

Bachelorarbeit im Studiengang Bauingenieurwissenschaften
am Institut für Baumechanik

Technische Universität Graz

Belastung in einem symbolischen Stabprogramm

Jonathan Krenn

Graz, 21. Juni 2022

Betreuer: Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. BSc
Michael Helmut Gfrerer

Statutory Declaration

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Graz, _____
Date

Signature

Eidesstattliche Erklärung¹

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am _____
Datum

Unterschrift

¹Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008; Genehmigung des Senates am 1.12.2008

Abstract

The aim of this bachelor thesis is the expansion of an existing code which is used to solve a system of statically determined beams. The existing code was written by Michael Gfrerer at the University of Technology Graz and includes the solving of beam systems and displaying the internal forces. The beams are variable and the loads are integrated in the code. The expansion includes four variable and definable load classes, which can represent every possible load. Implementing the load classes in python was the biggest challenge of this thesis and the written part covers the mechanical and mathematical principles which were used to write the code. The main point was the transformation between coordinates to get from global defined loads to local ones so the program can integrate them correctly. The mechanical and mathematical details of this transformation will be explained in detail. The workings of the code and the four different loads get explained. In order to demonstrate the function of the code, a possible system gets dissected and the different parts are explained individual.

Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit wird die Erweiterung eines Programmes zur symbolischen Lösung von mechanischen Stabproblemen behandelt. Der bestehende Code wurde von Michael Gfrerer am Mechanik Institut der TU Graz geschrieben und umfasste die Lösung und Darstellung von variierbaren Stabsystemen mit fix im Code definierten Lasten. Dieser wurde um die Berechnung von Stabproblemen mit variablen und definierbaren Belastungen erweitert. Der schriftliche Teil dieser Bachelorarbeit beschäftigt sich mit der mathematischen und mechanischen Berechnung der Probleme, der Hauptbestandteil war die Implementierung der Erweiterung in Python. Ein Hauptpunkt bei der Implementierung war die Koordinatentransformation der verschiedenen Lasten auf die lokalen Stabkoordinaten. Dieser Aspekt wird mechanisch und mathematisch genauer betrachtet. Allgemein wird die Funktionsweise des bestehenden Codes beschrieben und auf die Auswirkungen der vier Belastungsarten näher eingegangen. Anschließend wird ein mögliches Hausübungsbeispiel, welches mit diesem Code erstellt wurde, durchgerechnet und auf einige Besonderheiten und deren Auswirkungen auf den Lösungsweg näher eingegangen.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
2	Mechanische Grundidee	3
2.1	Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgröße	3
2.2	Schnittkräfte am geraden Balken	3
2.3	Schnittkräfte am Bogen	4
3	Funktionsweise des Programmes	5
3.1	Die lokale Matrix	5
3.2	Knotengleichgewicht	6
3.3	Die globale Matrix	7
3.4	Rechte-Seite-Vektor	8
3.5	Einzelkräfte	8
3.6	Verteilte Lasten	10
3.6.1	Lokale Lasten	10
3.6.2	Globale Lasten	10
3.6.3	Projizierte Lasten	12
4	Hausübungsbeispiel	15
4.1	Angabe	15
4.2	Darstellung Angabe	16
4.3	Matrix	17
4.3.1	Stab 1 und 2	18
4.3.2	Stab 3	18
4.3.3	Bogen 4	19
4.3.4	Stab 5	21
4.3.5	Knotengleichgewicht in A	23
4.3.6	Knotengleichgewicht in B	23
4.3.7	Knotengleichgewicht in C	25
4.3.8	Knotengleichgewicht in D	26
4.3.9	Knotengleichgewicht in E und F	26
4.3.10	Lösungsvektor	27

1. EINLEITUNG

Das gesamte Programm baut auf der Annahme eines Stabsystems auf. Dabei werden alle Bauteile als einachsige Balken oder Kreisbögen modelliert, welche punktweise starr oder gelenkig miteinander verbunden sind. Der Zusammenhang mit der Umgebung wird durch einen Freischnitt des gesamten Systems und den dadurch entstehenden Auflagerreaktionen dargestellt. Der Unterschied, im Vergleich mit bereits am Institut verwendeten Programmen zur Lösung von Stabsystemen, ist die Möglichkeit das definierte System analytisch und mit variablen Parametern berechnen zu lassen. Der Code wurde objektorientiert in Python implementiert.

2. MECHANISCHE GRUNDIDEE

2.1 Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgröße

Bei einem Balken besteht ein Zusammenhang zwischen Belastungsfunktion und den resultierenden Schnittgrößen. Dafür wird ein infinitesimal kleines Element mit der Länge $d\xi$ aus einem beliebig belasteten Balken herausgeschnitten. Durch die Bedingung, dass die kleine Länge $d\xi \rightarrow 0$ geht, kann von einer konstanten Last q ausgegangen werden. Aus diesen Zusammenhängen ergeben sich die Gleichungen für die Querkraft Q

$$\frac{dQ}{d\xi} = -q, \quad (2.1)$$

und für das Moment M

$$\frac{dM}{d\xi} = Q, \quad (2.2)$$

wobei q die Belastung normal auf den Stab ist. Die Normalkraft N kann mit der Formel

$$\frac{dN}{d\xi} = -n, \quad (2.3)$$

hergeleitet werden.

vgl. Gross, Schröder u. a., *Technische Mechanik 1: Statik*, S.181-184

2.2 Schnittkräfte am geraden Balken

Durch Integration der Gleichungen 2.3 und 2.1 von Beginn des Stabes bis zu einem beliebigen Punkt x , ergibt sich für die Querkraft sowie die Normalkraft

$$N(x) = \int_0^x -n d\xi + C_1, \quad (2.4)$$

$$Q(x) = \int_0^x -q d\xi + C_2, \quad (2.5)$$

und für das Moment aus Gleichung 2.2

$$M(x) = \int_0^x Q d\xi + C_3. \quad (2.6)$$

Die Integrationskonstanten C_1 , C_2 und C_3 spielen in der Funktionsweise des Programmes eine wichtige Rolle.

vgl. Gross, Schröder u. a., *Technische Mechanik 1: Statik*, S.181-184

2.3 Schnittkräfte am Bogen

Ein Bogen wird definiert durch seine Bogenlänge s und dem Krümmungsradius r . Um von einem linienhaften Körper ausgehen zu können, muss der Krümmungsradius deutlich größer als die Querschnittsabmessungen des Bogens sein. Die Gleichgewichtsbedingungen werden am differentiell kleinen Element aufgestellt und dann daraus die Schnittgrößen durch Integration ermittelt. Hierzu wird ein Element mit der Länge ds und den Schnittgrößen n und q betrachtet. Die Bogenlänge s wird durch den Radius und den Öffnungswinkel definiert und ergibt sich zu $ds = r d\phi$. Da $d\phi$ infinitesimal klein ist, können die Winkelfunktionen vereinfacht werden. Daraus ergeben sich die gekoppelten Differentialgleichungen zu

$$\frac{dQ}{ds} + \frac{1}{r}N + q = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dN}{ds} + \frac{1}{r}Q + n = 0. \quad (2.8)$$

Das Momentengleichgewicht um den Mittelpunkt ergibt

$$\frac{dM}{ds} - Q = 0. \quad (2.9)$$

Für einen unbelasteten Stab mit $q = 0$ und $n = 0$ ergibt das Lösen der homogenen Differentialgleichung

$$N = A \sin(\phi) - B \cos(\phi), \quad (2.10)$$

$$Q = A \cos(\phi) + B \sin(\phi), \quad (2.11)$$

$$M = (A \sin(\phi) - B \cos(\phi))R + C. \quad (2.12)$$

Durch Freischnitt an einer beliebigen Stelle können die Belastungen als resultierende Kräfte berücksichtigt werden. vgl. Gross, Wriggers und Hauger, *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*, S.168-170

3. FUNKTIONSWEISE DES PROGRAMMES

3.1 Die lokale Matrix

Jeder Stab im System wird, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, mit der jeweiligen verteilten Belastung im lokalen Koordinatensystem integriert. Die dadurch entstehenden Funktionen werden am Anfang und am Ende des Stabes ausgewertet und in einer lokalen Matrix dargestellt. Für ein einfaches System, wie beispielsweise einen Kragarmträger ersichtlich in Abbildung 3.1, sieht diese Funktionsweise wie folgt aus:

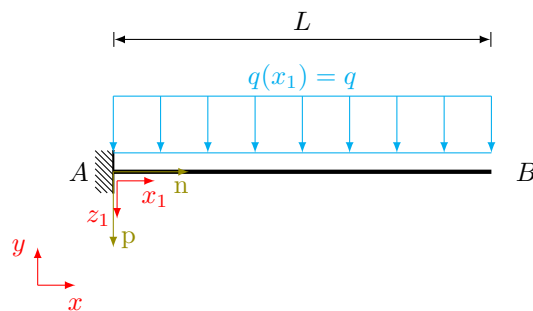


Abbildung 3.1: Kragarmträger mit konstanter Belastung

Die Belastung $q(\xi) = q$ wird wie bereits beschrieben integriert und es entstehen folgende Integrale

$$N(x) = \int_0^x -n d\xi = \int_0^x 0 d\xi = C_1, \quad (3.1)$$

$$Q(x) = \int_0^x -q(\xi) d\xi = \int_0^x -q d\xi = -qx + C_2, \quad (3.2)$$

$$M(x) = \int_0^x Q(\xi) d\xi = \int_0^x -q\xi + C_2 d\xi = \frac{-qx^2}{2} + C_2x + C_3. \quad (3.3)$$

Die Schnittkräfte in Matrixschreibweise sehen wie folgt aus

$$\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -qx \\ \frac{-qx^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

3.2 Knotengleichgewicht

In jedem Anfangs- und Endknoten des Stabes wird ein Gleichgewicht aufgestellt. Dabei müssen alle Kräfte und Momente in globalen Koordinaten gleich Null sein. Im Falle des Kragarmträgers sind die Richtungen der z_1 - und y - Koordinaten vertauscht, bei schrägen Stäben müssen die lokal aufgestellten Schnittgrößen mit Hilfe des Winkels in globale Kräfte umgerechnet werden. Wie in Abbildung 3.2 zu sehen erfolgt das Einzeichnen der Schnittkräfte nach der Schnittgrößenkonvention der Mechanik, wobei positive Kräfte am positiven Schnittufer im lokalen Koordinatensystem in die positive Richtung zeigen. Momente werden rechtsdrehend positiv angenommen.

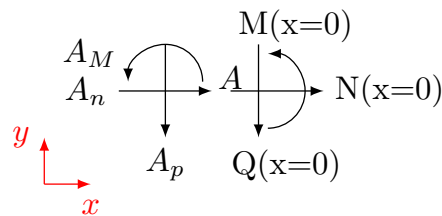


Abbildung 3.2: Knotengleichgewicht am eingespannten Ende

Bei einem Gleichgewicht um A bei $x = 0$ ergibt sich

$$\begin{bmatrix} N(x=0) \\ -Q(x=0) \\ M(x=0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_n \\ -A_p \\ A_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Das Einsetzen für die Schnittgrößen der zuvor integrierten lokalen Matrix ergibt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ A_p \\ A_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ebenso wird das freie Ende B bei $x = L$ betrachtet. Siehe Abbildung 3.3.

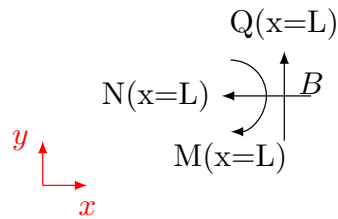


Abbildung 3.3: Knotengleichgewicht am freiem Ende

Das Kräftegleichgewicht in globalen Koordinaten ergibt

$$\begin{bmatrix} -N(x=L) \\ Q(x=L) \\ -M(x=L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Wie zuvor werden die errechneten Schnittgrößen eingesetzt und man erhält

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -qL \\ \frac{qL^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

3.3 Die globale Matrix

Die Gleichungen aus 3.6 und 3.8 werden kombiniert, wobei die Randbedingungen in die Schnittgrößen-Matrix aufgenommen werden und der Belastungsvektor auf die andere Seite subtrahiert wird. Das ergibt für den Fall des Kragarmträgers ein Gleichungssystem mit einer 6×6 Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ A_n \\ A_p \\ A_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ qL \\ -\frac{L^2 q}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Allgemein betrachtet setzt sich die $n \times n$ Matrix aus der Anzahl der Stäbe und den Auflagerunbekannten zusammen, wobei

$$n = 3 \cdot \text{Anzahl der Stäbe} + \text{Anzahl der Auflagerunbekannten} \quad (3.10)$$

gilt. Damit ein System auf diese Weise lösbar ist, muss es statisch und kinematisch bestimmt sein. Die kinematische Bestimmtheit sagt, dass es zu keinen infinitesimal großen oder tatsächlichen Verschiebungen oder Verdrehungen kommen kann. Die mechanische Bestimmtheit bezieht sich auf die Lösbarkeit mittels den drei Gleichgewichtsbedingungen und besagt, dass ein System lösbar ist, wenn

$$3 \cdot \text{Anzahl der Scheiben} = \text{Anzahl der Unbekannten} \quad (3.11)$$

gilt, wobei eine Scheibe aus mehreren Stäben bestehen kann, solange diese steif miteinander verbunden sind. Zu beachten ist, dass die zwei gesperrten Gelenksfreiheiten zu den Unbekannten dazuzählen.

3.4 Rechte-Seite-Vektor

In der globalen Matrix 3.9 ist zu erkennen, dass alle belastungsrelevanten Einträge auf der rechten Seite der Gleichung stehen. Somit fällt in die linke Matrix nur der geometrische Anschluss der Stäbe an die Knoten. Im Programm wird die geometrische Matrix noch vor der Berechnung der Belastungen aufgestellt und auf statische und kinematische Bestimmtheit geprüft.

3.5 Einzelkräfte

Einzelkräfte greifen mit einem x -, y - und Momentenanteil an einem Knoten an und sind durch die globalen Koordinaten definiert. Der belastete Kragarmträger ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

Die Einzelkräfte haben keinen Einfluss auf das Integral des Stabes und beeinflussen somit nicht die linke Matrix. Ihren Einfluss erkennt man nur im Knotengleichgewicht. Die Auswertung des Knotens B bei $x = L$ ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

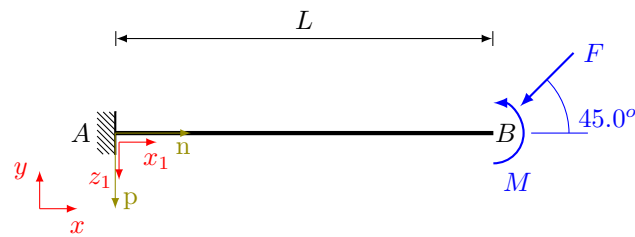


Abbildung 3.4: Kragarmträger mit Einzellasten

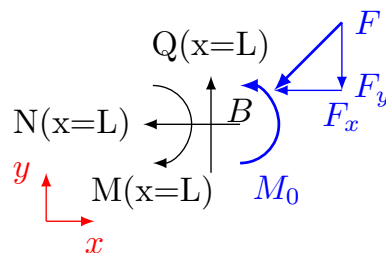


Abbildung 3.5: Knotengleichgewicht am freien Ende mit Einzellast

Die Matrix für diesen Freischnitt lautet folglich

$$\begin{bmatrix} -N(x=L) \\ Q(x=L) \\ -M(x=L) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ M_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Das Umrechnen in eine globale Matrix mit den gleichen Randbedingungen für A wie in Matrix 3.6 ergibt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ A_n \\ A_p \\ A_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_x \\ F_y \\ -M_0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Hier ist gut zu erkennen, dass die Einzelkräfte nur den rechten Vektor beeinflussen und getrennt betrachtet werden können.

3.6 Verteilte Lasten

Wie zuvor erwähnt, haben die verteilten Lasten nur einen Einfluss auf den rechten Vektor mit der integrierten Belastungsfunktion ohne Integrationskonstanten. Je nach Wirkungsrichtung und Abhängigkeit, müssen die drei verschiedenen Arten der Belastung umgerechnet werden. Um die Belastungen integrieren zu können, müssen diese in den Normal- und Tangentialanteil aufgeteilt werden. Für einen gebogenen Stab entspricht der Normalanteil dem Radialanteil.

3.6.1 Lokale Lasten

Die lokale Last wird mit den lokalen Koordinaten definiert und wirkt normal und tangential auf den Stab. Daher erfolgt keine Umrechnung und die Lasten können wie in Abbildung 3.6 dargestellt direkt integriert werden.

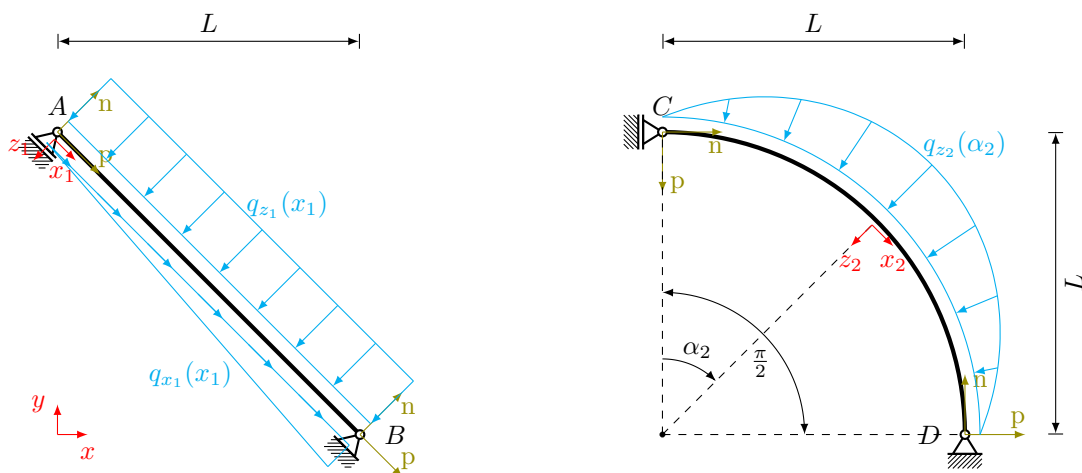


Abbildung 3.6: Lokale Belastung auf Stab und Bogen

3.6.2 Globale Lasten

Die globalen Lasten wirken wie in Abbildung 3.7 ersichtlich in globalen x - und y -Koordinaten und sind in Abhängigkeit von ξ entlang der Stabrichtung definiert. Da die Belastung für eine lokale Integration in den lokalen Koordinaten gegeben sein muss, werden diese

umgewandelt. Die Orientierung des Stabes im globalen System wird dabei mit dem Normalvektor $\mathbf{n}(\xi)$ und dem Tangentialvektor $\mathbf{t}(\xi)$ definiert

$$\mathbf{q}_l(\xi) = q_n(\xi) \mathbf{n}(\xi) + q_t(\xi) \mathbf{t}(\xi). \quad (3.14)$$

Die globale Last $\mathbf{q}_g(\xi)$ wird in den globalen Koordinaten x und y angegeben

$$\mathbf{q}_g(\xi) = q_x(\xi) \mathbf{e}_x + q_y(\xi) \mathbf{e}_y. \quad (3.15)$$

Wenn die globale Last $\mathbf{q}_g(\xi)$ in die lokale Last $\mathbf{q}_l(\xi)$ umgerechnet wird, muss Folgendes gelten

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_l(\xi) &= \mathbf{q}_g(\xi), \\ q_n(\xi) \mathbf{n}(\xi) + q_t(\xi) \mathbf{t}(\xi) &= q_x(\xi) \mathbf{e}_x + q_y(\xi) \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Werden beide Seiten mit dem Normalvektor $\mathbf{n}(\xi)$ multipliziert folgt aus der Tatsache, dass Normal- und Tangentialvektor normiert und zueinander normal sind

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\xi) \cdot \mathbf{n}(\xi) &= 1, \\ \mathbf{t}(\xi) \cdot \mathbf{t}(\xi) &= 1, \\ \mathbf{n}(\xi) \cdot \mathbf{t}(\xi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

folgende Identität

$$\begin{aligned} q_n(\xi) \mathbf{n}(\xi) \cdot \mathbf{n}(\xi) + q_t(\xi) \mathbf{t}(\xi) \cdot \mathbf{n}(\xi) &= q_x(\xi) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}(\xi) + q_y(\xi) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}(\xi), \\ q_n(\xi) &= q_x(\xi) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}(\xi) + q_y(\xi) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}(\xi). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ebenso wird mit dem Tangentialvektor $\mathbf{t}(\xi)$ verfahren und es folgt

$$\begin{aligned} q_n(\xi) \mathbf{n}(\xi) \cdot \mathbf{t}(\xi) + q_t(\xi) \mathbf{t}(\xi) \cdot \mathbf{t}(\xi) &= q_x(\xi) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}(\xi) + q_y(\xi) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}(\xi), \\ q_t(\xi) &= q_x(\xi) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}(\xi) + q_y(\xi) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}(\xi). \end{aligned} \quad (3.19)$$

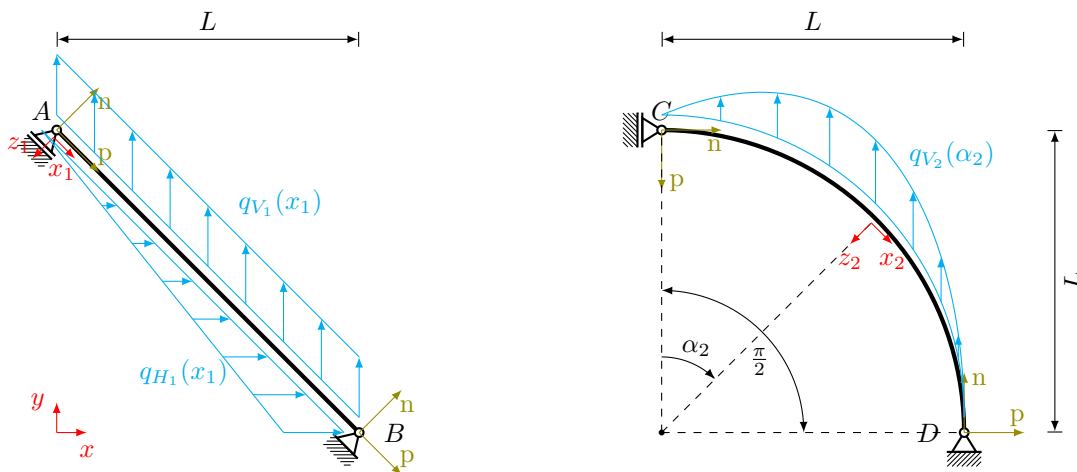


Abbildung 3.7: Positive globale Last auf Stab und Bogen

3.6.3 Projizierte Lasten

Die projizierten Lasten beziehen sich auf die Projektion des Stabes in vertikaler oder horizontaler Richtung. Dies ist in Abbildung 3.8 grafisch verdeutlicht. Die horizontal projizierten Lasten, also in x -Richtung werden in Abhängigkeit von s_y und die vertikal projizierten Lasten, also in y -Richtung, in Abhängigkeit von s_x angegeben,

$$\mathbf{q}_p(s) = q_x(s_y) \mathbf{e}_x + q_y(s_x) \mathbf{e}_y. \quad (3.20)$$

Das Einsetzen der Abhängigkeit $s_x(\xi)$ und $s_y(\xi)$ ergibt

$$\mathbf{q}_g(\xi) d\xi = q_{p_x}(s_y(\xi)) ds_y(\xi, d\xi) \mathbf{e}_x + q_{p_y}(s_x(\xi)) ds_x(\xi, d\xi) \mathbf{e}_y. \quad (3.21)$$

Nach Ableitung der Gleichung nach ξ ergibt sich der Zusammenhang

$$\mathbf{q}_g(\xi) = q_{p_x}(s_y(\xi)) \frac{ds_y}{d\xi} \mathbf{e}_x + q_{p_y}(s_x(\xi)) \frac{ds_x}{d\xi} \mathbf{e}_y. \quad (3.22)$$

Der Zusammenhang der im Stab laufenden Variablen ξ und der beiden Variablen s_x und s_y sieht wie folgt aus, wobei $\mathbf{x}(0)$ die x -Koordinaten des Stabursprunges und $\mathbf{x}(\xi)$ die aktuellen Koordinaten in Abhängigkeit von ξ beschreibt

$$\begin{aligned} s_x(\xi) &= |(\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{e}_x|, \\ s_y(\xi) &= |(\mathbf{x}(\xi) - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{e}_y|. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Durch Einsetzen in die Ableitung folgt

$$\frac{ds_x}{d\xi} = \cos(\alpha) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x, \quad (3.24)$$

$$\frac{ds_y}{d\xi} = \sin(\alpha) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y. \quad (3.25)$$

was wiederum in Gleichung 3.22 eingesetzt wird

$$\mathbf{q}_g(\xi) = q_{p_x}(s_y(\xi)) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_x + q_{p_y}(s_x(\xi)) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_y. \quad (3.26)$$

Die Gesamtbelastung \mathbf{q}_g wird in die summierte Belastung aus $q_n(\xi)$ und $q_t(\xi)$ zerlegt

$$q_n(\xi) \mathbf{n}(\xi) + q_t(\xi) \mathbf{t}(\xi) = q_{p_x}(s_y(\xi)) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_x + q_{p_y}(s_x(\xi)) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_y, \quad (3.27)$$

welche mit Hilfe von $\mathbf{n}(\xi)$ und $\mathbf{t}(\xi)$ in die gesuchten Belastungen

$$q_n(\xi) = q_{p_x}(s_y(\xi)) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y) (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}) + q_{p_y}(s_x(\xi)) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x) (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}), \quad (3.28)$$

$$q_t(\xi) = q_{p_x}(s_y(\xi)) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y) (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{t}) + q_{p_y}(s_x(\xi)) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x) (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{t}), \quad (3.29)$$

zerlegt wird. Die Belastungen $q_n(\xi)$ und $q_t(\xi)$ können nun als lokale Lasten integriert werden.

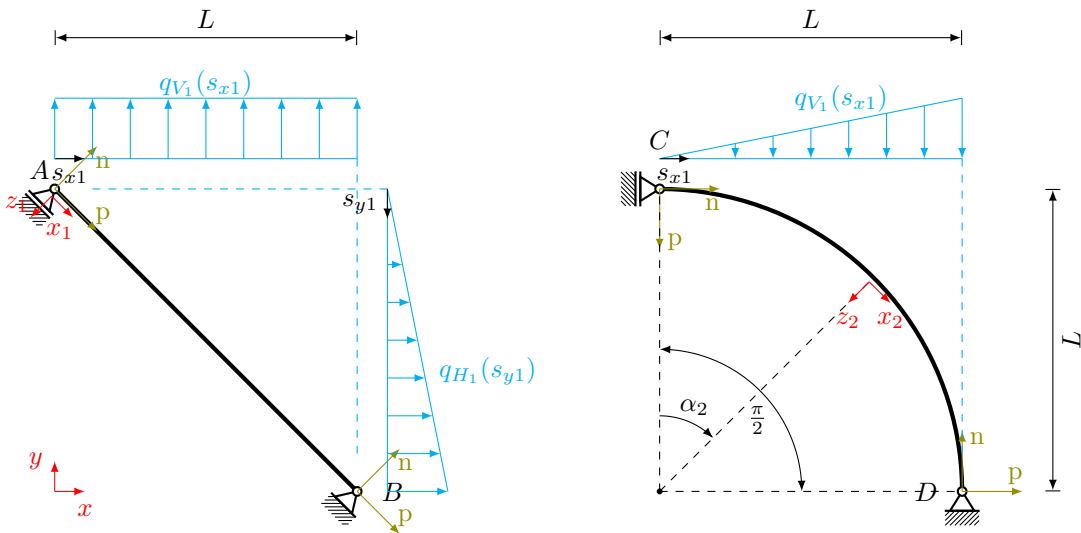


Abbildung 3.8: Projizierte Last auf Stab und Bogen

4. HAUSÜBUNGSBEISPIEL

Die Vorgehensweise zum Aufstellen des Gleichungssystems wird anhand eines möglichen Hausübungsbeispiels demonstriert. Es wird vor allem auf die Veränderung der Matrix durch die geometrischen Bedingungen eingegangen.

4.1 Angabe

Das Stabsystem besteht aus vier geraden Stäben und einem Viertelkreisbogen. Die Stäbe 2, 3 und 5 sind im Punkt C steif miteinander verbunden. Im Punkt B befindet sich ein Vollgelenk, an dem die Stäbe 1 und 2, sowie der Bogen 4 gelenkig angeschlossen sind. Die Auflager bestehen aus einer zweiwertigen Parallelführung in Punkt E sowie drei einwertige Loslager in den Punkten A , D und F . Die Belastung besteht aus einer konstanten projizierten Belastung auf Stab 3, einer konstanten, radial wirkenden konstanten Belastung auf den Bogen 4 und einer linearen globalen Belastung auf Stab 5. Weiters wirkt eine schräg angreifende Einzellast im Punkt B .

4.2 Darstellung Angabe

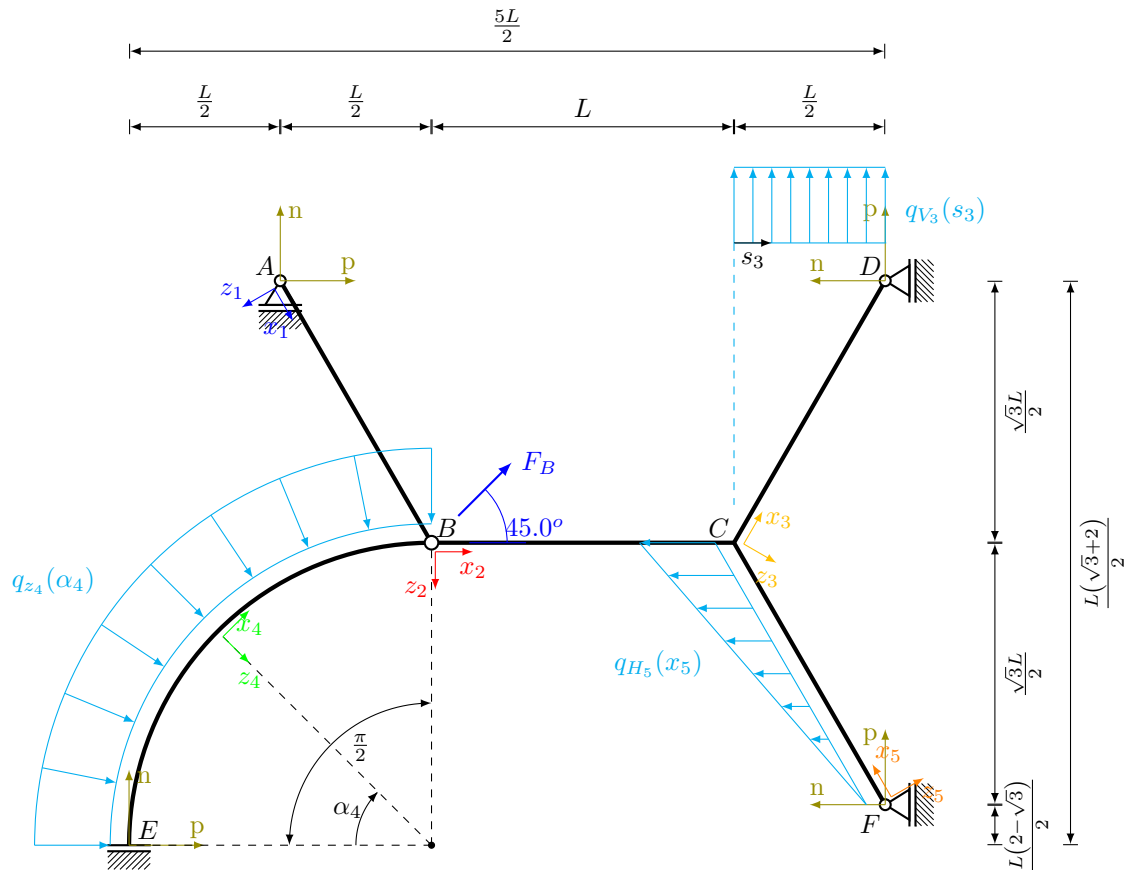


Abbildung 4.1: Mögliches Stabsystem mit 4 Stäben und einem Bogen

Die gegebenen Belastungsfunktionen lauten:

$$\begin{aligned}
 F_B &= \sqrt{2}Lq \\
 q_{v_3}(s_3) &= q \\
 q_{z_4}(\alpha_4) &= q \\
 q_{H_5}(x_5) &= \frac{qx_5}{L}
 \end{aligned}$$

4.3 Matrix

Die Matrix setzt sich aus den fünf Stäben mit jeweils drei Gleichgewichten sowie den fünf Lagerwertigkeiten zusammen. Dies ergibt eine 20×20 Matrix und einen 1×20 Rechte-Seite-Vektor.

1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_{11}	0
2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_{12}	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_{13}	0
4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_{21}	$-2Lq$
5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	C_{22}	0
6	0	$-L$	-1	0	0	1	0	0	0	L	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	C_{23}	$-L^2q$
7	0	0	0	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	0	0	C_{31}	$\frac{Lq}{2}$
8	0	0	0	0	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	C_{32}	0
9	0	0	0	0	-L	-1	0	0	1	0	0	0	0	-L	-1	0	0	0	0	C_{33}	$\frac{\sqrt{3}L^2q}{12}$
10	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	C_{41}	0
11	0	0	0	0	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_{42}	$-\frac{Lq}{2}$
12	0	0	0	0	0	0	0	-L	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_{43}	$\frac{L^2q}{8}$
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C_{51}	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	C_{52}	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	L	1	0	0	0	0	0	0	1	C_{53}	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	0	0	-1	A_n	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	D_n	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	E_n	0
19	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	E_M	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-L	0	1	0	0	0	0	0	0	0	F_n	L^2q

$=$

C_{11}	0
C_{12}	0
C_{13}	0
C_{21}	$-2Lq$
C_{22}	0
C_{23}	$-L^2q$
C_{31}	$\frac{Lq}{2}$
C_{32}	0
C_{33}	$\frac{\sqrt{3}L^2q}{12}$
C_{41}	0
C_{42}	$-\frac{Lq}{2}$
C_{43}	$\frac{L^2q}{8}$
C_{51}	0
C_{52}	0
C_{53}	0
A_n	0
D_n	0
E_n	0
E_M	0
F_n	L^2q

(4.1)

In der globalen Matrix sind deutlich die vielen lokalen 3×3 Matrizen der Stäbe erkennbar und farblich gekennzeichnet. Die Einträge von Stab 1 sind blau, die von Stab 2 rot, die von Stab 3 dunkelgelb, die von Bogen 4 grün und die von Stab 5 kommend orange gekennzeichnet. Man erkennt etwa an Zeilen 4 bis 6, dass hier die Stäbe 1, 2 und 4 einen gemeinsamen Knoten haben. Die erste Ziffer der Fußnote der Integrationskonstante beschreibt den Stab, die zweite Ziffer ist die Durchnummerierung im Stab selbst.

4.3.1 Stab 1 und 2

Für die zwei unbelasteten Stäbe 1 und 2 ergeben sich aus der Integration entlang des unbelasteten Balkens folgende Schnittkräfte

$$N_{1/2}(x_{1/2}) = \int_0^{x_{1/2}} -n(\xi) d\xi = \int_0^{x_{1/2}} 0 d\xi = C_1, \quad (4.2)$$

$$Q_{1/2}(x_{1/2}) = \int_0^{x_{1/2}} -q(\xi) d\xi = \int_0^{x_{1/2}} 0 d\xi = C_2, \quad (4.3)$$

$$M_{1/2}(x_{1/2}) = \int_0^{x_{1/2}} Q(\xi) d\xi = \int_0^{x_{1/2}} C_2 d\xi = C_2 x_{1/2} + C_3. \quad (4.4)$$

4.3.2 Stab 3

Um den projiziert belasteten Stab 3 integrieren zu können, muss die Belastung erst in eine lokal wirkende Normal- und Tangentialbelastung umgewandelt werden. Die Wirkungsrichtung ist dabei durch das lokale Stabsystem vorgegeben. Die Normal- und Tangentialvektoren bleiben über den Stab konstant und ergeben sich aus der Geometrie zu

$$\mathbf{n}(x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}(x_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Die konstante Belastung $q_{V3}(s_3) = q_y = q$ wird mit den Gleichungen 3.28 und 3.29 umgerechnet und ergibt die Belastungen

$$q_n(x_3) = 0 + q \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right), \quad (4.6)$$

$$q_n(x_3) = -\frac{q}{4},$$

$$q_t(x_3) = 0 + q \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right), \quad (4.7)$$

$$q_t(x_3) = \frac{\sqrt{3}q}{4}.$$

Durch Integration der lokalen Belastungen erhält man die Schnittkräfte

$$N_3(x_3) = \int_0^{x_3} -n(\xi) d\xi = \int_0^{x_3} -\frac{\sqrt{3}q}{4} d\xi = -\frac{\sqrt{3}qx_3}{4} + C_{31}, \quad (4.8)$$

$$Q_3(x_3) = \int_0^{x_3} -q(\xi) d\xi = \int_0^{x_3} \frac{q}{4} d\xi = \frac{qx_3}{4} + C_{32}, \quad (4.9)$$

$$M_3(x_3) = \int_0^{x_3} Q(\xi) d\xi = \int_0^{x_3} \frac{q\xi}{4} + C_2 d\xi = \frac{qx_3^2}{8} + C_{32}x_3 + C_{33}. \quad (4.10)$$

4.3.3 Bogen 4

Der Viertelkreisbogen ist bereits lokal belastet. Da sich durch die Krümmung des Bogens die Normal- und Tangentialvektoren verändern, werden diese in Abhängigkeit von ϕ angegeben

$$\mathbf{n}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{bmatrix}, \mathbf{t}(\phi) = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Für die Integration werden die Belastungen in einen globalen, horizontalen x -Anteil und einen global vertikalen y -Anteil getrennt. Daraus ergeben sich die Resultierenden in globalen Koordinaten zu

$$R_x(\alpha_4) = \int_0^{\alpha} (q_n(\phi) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) + q_t(\phi) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x)) R d\phi, \quad (4.12)$$

$$R_y(\alpha_4) = \int_0^{\alpha} (q_n(\phi) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) + q_t(\phi) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y)) R d\phi, \quad (4.13)$$

wobei R der Radius und α der Öffnungswinkel des Kreisbogens ist.

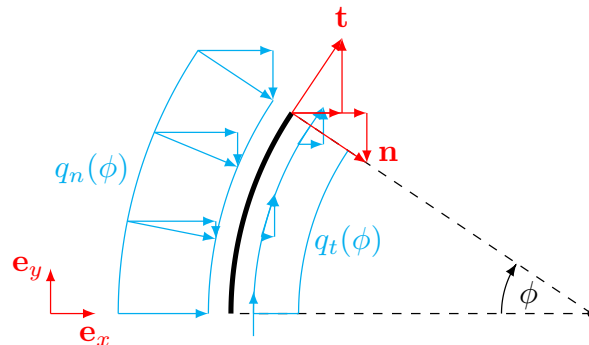


Abbildung 4.2: Lokale Belastungen auf einem Bogen

Mit einer Belastung von $q_n = q$ und $q_t = 0$ und einem Radius $R = L$ ergeben sich R_x und R_y zu

$$\begin{aligned}
 R_x(\alpha_4) &= \int_0^{\alpha_4} (q \left(\begin{bmatrix} \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + 0) L d\phi \\
 &= qR(\sin(\alpha_4) - \sin(0)) \\
 R_x(\alpha_4) &= qR\sin(\alpha_4),
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
 R_y(\alpha_4) &= \int_0^{\alpha_4} (q \left(\begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + 0) L d\phi \\
 &= qR(\cos(\alpha_4) - \cos(0)) \\
 R_y(\alpha_4) &= qR(\cos(\alpha_4) - 1).
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die integrierte Belastung aus 4.15 und die Gleichungen für die Schnittkräfte am Bogen 2.10 und 2.11 werden kombiniert und ergeben

$$N_4(\alpha_4) = A\sin(\alpha_4) - B\cos(\alpha_4) - (R_x(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x) + R_y(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y)), \tag{4.16}$$

$$Q_4(\alpha_4) = A\cos(\alpha_4) + B\sin(\alpha_4) - (R_x(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x) + R_y(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y)). \tag{4.17}$$

Betrachtet man das Moment der Belastungen um den Keismittelpunkt erkennt man, dass die normale Last q_n immer durch den Mittelpunkt zeigt und somit kein Moment erzeugt. Wenn die tangentialen Belastung integriert wird, ergibt sich eine Resultierende mit einem Normalabstand zum Mittelpunkt von Radius R . Somit ergibt sich das Gleichgewicht für

das Moment zu

$$M_4(\alpha_4) = N(\alpha_4)R + C - \int_0^{\alpha_4} q_l R d\phi \cdot R. \quad (4.18)$$

Durch Einsetzen von $A = -C_{41}$, $B = -C_{42}$ und $C = C_{43}$, wobei die Vorzeichen auf die Richtung des Koordinatensystems im Bogens zurückzuführen sind, sowie Umrechnen der Resultierenden R_x und R_y ergeben sich die Schnittkräfte zu

$$\begin{aligned} N_4(\alpha_4) &= -C_{41}\sin(\alpha_4) + C_{42}\cos(\alpha_4) - qL(\sin(\alpha_4) \cdot \sin(\alpha_4) + (\cos(\alpha_4) - 1) \cdot \cos(\alpha_4)), \\ N_4(\alpha_4) &= -C_{41}\sin(\alpha_4) + C_{42}\cos(\alpha_4) - qL(1 - \cos(\alpha_4)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} Q_4(\alpha_4) &= -C_{41}\sin(\alpha_4) - C_{42}\cos(\alpha_4) - qL(\sin(\alpha_4) \cdot \cos(\alpha_4) + (\cos(\alpha_4) - 1) \cdot -\sin(\alpha_4)), \\ Q_4(\alpha_4) &= -C_{41}\sin(\alpha_4) - C_{42}\cos(\alpha_4) - qL(\sin(\alpha_4)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$M_4(\alpha_4) = (-C_{41}\sin(\alpha_4) + C_{42}\cos(\alpha_4) - qL(1 - \cos(\alpha_4)))L + C_{43} - 0. \quad (4.21)$$

4.3.4 Stab 5

Der Stab 5 ist mit einer horizontalen, linearen, globalen Last belastet. Die Umrechnung in die benötigten lokalen Lasten erfolgt wie in 3.18 und 3.19 beschrieben. Die Normal- und Tangentialvektoren bleiben über den Stab konstant und ergeben sich aus der Geometrie zu

$$\mathbf{n}(x_5) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{t}(x_5) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Aus der Umrechnung folgen die lokalen Belastungen

$$q_n(x_5) = \frac{qx_5}{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) + 0, \quad (4.23)$$

$$q_n(x_5) = \frac{\sqrt{3}qx_5}{2L},$$

$$q_t(x_5) = \frac{qx_5}{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right) + 0, \quad (4.24)$$

$$q_t(x_5) = -\frac{qx_5}{2L}.$$

Durch Integration über die Stabvariable ξ erhält man die Schnittkräfte für den Stab 5 mit

$$N_5(x_5) = \int_0^{x_5} -n(\xi) d\xi = \int_0^{x_5} \frac{q\xi}{2L} d\xi = \frac{qx_5^2}{4L} + C_1, \quad (4.25)$$

$$Q_5(x_5) = \int_0^{x_5} -q(\xi) d\xi = \int_0^{x_5} -\frac{\sqrt{3}q\xi}{2L} d\xi = -\frac{\sqrt{3}qx_5^2}{4L} + C_2, \quad (4.26)$$

$$M_5(x_5) = \int_0^{x_5} Q(\xi) d\xi = \int_0^{x_5} -\frac{\sqrt{3}q\xi^2}{4L} + C_2 d\xi = -\frac{\sqrt{3}qx_5^3}{12L} + C_2x_5 + C_3. \quad (4.27)$$

4.3.5 Knotengleichgewicht in A

An den Knoten A schließt nur der nicht belastete Stab 1 und ein einwertiges Loslager an. Weiters beginnt das lokale Koordinatensystem im Knoten A , das bedeutet $x_1 = 0$. Die Schnittkräfte aus 4.2, 4.3 und 4.4 werden in die globalen Koordinaten umgerechnet und aus der Geometrie ergibt sich

$$N_1(x_1 = 0) \cdot \frac{1}{2} + Q_1(x_1 = 0) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad (4.28)$$

$$N_1(x_1 = 0) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} + Q_1(x_1 = 0) \cdot -\frac{1}{2} + A_n = 0, \quad (4.29)$$

$$M_1(x_1 = 0) = 0. \quad (4.30)$$

Die Gleichungen werden als Matrix dargestellt und können in die Systemmatrix 4.1 eingliedert werden.

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{bmatrix} + A_n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

4.3.6 Knotengleichgewicht in B

Im Knoten B treffen drei Stäbe zusammen. Zusätzlich greift hier eine Einzellast mit horizontaler und vertikaler Komponente an. Der Stab 2 greift ebenso wie der Bogen 4 in horizontaler Richtung an und es ist nur auf die Orientierung der Kräfte nach der Schnittkraftkonvention zu achten. Die Kräfte von Stab 1 werden in das globale Koordinatensystem umgerechnet und zum Knotengleichgewicht addiert. Die horizontale Kräftesumme ergibt

$$\begin{aligned} N_1(x_1 = L) \cdot -\frac{1}{2} + Q_1(x_1 = L) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N_2(x_2 = 0) - N_4(\alpha_4 = \frac{\pi}{2}) + qL &= 0, \\ C_{11} \cdot -\frac{1}{2} + C_{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + C_{21} - (-C_{41} - qL) + qL &= 0, \\ -\frac{1}{2}C_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_{12} + C_{21} + C_{41} &= -2qL. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die vertikale Kräftesumme wird analog zur horizontalen aufgestellt. Die Einzelkraft wird als einzelne Komponente hinzugefügt und auf hat einen Einfluss auf den Rechte-Seite-Vektor

$$\begin{aligned} N_1(x_1 = L) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + Q_1(x_1 = L) \cdot \frac{1}{2} - Q_2(x_2 = 0) + Q_4(\alpha_4 = \frac{\pi}{2}) + qL &= 0, \\ C_{11} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + C_{12} \cdot \frac{1}{2} - C_{22} + (-C_{42} - qL) + qL &= 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_{11} + \frac{1}{2}C_{12} - C_{22} - C_{42} &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die Stäbe werden alle im Knoten geschnitten, sodass die Normal- und Querkräfte keinen Hebelarm besitzen. Es werden nur die Momente in linksdrehender Richtung aufgestellt und summiert

$$\begin{aligned} -M_1(x_1 = L) + M_2(x_2 = 0) - M_4(\alpha_4 = \frac{\pi}{2}) &= 0, \\ -(C_{12}L + C_{13}) + C_{23} - (-C_{41}L + C_{43} - qL^2) &= 0, \\ -LC_{12} - C_{13} + C_{23} + LC_{41} - C_{43} &= -qL^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Darstellung in Vektorform ergibt wieder die Zeilen 4, 5 und 6 der Systemmatrix 4.1.

$$\begin{aligned} 4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{41} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2qL \end{bmatrix} \\ 5 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{42} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ 6 \begin{bmatrix} 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{43} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -qL^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Gleichung 4.34 besagt, dass die Momentensumme um den Knoten B erfüllt ist. Das Gelenk im Knoten B wurde damit noch nicht berücksichtigt. Erst die Aussage

$$\begin{aligned} M_2(x_2 = 0) &= 0, \\ C_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

und

$$\begin{aligned} M_4(\alpha_4 = \frac{\pi}{2}) &= 0, \\ -C_{41}L + C_{43} - qL^2 &= 0, \\ -LC_{41} + C_{43} &= qL^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

sorgen dafür, dass das Moment im Knoten B für alle drei Stäbe Null ist. Nach Umwandlung in Vektorform können die Zeile 19 und 20 in die Systemmatrix 4.1 eingegliedert werden

$$\begin{aligned} 19 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{41} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ 20 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{43} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} qL^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.38)$$

4.3.7 Knotengleichgewicht in C

Im Knoten C sind die Stäbe 2, 3 und 5 steif angeschlossen. Die Umrechnung der Kräfte ergibt sich wieder durch die Geometrie. Die horizontale Kräftesumme um Knoten C ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned} -N_2(x_2 = L) + N_3(x_3 = 0) \cdot \frac{1}{2} + Q_3(x_3 = 0) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N_5(x_5 = L) \cdot \frac{1}{2} + Q_5(x_5 = L) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} &= 0, \\ -C_{21} + C_{31} \cdot \frac{1}{2} + C_{32} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (C_{51} + \frac{qL}{4}) \cdot \frac{1}{2} + (C_{52} - \frac{\sqrt{3}qL}{4}) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} &= 0, \\ -C_{21} + \frac{1}{2}C_{31} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_{32} + \frac{1}{2}C_{51} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_{52} &= \frac{\sqrt{qL}}{2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Analog dazu wird die vertikale Kräftesumme aufgestellt und errechnet sich zu

$$\begin{aligned} Q_2(x_2 = L) + N_3(x_3 = 0) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + Q_3(x_3 = 0) \cdot -\frac{1}{2} + N_5(x_5 = L) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} + Q_5(x_5 = L) \cdot -\frac{1}{2} &= 0, \\ C_{22} + C_{31} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + C_{32} \cdot -\frac{1}{2} + (C_{51} + \frac{qL}{4}) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} + (C_{52} - \frac{\sqrt{3}qL}{4}) \cdot -\frac{1}{2} &= 0, \\ -C_{21} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_{31} - \frac{1}{2}C_{32} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_{51} - \frac{1}{2}C_{52} &= 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die Momentensumme wird um den Knoten C gebildet und setzt sich aus den Momenten der drei angeschlossenen Stäben zusammen

$$\begin{aligned} -M_2(x_2 = L) + M_3(x_3 = 0) + M_5(x_5 = L) &= 0, \\ -(C_{22}L + C_{23}) + C_{33} + (C_{52}L + C_{53} - \frac{\sqrt{3}qL^2}{12}) &= 0, \\ -LC_{22} - C_{23} + C_{33} + LC_{52} + C_{53} &= \frac{\sqrt{3}qL^2}{12}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Für die Berechnung eines steifen Zusammenschluss mehrere Stäbe werden keine weiteren Gleichungen benötigt und die Zeilen 7, 8 und 9 können in die Systemmatrix 4.1 eingegliedert werden

$$\begin{array}{l} 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{51} \\ C_{52} \\ C_{53} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}qL^2}{12} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

4.3.8 Knotengleichgewicht in D

Im Vergleich zu Knoten A ist am Knoten D der Stab 5 an der Stelle $x_5 = L$ am Ende angeschlossen. Somit fällt die projizierte Belastung in das Knotengleichgewicht hinein und erzeugt einen Rechte-Seite-Vektor. Das horizontale Gleichgewicht ergibt

$$\begin{aligned} N_3(x_3 = L) \cdot -\frac{1}{2} + Q_3(x_3 = L) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} - D_n &= 0, \\ (C_{31} - \frac{\sqrt{3}qL}{4}) \cdot -\frac{1}{2} + (C_{32} + \frac{qL}{4}) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} - D_n &= 0, \\ -\frac{1}{2}C_{31} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_{32} - D_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ebenso ergibt sich das vertikale Gleichgewicht zu

$$\begin{aligned} N_3(x_3 = L) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} + Q_3(x_3 = L) \cdot \frac{1}{2} &= 0, \\ (C_{31} - \frac{\sqrt{3}qL}{4}) \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} + (C_{32} + \frac{qL}{4}) \cdot \frac{1}{2} &= 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}C_{31} + \frac{1}{2}C_{32} &= -\frac{qL}{2}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Durch die gelenkige Lagerung greift im Auflager kein Moment an und die dazugehörige Gleichung kann einfach mit

$$\begin{aligned} M_3(x_3 = L) &= 0, \\ C_{32}L + C_{33} + \frac{qL^2}{8} &= 0, \\ -C_{32}L - C_{33} + \frac{qL^2}{8} &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

formuliert werden

$$\begin{array}{l} 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{51} \\ C_{52} \\ C_{53} \end{bmatrix} + D_n \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{8} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

4.3.9 Knotengleichgewicht in E und F

Für die Knoten E und F erfolgt die Umrechnung gleich wie für den Knoten A. Dabei werden die Schnittkräfte $N_4(\alpha_4 = 0)$, $Q_4(\alpha_4 = 0)$ und $M_4(\alpha_4 = 0)$ in globale Koordinaten umgewandelt und in den Zeilen 13-15 in die Matrix eingesetzt. Die Schnittkräfte $N_5(x_5 = 0)$, $Q_5(x_5 = 0)$ und $M_5(x_5 = 0)$ werden mit den lokalen Vektoren in globale Schnittgrößen umgerechnet und in die Zeilen 16-18 in die Matrix eingegliedert.

4.3.10 Lösungsvektor

Das symbolische Lösen des linearen Gleichungssystem 4.1 ergibt den Lösungsvektor

$$\begin{array}{l}
 C_{11} \\
 C_{12} \\
 C_{13} \\
 C_{21} \\
 C_{22} \\
 C_{23} \\
 C_{31} \\
 C_{32} \\
 C_{33} \\
 C_{41} \\
 C_{42} \\
 C_{43} \\
 C_{51} \\
 C_{52} \\
 C_{53} \\
 A_n \\
 D_n \\
 E_n \\
 E_M \\
 F_n
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -2Lq \\
 -\frac{Lq}{2} \\
 0 \\
 \frac{Lq(-20+17\sqrt{3})}{48} \\
 \frac{Lq(3-20\sqrt{3})}{48} \\
 \frac{L^2q(-9+20\sqrt{3})}{48} \\
 0 \\
 \frac{Lq}{2} \\
 L^2q \\
 \frac{Lq(5\sqrt{3}+16)}{48} \\
 \frac{Lq(15+16\sqrt{3})}{48} \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{5Lq(4-\sqrt{3})}{24} \\
 -\frac{Lq}{2} \\
 -\frac{3L^2q}{2} \\
 \frac{Lq(5\sqrt{3}+16)}{24}
 \end{array}
 . \quad (4.47)$$

Die in Matrix 4.47 berechneten Integrationskonstanten werden in die zuvor definierten Schnittkraftverläufe eingesetzt und ausgewertet. Anschließend erfolgt eine grafische Darstellung der Verläufe mit dem ursprünglichen Code von Michael Gfrerer.

LITERATUR

- Gross, Dietmar, Jörg Schröder u. a. *Technische Mechanik 1: Statik*. Springer, 2019.
- Gross, Dietmar, Peter Wriggers und Werner Hauger. *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer, 2018.