

Bachelorarbeit im Studiengang Bauingenieurwissenschaften
am Institut für Baumechanik

Technische Universität Graz

Dynamische Verformungsberechnung einer Brücke infolge von Fahrzeuglasten

Dominik Kainersdorfer

Graz, 6. Oktober 2025

Betreuer: Ass.Prof.Dipl.-Ing.Dr.techn.Bsc
Michael Helmut Gfrerer

Statutory Declaration

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Graz, _____
Date

Signature

Eidesstattliche Erklärung¹

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am _____
Datum

Unterschrift

¹Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008; Genehmigung des Senates am 1.12.2008

Abstract

The aim of this bachelor thesis is to derive and solve the equations of motion for free and forced vibrations of a single-span bridge, taking into account dynamic effects resulting, for example, from the speed of the vehicle. Subsequently, visualisations are created and interpreted on the basis of specific examples. In addition, an analysis of the failure case due to a resonance catastrophe is carried out.

Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Bachelorarbeit ist die Herleitung und Lösung der Bewegungsgleichungen für freie und erzwungene Schwingungen einer einfeldrigen Brücke unter Berücksichtigung dynamischer Effekte, die beispielsweise aus der Geschwindigkeit des Fahrzeuges resultieren. Im Anschluss werden Visualisierungen anhand konkreter Beispiele erstellt und interpretiert. Zudem erfolgt eine Analyse des Versagensfalls infolge einer Resonanzkatastrophe.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
2	Herleitung der Bewegungsgleichung	3
3	Lösen der Bewegungsgleichung	5
3.1	Freie Schwingungen	5
3.2	Erzwungene Schwingungen	11
4	Anwendung und Ergebnisdarstellung	15
4.1	Material- und Querschnittswerte	15
4.2	Vergleich von statischer und dynamischer Berechnung	16
4.3	Resonanzkatastrophe	19
5	Fazit	23

1. EINLEITUNG

Für die Bestimmung des Schwingungsverhaltens einer Brücke bei der Überfahrt eines Fahrzeuges werden zunächst folgende Vereinfachungen getroffen:

- Als mechanisches System wird ein Einfeldträger gewählt.
- Die Achslast des Fahrzeuges wirkt als punktuelle Einzellast auf den Balken.
- Eine Dämpfung des Systems bleibt unberücksichtigt.

Das daraus resultierende mechanische System, welches für die weiterführende Herleitung der Bewegungsgleichung verwendet wird, ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

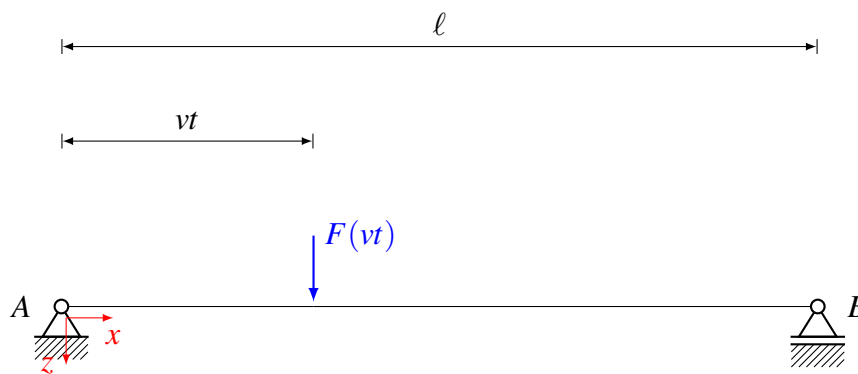


Abbildung 1.1: Mechanisches System - Einfeldträger

Der Einfeldträger weist eine Balkenlänge ℓ auf und wird im Knoten A durch ein Festlager und im Knoten B durch ein Loslager gehalten. Der Angriffspunkt der Kraft $F(vt)$ am Balken ist veränderlich und abhängig von der Geschwindigkeit v und der Fahrdauer t des Fahrzeuges.

Darüber hinaus besitzt der Balken die Dichte ρ , die Querschnittsfläche A und die Biegesteifigkeit EI_y , welche sich aus dem Elastizitätsmodul E und dem Flächenträgheitsmoment I_y zusammensetzt.

Im Zuge der nachfolgenden Kapitel wird das Anfangs-Randwertproblem für das vorliegende mechanische System für freie sowie erzwungene Schwingungen gelöst.

Die dazugehörige Bewegungsgleichung wird in Kapitel 2 hergeleitet und ergibt sich zu

$$EI_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad , \quad (1.1)$$

mit den Randbedingungen

$$w(0,t) = 0, \quad w(\ell,t) = 0, \quad M(0,t) = 0, \quad M(\ell,t) = 0 \quad \forall \quad t > 0 \quad (1.2)$$

und den Anfangsbedingungen

$$w(x,0) = w_0(x) \quad \text{und} \quad \dot{w}(x,0) = v_0(x) \quad \forall \quad x \in [0, \ell]. \quad (1.3)$$

Die in Kapitel 2 dargestellte Herleitung und die in Kapitel 3 behandelten Lösungen der freien und erzwungenen Schwingungen basieren auf den Grundlagen sowie Ansätzen aus [1] und [2].

2. HERLEITUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNG

Wie in Abbildung 2.1 zu sehen ist, wird zunächst die Kinematik eines Balkenelements betrachtet, bei dem infolge der Belastung der Balkenquerschnitt eine Verschiebung $w(x, t)$ in z -Richtung sowie eine Drehung $\psi(x, t)$ um die y -Achse erfährt.

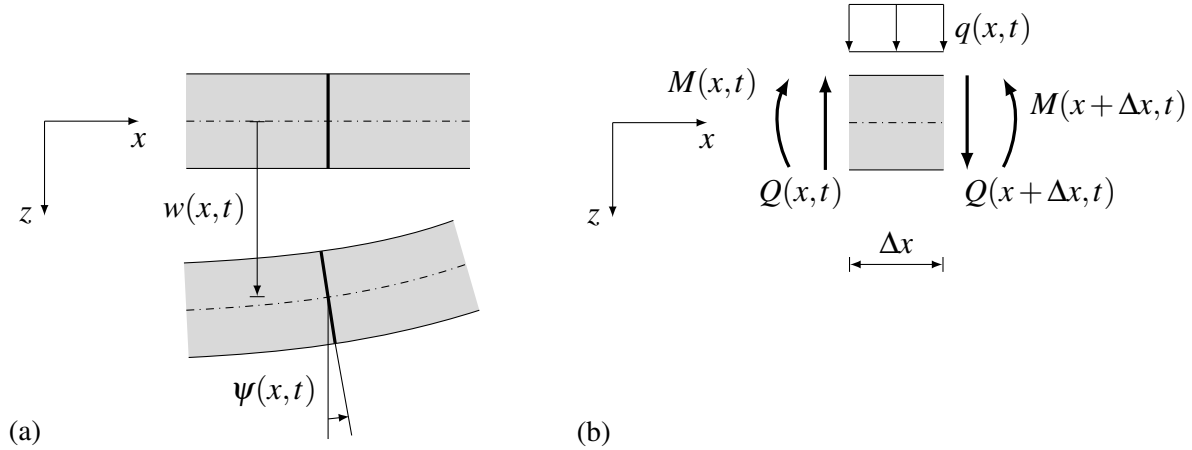


Abbildung 2.1: Kinematik (a) und Kinetik (b) eines Balkenelements

Bildet man nun den Schwerpunktsatz mit Hilfe der Kinetik aus Abbildung 2.1 an einem infinitesimalen Balkenelement, so lässt sich die Bewegungsgleichung unter Verwendung der Euler-Bernoulli Theorie (Balken verhält sich schubstarr, Querschnitte bleiben eben) und der Annahme eines gleichbleibenden Querschnittes wie folgt herleiten.

Der Schwerpunktsatz eines infinitesimalen Balkenelements in die positive z -Richtung

$$\rho A \int_{\tau=x}^{x+\Delta x} \ddot{w}(\tau, t) d\tau = -Q(x, t) + Q(x + \Delta x, t) + \int_{\tau=x}^{x+\Delta x} q(\tau, t) d\tau, \quad (2.1)$$

lässt sich durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung vereinfachen zu

$$\rho A \Delta x \ddot{w}(\tau^*, t) = -Q(x, t) + Q(x + \Delta x, t) + \Delta x q(\tau^*, t) \quad \text{mit } \tau^* \in [(x, t), (x + \Delta x, t)] . \quad (2.2)$$

Durch Bildung des Differenzenquotienten und des Grenzübergangs $\Delta x \rightarrow 0$

$$\rho A \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ddot{w}(\tau^*, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} q(\tau^*, t) \quad \text{mit } \tau^* \in [(x, t), (x + \Delta x, t)] , \quad (2.3)$$

ergibt sich die Gleichung

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + q(x,t) . \quad (2.4)$$

Der Drallsatz des Balkenelements um den Koordinatenursprung

$$\begin{aligned} \rho I_y \int_{\tau=x}^{x+\Delta x} \ddot{\psi}(\tau,t) d\tau = & -M(x,t) + M(x+\Delta x,t) - \frac{\Delta x}{2} (Q(x,t) + Q(x+\Delta x,t)) + \\ & \int_{\tau=x}^{x+\Delta x} ((x+\Delta x) - \tau) q(\tau,t) d\tau \end{aligned} \quad (2.5)$$

lässt sich analog zum Schwerpunktsatz durch Umformung und Vereinfachung wie folgt darstellen

$$\rho I_y \ddot{\psi}(\tau,t) = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - Q(x,t) . \quad (2.6)$$

Nach dem Elastizitätsgesetz gilt für das Biegemoment

$$M(x,t) = EI_y \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (2.7)$$

und für die Querkraft

$$Q(x,t) = GA_s \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \psi(x,t) \right) . \quad (2.8)$$

Unter der Annahme eines schubstarren Verhaltens ($GA_s \rightarrow \infty$) sowie einer vernachlässigbar kleinen Rotationsträgheit ($\rho I_y \rightarrow 0$), vereinfachen sich die Gleichungen (2.6) und (2.8) zu

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = Q(x,t) \quad \text{und} \quad \psi(x,t) = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} . \quad (2.9)$$

Durch zusammenführen der Gleichungen (2.9) und der Gleichung (2.7), resultiert der Zusammenhang

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -EI_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} . \quad (2.10)$$

Schlussendlich ergibt sich durch einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (2.4) die Bewegungsgleichung

$$EI_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) . \quad (2.11)$$

3. LÖSEN DER BEWEGUNGSGLEICHUNG

3.1 Freie Schwingungen

Die Bewegungsgleichung für die homogene Lösung gemäß Gleichung (2.11) mit $q(x) = 0$ lautet

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI_y} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 . \quad (3.1)$$

Gesucht wird eine Wellengleichung für harmonische Schwingungen mit Hilfe des Produktausatzes der Form

$$w(x,t) = W(x) T(t) . \quad (3.2)$$

Durch einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung (3.1), ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} T(t) + \frac{\rho A}{EI_y} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} W(x) = 0 , \quad (3.3)$$

welche sich durch umformen und Trennung der Variablen wie folgt darstellen lässt

$$\frac{1}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{\rho A}{EI_y} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} . \quad (3.4)$$

Die linke Seite der Gleichung (3.4) hängt nun von x und die rechte Seite von t ab. Daraus lässt sich schließen, dass die Gleichung nur für alle x und t erfüllt sein kann, wenn beide Seiten einer Konstanten entsprechen, welche mit κ^4 angesetzt wird.

Durch Einsetzen der zuvor beschriebenen Bedingung ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = \kappa^4 . \quad (3.5)$$

Daraus folgt die Differentialgleichung für den ortsabhängigen Teil

$$\frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \kappa^4 W(x) = 0 \quad (3.6)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$W(x) = A \cos(\kappa x) + B \sin(\kappa x) + C \cosh(\kappa x) + D \sinh(\kappa x) . \quad (3.7)$$

Analog zu den vorangegangenen Schritten folgt für den zeitabhängigen Teil die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \kappa^4 \frac{EI_y}{\rho A} T(t) = 0 . \quad (3.8)$$

Führt man nun die Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\kappa^4 \frac{EI_y}{\rho A}} \quad (3.9)$$

ein, resultiert die Darstellung

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 . \quad (3.10)$$

Die dazugehörige allgemeine Lösung lautet

$$T(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t) . \quad (3.11)$$

Zur Ermittlung der speziellen Lösung des ortsabhängigen Teils sind nun die Randbedingungen des beidseitig frei drehbar gelagerten Balkens in der Wellengleichung zu berücksichtigen, wodurch die Konstanten A, B, C und D aus Gleichung (3.7) bestimmt werden können.

Mit Hilfe des differentiellen Zusammenhangs aus Gleichung (2.7)

$$M(x, t) = -EI_y \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

und einsetzen der Randbedingungen des mechanischen Systems aus Abbildung 1.1 ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} W(0) = 0 : & \quad A + C = 0 \\ W(\ell) = 0 : & \quad A \cos(\kappa \ell) + B \sin(\kappa \ell) + C \cosh(\kappa \ell) + D \sinh(\kappa \ell) = 0 \\ W''(0) = 0 : & \quad -A + C = 0 \\ W''(\ell) = 0 : & \quad -A \cos(\kappa \ell) - B \sin(\kappa \ell) + C \cosh(\kappa \ell) + D \sinh(\kappa \ell) = 0 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\sinh(\kappa \ell) \neq 0$, können die Konstanten $A = C = D = 0$ bestimmt werden und erhält mit $B \neq 0$ die charakteristische Gleichung

$$\sin(\kappa \ell) = 0 . \quad (3.13)$$

Für die Eigenwerte bzw. für die Eigenkreisfrequenzen folgt somit der Zusammenhang

$$\kappa_k \ell = k\pi \quad . \quad (3.14)$$

Durch Umformung von Gleichung (3.9) nach κ und einsetzen in Gleichung (3.14), ergibt sich die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_k = k^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A \ell^4}} \quad \text{mit } k = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

und die Eigenfunktion

$$W_k(x) = B_k \sin(\kappa_k x) = B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \quad . \quad (3.16)$$

Die Konstante B_k in der Eigenfunktion kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B_k = 1$ gesetzt werden.

Anhand der Eigenfunktion aus Gleichung (3.16) werden Beispielhaft in Abbildung 3.1, Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3 die Eigenformen der Grundschiwingung sowie der ersten und zweiten Oberschiwingung des vorliegenden mechanischen Systems dargestellt.

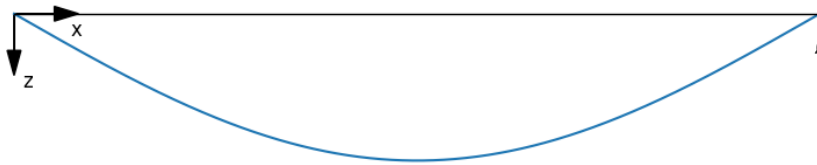


Abbildung 3.1: Grundschiwingung $W_1(x)$

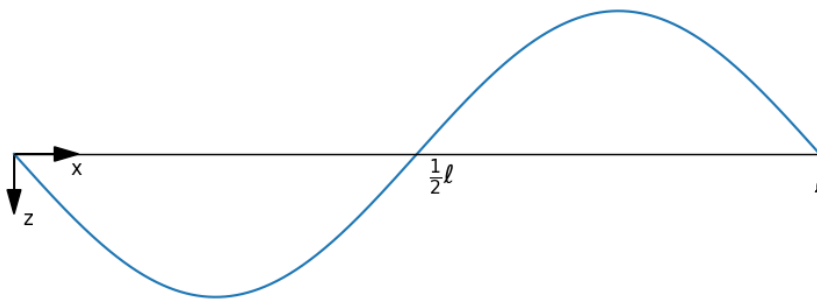
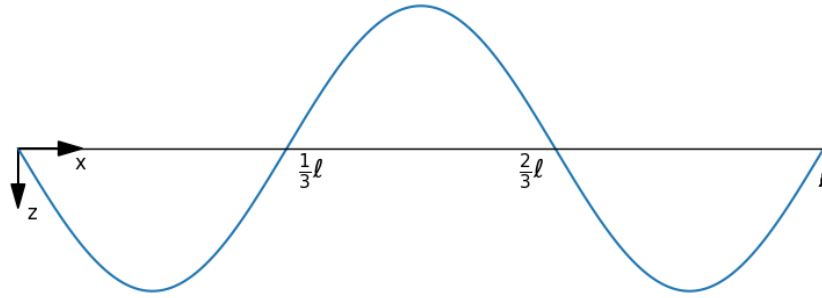


Abbildung 3.2: 1. Oberschiwingung $W_2(x)$

Abbildung 3.3: 2. Oberschwingung $W_3(x)$

Eine Eigenschwingung aus Gleichung (3.2) mit der zuvor hergeleiteten Eigenfunktion lautet somit

$$w_k(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) (E_k \cos(\omega_k t) + F_k \sin(\omega_k t)) . \quad (3.17)$$

Wie bereits aus Gleichung (3.15) hervor geht, gibt es unendlich viele Eigenschwingungen ($k = 1, 2, \dots$), die die Randbedingungen erfüllen. Da es sich bei der Differentialgleichung 3.1 um eine lineare Gleichung handelt, kann das Superpositionsprinzip angewendet werden.

Demnach ergibt sich durch Überlagerung aller Eigenschwingungen die Lösung

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) (E_k \cos(\omega_k t) + F_k \sin(\omega_k t)) \quad (3.18)$$

mit den unbekannten Koeffizienten E_k und F_k , welche mit den Anfangsbedingungen

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \text{und} \quad \dot{w}(x, 0) = v_0(x) \quad (3.19)$$

bestimmt werden können.

Durch einsetzen der Anfangsbedingungen aus (3.50) in Gleichung (3.18), resultieren die Gleichungen

$$w(x, 0) = w_0(x) : \quad \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = w_0(x) , \quad (3.20)$$

und

$$\dot{w}(x, 0) = v_0(x) : \quad \sum_{k=1}^{\infty} F_k \omega_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = v_0(x) . \quad (3.21)$$

Die Lösung lässt sich nun unter Anwendung der Orthogonalitätsrelation der Eigenfunktionen bestimmen. Hierzu werden die Gleichungen (3.20) und (3.21) mit

$$W_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (3.22)$$

multipliziert und über die Länge des Balkens integriert. Es folgen die Gleichungen

$$\int_0^{\ell} E_k \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx = \int_0^{\ell} w_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad (3.23)$$

und

$$\int_0^{\ell} F_k \omega_k \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx = \int_0^{\ell} v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx , \quad (3.24)$$

Unter Berücksichtigung der Eigenschaft (=Orthogonalitätsrelation)

$$\int_0^{\ell} W_n(x) W_k(x) dx = \int_0^{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq k \\ \frac{\ell}{2} & \text{für } n = k \end{cases} \quad (3.25)$$

können die Konstanten E_k und F_k eindeutig bestimmt werden. Diese ergeben sich zu

$$E_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} w_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx , \quad (3.26)$$

und

$$F_k = \frac{2}{\omega_k \ell} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) dx . \quad (3.27)$$

Die Substitution von Gleichung (3.26) und Gleichung (3.27) in Gleichung (3.18) liefert die Wellengleichung für harmonische Schwingungen

$$w_{frei}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left[\frac{2\cos(\omega_n t)}{\ell} \int_0^{\ell} w_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx + \frac{2\sin(\omega_n t)}{\omega_n \ell} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \right] \quad \text{mit} \quad \omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A \ell^4}} . \quad (3.28)$$

3.2 Erzwungene Schwingungen

Für die Beschreibung der erzwungenen Schwingungen des Ausgangssystems aus Kapitel 1 wird die Bewegungsgleichung (2.11)

$$EI_y \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) . \quad (3.29)$$

herangezogen.

Darüber hinaus gelten weiterhin die Randbedingungen aus Kapitel 3.1

$$w(0,t) = 0, \quad w(\ell,t) = 0, \quad M(0,t) = 0, \quad \text{und} \quad M(\ell,t) = 0 \quad (3.30)$$

sowie die Anfangsbedingungen

$$w(x,0) = 0, \quad \text{und} \quad \dot{w}(x,0) = 0 . \quad (3.31)$$

Es werden die Eigenfunktionen $W_k(x)$ aus Gleichung (3.16) für den Ansatz zur Lösung der Bewegungsgleichung

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x) T_k(t) \quad (3.32)$$

verwendet.

Aus dem Einsetzen des Ansatzes (3.32) in die Bewegungsgleichung (3.29) folgt die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} EI_y W_k^{IV}(x) T_k(t) + \rho A W_k(x) \ddot{T}_k(t) = q(x,t) . \quad (3.33)$$

Durch Anwendung der Orthogonalitätsrelation (Multiplikation mit $W_n(x)$ und Integration über die Balkenlänge)

$$\int_0^{\ell} W_n(x) \sum_{k=1}^{\infty} (EI_y W_k^{IV}(x) T_k(t) + \rho A W_k(x) \ddot{T}_k(t)) dx = \int_0^{\ell} W_n(x) q(x,t) dx \quad (3.34)$$

und Substitution von

$$W_k^{IV}(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^4 = W_k(x) \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^4 , \quad (3.35)$$

ergibt sich Gleichung (3.34) zu

$$\int_0^\ell \sum_{k=1}^{\infty} EI_y W_n(x) W_k(x) \left(\frac{k\pi}{\ell} \right)^4 T_k(t) + \rho A W_n(x) W_k(x) \ddot{T}_k(t) dx = \int_0^\ell W_n(x) q(x, t) dx . \quad (3.36)$$

Unter Verwendung der Eigenschaft aus Gleichung (3.25) folgt die Darstellung der Differentialgleichung

$$\frac{\rho A \ell}{2} \ddot{T}_n(t) + \frac{EI_y \ell}{2} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4 T_n(t) = \int_0^\ell W_n(x) q(x, t) dx . \quad (3.37)$$

Die Funktion $q(x, t)$ berücksichtigt dabei die Belastung $F(vt)$ am Ausgangssystem. Sie lässt sich mit Hilfe der Diracschen Delta-Funktion mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (3.38)$$

beschreiben.

Daraus ergibt sich für die Belastung am Ausgangssystem

$$q(x, t) = \begin{cases} F_0 \delta(x - vt) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{\ell}{v} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.39)$$

Wendet man nun die Eigenschaft aus Gleichung (3.38) auf den rechten Term der Gleichung (3.37) an und setzt die Funktion $q(x, t)$ gemäß Gleichung (3.39) ein, so ergibt sich

$$\int_0^\ell W_n(x) q(x, t) dx = \begin{cases} F_0 W_n(vt) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{\ell}{v} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.40)$$

Dementsprechend lässt sich Gleichung (3.37) durch

$$\frac{\rho A \ell}{2} \ddot{T}_n(t) + \frac{EI_y \ell}{2} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4 T_n(t) = F_0 W_n(vt) \quad \text{mit} \quad W_n(vt) = \sin \left(\frac{n\pi vt}{\ell} \right) \quad (3.41)$$

darstellen.

Durch Umformung folgt die Differentialgleichung

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{2F_0}{\rho A \ell} \sin\left(\frac{n\pi vt}{\ell}\right) \quad \text{mit} \quad \omega_n^2 = \frac{EI_y}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4. \quad (3.42)$$

Ziel ist die Lösung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die allgemeine Lösung zu Gleichung (3.42) setzt sich aus der homogenen Lösung

$$T_n^{(h)}(t) = G_n \cos(\omega_n t) + H_n \sin(\omega_n t) \quad (3.43)$$

und der partikulären Lösung

$$T_n^{(p)}(t) = \begin{cases} \frac{2F_0 \ell}{\rho A (\ell^2 \omega_n^2 - n^2 v^2 \pi^2)} \sin\left(\frac{nv\pi t}{\ell}\right) & \text{für } \omega_n \neq \frac{nv\pi}{\ell} \\ -\frac{F_0}{\rho A \ell \omega_n} t \cos(\omega_n t) & \text{für } \omega_n = \frac{nv\pi}{\ell} \end{cases} \quad (3.44)$$

zusammen.

Dies führt zur allgemeinen Lösung

$$T_n(t) = \frac{2F_0 \ell}{\rho A (\ell^2 \omega_n^2 - n^2 v^2 \pi^2)} \sin\left(\frac{nv\pi t}{\ell}\right) + G_n \cos(\omega_n t) + H_n \sin(\omega_n t). \quad (3.45)$$

Für die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten G_n und H_n werden die Anfangsbedingungen aus Gleichung (3.31) in Gleichung (3.32) eingesetzt und erhält mit dem selben Lösungsweg wie in Kapitel 3.1 die Beziehungen

$$\begin{aligned} w(x, 0) = 0: \quad 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} W_n(x) T_n(t) & \Rightarrow & T_n(0) = 0 \\ \dot{w}(x, 0) = 0: \quad 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} W_n(x) \dot{T}_n(t) & \Rightarrow & \dot{T}_n(0) = 0 \end{aligned}$$

Daraus resultieren für die allgemeine Lösung die Gleichungen

$$G_n = 0 \quad (3.46)$$

und

$$H_n = -\frac{2F_0 \ell}{\omega_n \rho A (\ell^2 \omega_n^2 - n^2 v^2 \pi^2)} \left(\frac{nv\pi}{\ell}\right). \quad (3.47)$$

Die spezielle Lösung für den Bereich $0 \leq t \leq \frac{l}{v}$ folgt somit zu

$$T_n(t) = \frac{2F_0}{\rho A (\ell^2 \omega_n^2 - n^2 v^2 \pi^2)} \left(\ell \sin\left(\frac{nv\pi t}{\ell}\right) - \frac{nv\pi}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right). \quad (3.48)$$

Für den Bereich $t \geq \frac{l}{v}$ gilt der zeitabhängige Teil der Gleichung (3.28)

$$T_n(t) = \frac{2 \cos(\omega_n t)}{\ell} \int_0^\ell w_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx + \frac{2 \sin(\omega_n t)}{\omega_n \ell} \int_0^\ell v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad (3.49)$$

mit

$$w_0(x) = w_{\text{erz.}}\left(x, \frac{l}{v}\right) \quad \text{und} \quad v_0 = \dot{w}_{\text{erz.}}\left(x, \frac{l}{v}\right). \quad (3.50)$$

Durch Substitution von Gleichung (3.16) und Gleichung (3.48) in Gleichung (3.32) resultiert für den Bereich $0 \leq t \leq \frac{l}{v}$ die Wellengleichung

$$w_{\text{erz.}}(x, t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \frac{v\ell}{\pi\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}}}}^{\infty} \frac{2F_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)}{\rho A (\ell^2 \omega_n^2 - n^2 v^2 \pi^2)} \left(\ell \sin\left(\frac{nv\pi t}{\ell}\right) - \frac{nv\pi}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) + \bar{w}(x, t) \quad (3.51)$$

mit

$$\bar{w}(x, t) = \begin{cases} \frac{F_0 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}} \sin\left(\frac{vx}{\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}}\right)}{\rho A \ell v^2} \left(\frac{\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}}{v^2} \sin\left(\frac{v^2 t}{\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}}\right) - t \cos\left(\frac{v^2 t}{\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}}\right) \right) & \text{wenn } \frac{v\ell}{\pi\sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.52)$$

4. ANWENDUNG UND ERGEBNISDARSTELLUNG

In diesem Kapitel werden die zuvor hergeleiteten Gleichungen auf konkrete Beispiele angewendet, um Rückschlüsse ziehen zu können, wie sich verschiedene Parameter wie Geschwindigkeit, Länge etc. auf das Schwingungsverhalten der Brücke auswirken.

4.1 Material- und Querschnittswerte

Die Material- und Querschnittswerte aus Abbildung 4.1 sowie Tabelle 4.1 werden für sämtliche weiteren Berechnungen und Visualisierungen herangezogen.

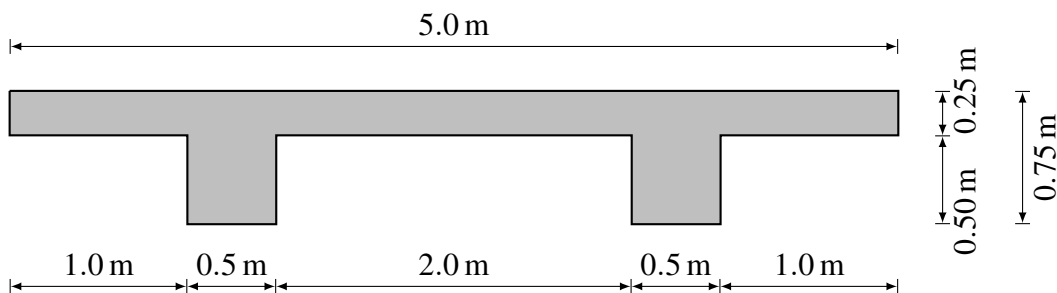


Abbildung 4.1: Querschnitt

Querschnittsfläche:	$A = 1,75 \text{ m}^2$
Flächenträgheitsmoment:	$I_y = 6715020 \text{ cm}^4 = 6.71502 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$
Rohdichte:	$\rho = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Elastizitätsmodul:	$E = 30000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 3.0 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Tabelle 4.1: Material- und Querschnittswerte

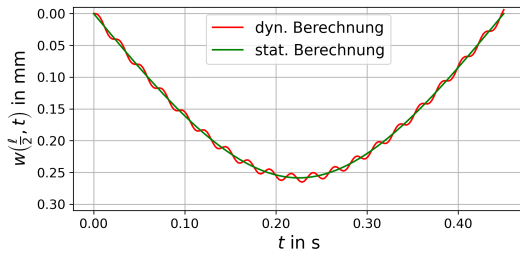
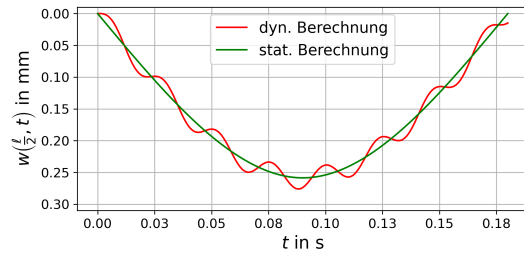
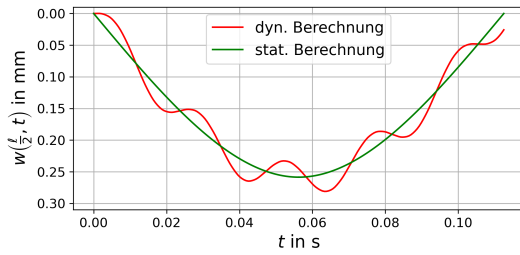
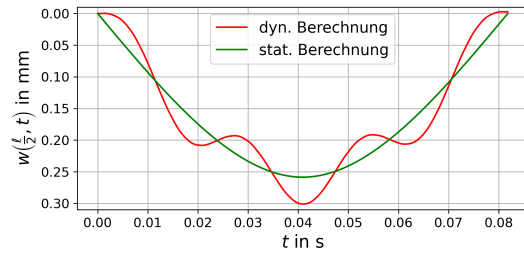
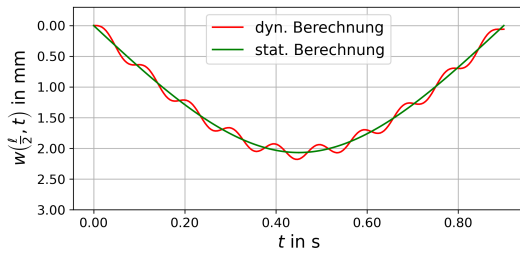
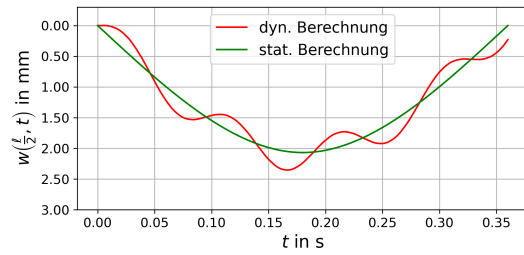
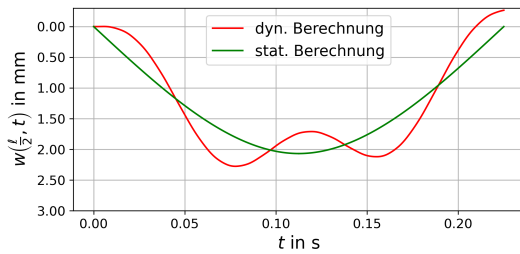
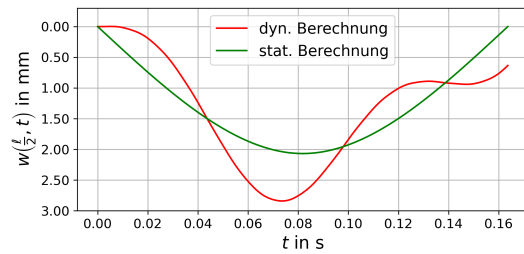
4.2 Vergleich von statischer und dynamischer Berechnung

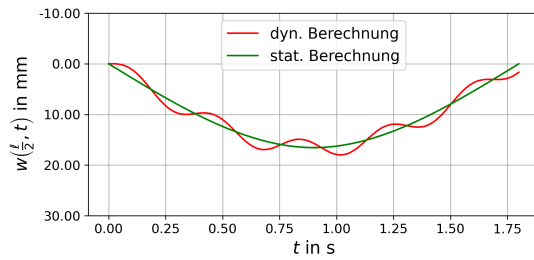
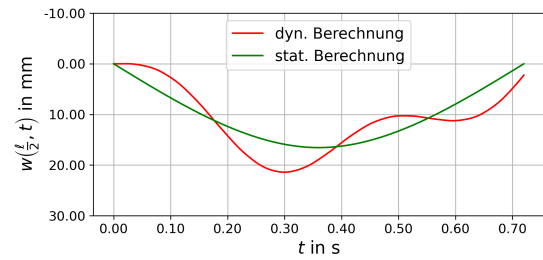
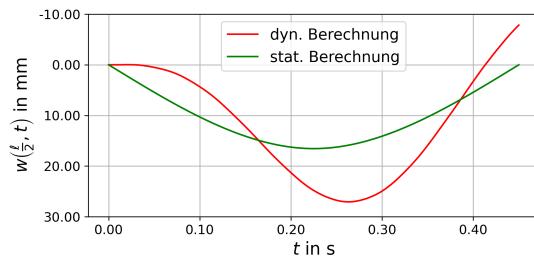
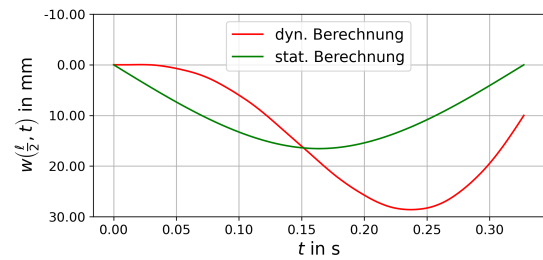
Das Schwingungsverhalten einer Brücke mit der Länge $\ell = 20$ m infolge einer Achslast eines Fahrzeuges von $F = 200$ kN wird in Abbildung 4.2 dargestellt. Die Animation ist für den Bereich $0 \leq t \leq \frac{\ell}{v}$ mit einer Überfahrtsgeschwindigkeit von $v = 160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ gültig.

Abbildung 4.2: Animation

Aus Abbildung 4.2 folgt, dass während bei der dynamischen Analyse Verschiebungen sowohl in die positive als auch in die negative z -Richtung auftreten, die statische Betrachtung lediglich eine einseitige Auslenkung aufweist. Zudem kehrt das mechanische System im statischen Fall nach der Überfahrt in seine ursprüngliche Ausgangslage zum Zeitpunkt $t = 0$ zurück. Im Gegensatz dazu verbleibt bei der dynamischen Berechnung nach der Überfahrt eine Restauslenkung, was auf ein Nachschwingen des Systems für $t > \frac{\ell}{v}$ deutet. Dabei ist jedoch zu beachten, dass in den zuvor hergeleiteten Gleichungen aus Kapitel 3 keine Dämpfung berücksichtigt wurde.

Darüberhinaus ist auch der Einfluss von Geschwindigkeit und Brückenlänge von Interesse. Hierfür wird in den Abbildungen 4.3 bis 4.5 die Verschiebung in z -Richtung an der Stelle $x = \frac{\ell}{2}$ infolge unterschiedlicher Überfahrtsgeschwindigkeiten von 40, 100, 160 und $220 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ bei Brücken mit Längen von $\ell = 5, 12$ und 20 m verglichen.

(a) $v = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (b) $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (c) $v = 160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (d) $v = 220 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Abbildung 4.3: $w(\frac{\ell}{2}, t)$ infolge v und $\ell = 5 \text{ m}$ (a) $v = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (b) $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (c) $v = 160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (d) $v = 220 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Abbildung 4.4: $w(\frac{\ell}{2}, t)$ infolge v und $\ell = 10 \text{ m}$

(a) $v = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (b) $v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (c) $v = 160 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (d) $v = 220 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Abbildung 4.5: $w(\frac{\ell}{2}, t)$ infolge v und $\ell = 20 \text{ m}$

Aus den Abbildungen 4.3 bis 4.5 lässt sich folgende Erkenntnis zum Einfluss der Überfahrtsgeschwindigkeit auf das Schwingungsverhalten ableiten:

- So zeigt Abbildung 4.4, dass eine höhere Geschwindigkeit nicht zwangsläufig zu einer größeren Auslenkung führt. Die maximale Verschiebung in Abbildung 4.4b ist beispielsweise größer als in Abbildung 4.4c, obwohl letztere eine höhere Geschwindigkeit aufweist.

Weitere aussagekräftige Schlussfolgerungen können in Bezug auf die zuvor genannten Abbildungen nicht getroffen werden.

4.3 Resonanzkatastrophe

Aus Gleichung (3.51) geht hervor, dass der Ausdruck im Nenner

$$\rho A(\ell^2 \omega_n^2 - n^2 v^2 \pi^2) \quad \text{mit} \quad \omega_n^2 = \frac{EI_y}{\rho A} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4 \quad (4.1)$$

eine zentrale Rolle im Zusammenhang mit einer möglichen Resonanzkatastrophe spielt. Insbesondere darf der Fall

$$\rho A(\ell^2 \omega_n^2 - n^2 v^2 \pi^2) = 0 \quad (4.2)$$

nicht eintreten.

Eine Resonanzkatastrophe des betrachteten mechanischen Systems hängt somit im Wesentlichen von den Material- und Querschnittswerten, der Länge der Brücke sowie der Überfahrtsgeschwindigkeit ab. Die Belastung $F(vt)$ hat hingegen keinen Einfluss auf das Auftreten dieses Zustands.

Setzt man die Eigenfrequenz ω_n in Gleichung (4.2) ein und formt nach der Geschwindigkeit v um, ergibt sich

$$v_{\text{krit.}} = \sqrt{\frac{EI_y n^2 \pi^2}{\rho A \ell^2}} \quad (4.3)$$

In Bezug auf die Material- und Querschnittswerte aus Abschnitt 4.1, einer Brückenlänge von $\ell = 20\text{m}$ sowie der ersten Eigenform ($n = 1$, da sie den größten Einfluss auf das Schwingungsverhalten hat), ergibt sich eine kritische Überfahrtsgeschwindigkeit von

$$v_{\text{krit.}} = 106,59 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 383,72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (4.4)$$

Durch Substitution von v_{krit} in Gleichung (3.51) wächst gemäß Abbildung 4.6 die Verschiebung in z -Richtung nahe diesem Bereichs gegen unendlich. Aus diesem Grund ist auch eine gesonderte Betrachtung, unter Berücksichtigung von Gleichung (3.52), für diesen speziellen Fall erforderlich.

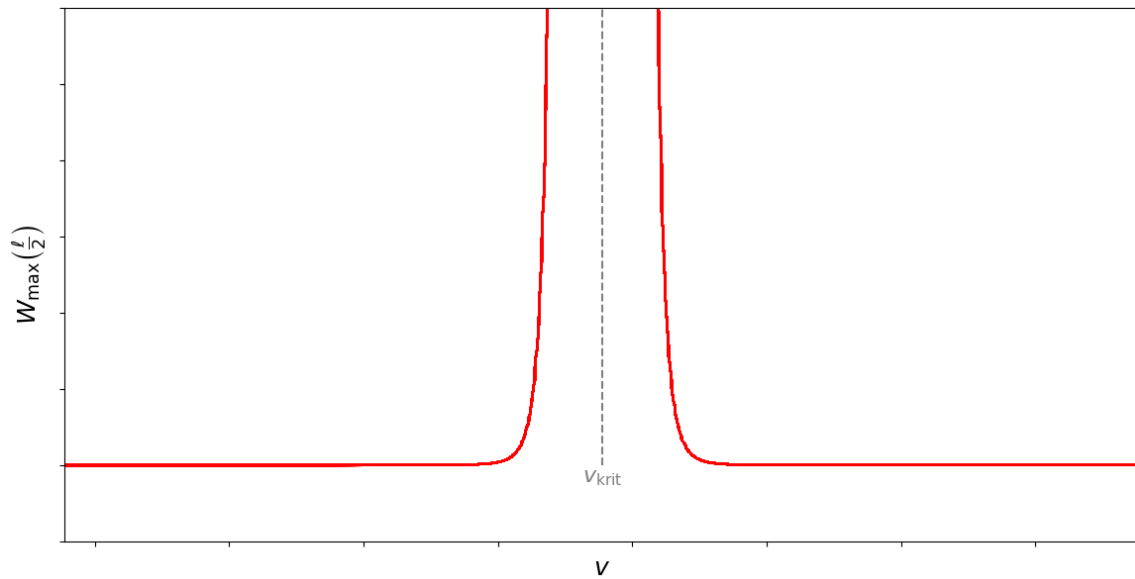


Abbildung 4.6: $w_{\max}$ im Bereich von v_{krit} . gemäß Gleichung (3.51)

Aus Abbildung 4.7 folgt, dass durch die korrekte Anwendung von Gleichung (3.51) und Gleichung (3.52) eine einzelne Überfahrt mit der kritischen Geschwindigkeit v_{krit} keine Gefahr für das mechanische System aus Abbildung 1.1 darstellt.

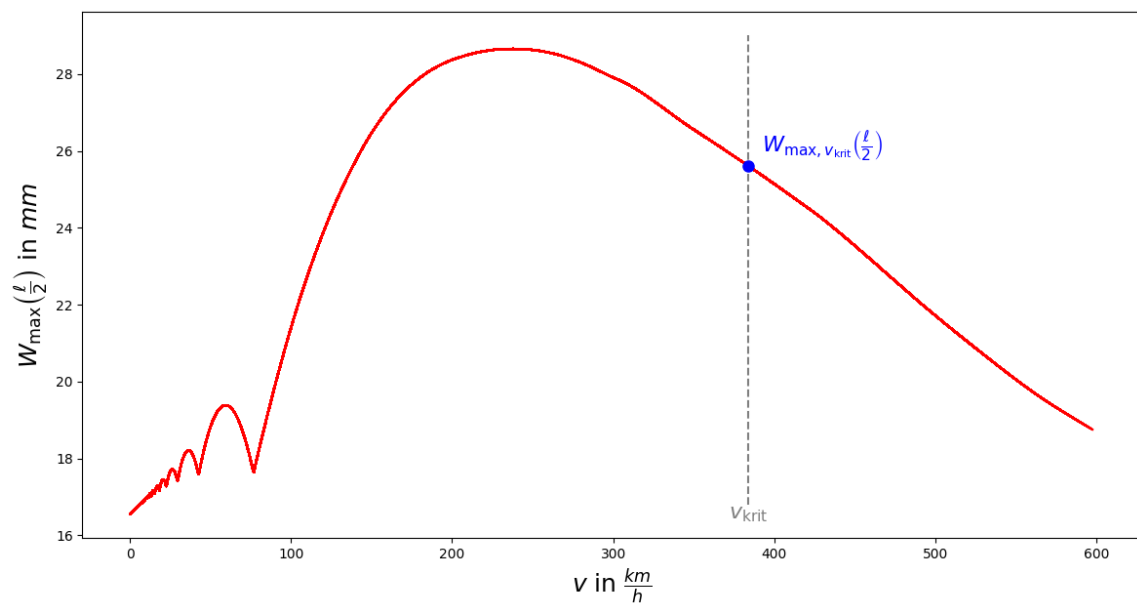


Abbildung 4.7: $w_{\max}(\frac{\ell}{2})$ infolge von unterschiedlichen Geschwindigkeiten v

Lediglich im idealisierten Fall bei der Überfahrt eines langen Güterzugs mit der Geschwindigkeit v_{krit} wächst die Verschiebung in z -Richtung weiter an, wenn die durch die Achsfolgen erzeugte Anregung die Eigenfrequenz der Brücke trifft. Der Achsabstand müsste somit mit der Periodendauer übereinstimmen, damit sich die Beiträge bis hin zu einer Resonanzkatastrophe addieren.

Die Periodendauer T lässt sich mit der Gleichung

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{mit} \quad \omega_n = \frac{nv\pi}{\ell} \quad (4.5)$$

bestimmen.

Durch Multiplikation mit der Überfahrtsgeschwindigkeit ergibt sich für das vorliegende Beispiel ein Achsabstand von 40 m, welcher stark von realitätsnahen Abständen abweicht.

5. FAZIT

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Bewegungsgleichungen einer einfeldrigen Brücke für freie und erzwungene Schwingungen hergeleitet und gelöst. Auf dieser Grundlage konnte das Schwingungsverhalten infolge einer Fahrzeugüberfahrt untersucht und wesentliche Unterschiede bezüglich des Verformungsverhaltens sowie der maximalen Verschiebung zwischen statischer und dynamischer Betrachtung aufgezeigt werden.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass Faktoren wie z.B. Geschwindigkeit und Brückenlänge das Schwingungsverhalten wesentlich beeinflussen können. Dabei ist insbesondere der Resonanzfall von Bedeutung, bei dem sich Anregung und Eigenfrequenz überlagern und unter speziellen Umständen zu stark erhöhten Auslenkungen führen können. Auch wenn dieser Fall in der Praxis selten auftritt, verdeutlicht er die Notwendigkeit einer dynamischen Betrachtung.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass dynamische Effekte einen wesentlichen Einfluss auf das Tragverhalten von Brücken haben. Für weiterführende Untersuchungen erscheint es zudem sinnvoll, die Dämpfung des Systems zu berücksichtigen, um realitätsnähere Aussagen über das Schwingungsverhalten treffen zu können.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Dietmar Gross, Werner Hauger, Jörg Schröder, and Wolfgang A. Wall. Technische Mechanik 2. *Elastostatik*, 14.Auflage:96–100, 2023.
- [2] Dietmar Gross, Werner Hauger, and Peter Wriggers. Technische Mechanik 4. *Hydro-mechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*, 11.Auflage:230–262, 2023.