqrt{2gh} - \frac{A_R}{A_B} tg)^2.$$

Animation

Nachstehend befindet sich die mit LaTeX erstellt Animation für einen instationären Ausfluss mit Rohr, welche mit einem geeigneten PDF-Reader abspielbar ist. Das Beispiel ist im Code anpassbar, es können die Wasserstandhöhe h, die Rohrlänge ℓ und die beiden Querschnittsflächen A_R und A_B individuell eingegeben werden. Der Parameter φ wird dabei automatisch neu berechnet. So kann man das Beispiel für die verschiedenen Fälle, welche in Abb. 4.4 und Abb. 4.5 zu sehen sind, unkompliziert eingeben und nachvollziehen.



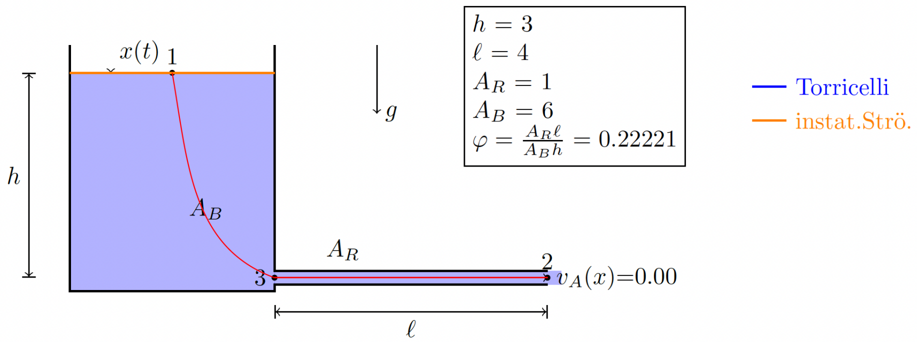
Die in dieser Animation zusätzlich eingezeichnete *dunkelblaue Linie* stellt das Ergebnis der Absenkung der Wasserspiegellinie $x_1(t)$ aus Abschnitt 5.1 dar.

Die *orange Linie* zeigt die Wasserspiegelabsenkung $x_{2,k+1}$. Die dargestellte Ausflussgeschwindigkeit berechnet sich nach der Näherungslösung $x_{2,k+1}(t)$.

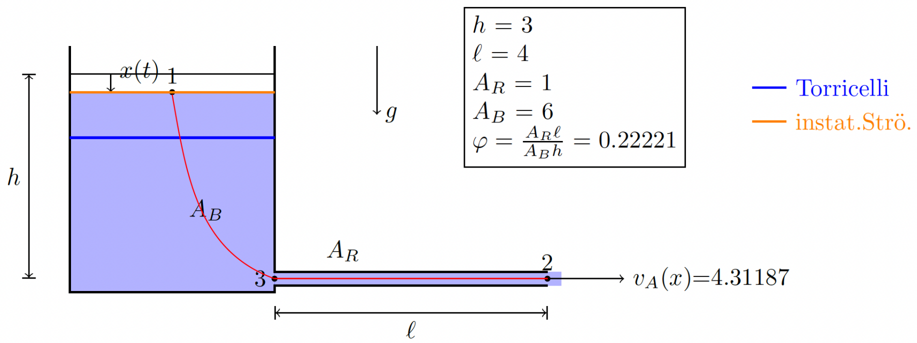
Die Farben wurden passend zu den Abbildungen aus Abschnitt 4.4 gewählt. Die blaue Linie zeigt den Fall $\varphi = 0$ und die orange Linie den Fall $\varphi \approx 0.22221$.

Animation in 6 Schritten

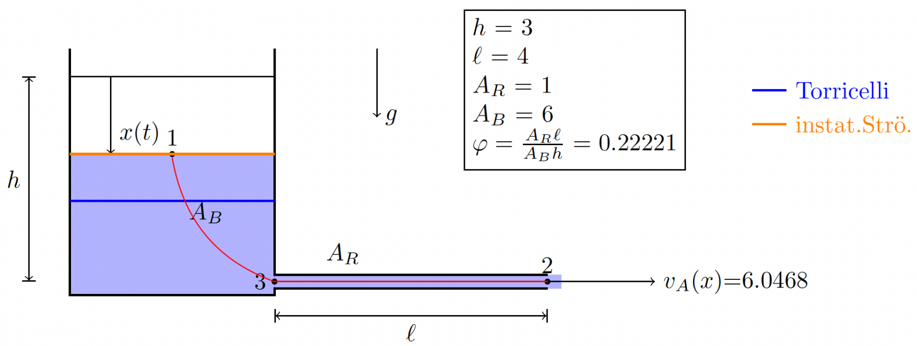
1. Am Beginn ist der Behälter komplett gefüllt ($x(t) = 0$ und $v_A(x) = 0$).



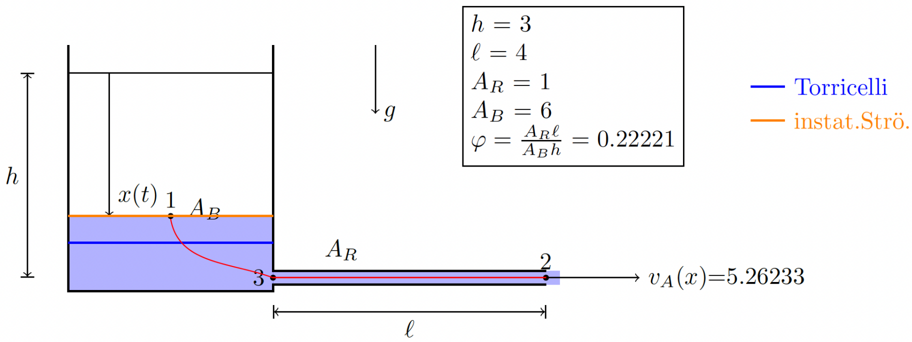
2. Die Geschwindigkeit $v_A(x)$ steigt schnell an. Die Wasserspiegelabsenkung nach Torricelli ist vorerst schneller als die Wasserspiegelabsenkung einer instationären Strömung.



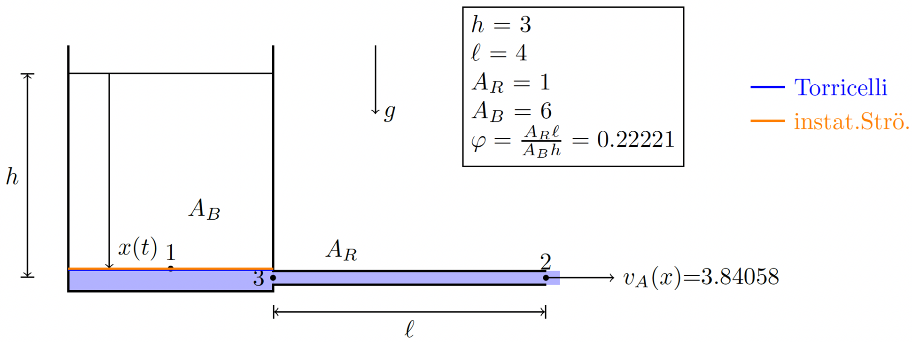
3.Die Geschwindigkeit $v_A(x)$ erreicht ihr Maximum.



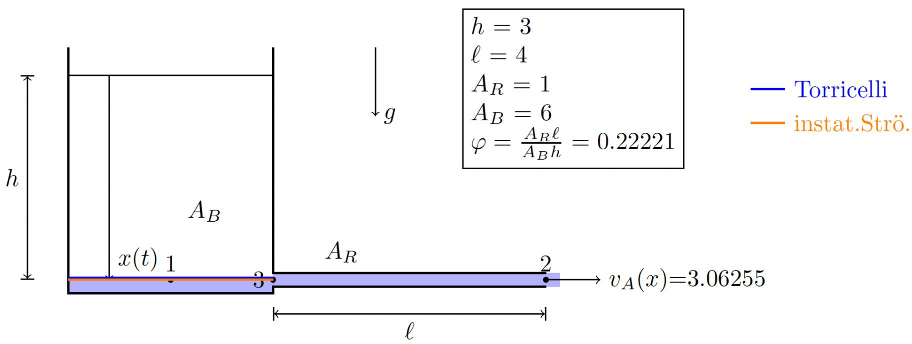
4. Die Geschwindigkeit $v_A(x)$ wird wieder langsamer.



5. Die Wasserspiegelabsenkung nach Torricelli erfolgt nun langsamer als die Wasserspiegelabsenkung einer instationären Strömung.



6. Der Behälter ist vollständig entleert ($x(t) = h$).



5.3 Vergleich

Beim Vergleich beider Fälle ($\varphi = 0$ und $\varphi \approx 0.22221$) sind einige Differenzen zu erkennen, welche sich auch in den Abbildungen 4.4 und 4.5 widerspiegeln. Am besten sind diese Unterschiede in der ablaufenden Animation zu erkennen.

Im Fall $\varphi = 0$ (blaue Linie) senkt sich die Wasserspiegellinie zuerst schneller ab, wird aber mit fortlaufender Zeit wieder langsamer. Dieser Verlauf ist auch in Abbildung 4.5 zu erkennen.

Im Fall $\varphi \approx 0.22221$ (orange Linie) sinkt die Wasserspiegellinie im Vergleich zum vorherigen Fall vorerst langsamer, lässt aber im Laufe der Zeit nicht so stark nach wie die Wasserspiegelabsenkung nach Torricelli.

Auch bei den Austrittsgeschwindigkeiten kann man Parallelen mit den Abbildungen erkennen. Im Fall $\varphi = 0$ ist die Geschwindigkeit $v_{A1}(x)$ am Beginn der Betrachtung am größten und wird schlussendlich 0. Im Fall $\varphi \approx 0.22221$ ist die Geschwindigkeit $v_{A2}(x)$ anfangs gleich 0, steigt danach sehr schnell an und wird dann wieder langsamer. Dieser Verlauf ist auch eindeutig in Abbildung 4.4 festzustellen.

6. FAZIT

Das Ziel dieser Bachelorarbeit war es, eine Animation des instationären Ausflusses aus einem Behälter zu erstellen. Diese soll zur unterstützenden Veranschaulichung der Inhalte der Lehrveranstaltung 'Hydromechanik' in den folgenden Jahren dienen.

Zur Erstellung der Animation wurde zuerst das vorliegende Beispiel gelöst und die Lösung anschließend in LaTeX implementiert. Im Latex-Code ist es möglich, einige Parameter des Beispiels selbst anzupassen. Es können die Höhe des Wasserstandes h, die Länge des Rohrs ℓ, die Querschnittsfläche des Behälters A_B und die Querschnittsfläche des Rohrs A_R verändert werden. Das ermöglicht ein schnelles und unkompliziertes Betrachten von verschiedenen Fällen eines instationären Ausflusses (z.B. kleiner/großer Behälter). Durch Interpretation und Vergleich der Ergebnisse mit der Visualisierung konnte ein guter Überblick über das Thema verschafft werden.

In der Zukunft wäre es durchaus sinnvoll, noch weitere Beispiele der Hydromechanik mit Hilfe von Animationen zu veranschaulichen, um den Studierenden so einen besseren Zugang zu den unterschiedlichen Themen zu ermöglichen. Das Erstellen von weiteren Animationen ist nun auch mit der Software LaTeX möglich, da das Ergebnis dieser Bachelorarbeit eine solide Grundlage dafür bietet.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Peter Dietmaier. Vorlesungsskriptum der LV Hydromechanik. *Hydromechanik*, 3.Auflage, 2008.

[2] Danube Commission 2021 - Donaukommission. Allgemeines über die Donau. *https://www.danubecommission.org/dc/de/die-donauschifffahrt/540-2/*, 2021.

[3] Michael H Gfrerer. Vorlesungsunterlagen der LV Hydromechanik im SS21. 2021.

[4] Dietmar Gross, Werner Hauger, and Peter Wriggers. Technische Mechanik 4. *Hydromechanik*, 10.Auflage:3–66, 2018.