Institute of
Applied Mechanics
Institut für Baumechanik

TU Graz
Graz University of Technology

Bachelorarbeit im Studiengang Bauingenieurwissenschaften
am Institut für Baumechanik

Technische Universität Graz

Dynamische Berechnung von Fachwerken

Untersuchung einer Modellierungsvariante für die dynamische Berechnung von Fachwerken

Dominik Gartner

Graz, 12. Juli 2021

Betreuer: Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael Gfrerer BSc.

Statutory Declaration

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

Graz, ______________________________ ______________________________

Date Signature

Eidesstattliche Erklärung[1]

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am ______________________________ ______________________________

Datum Unterschrift

[1] Beschluss der Curricula-Kommission für Bachelor-, Master- und Diplomstudien vom 10.11.2008; Genehmigung des Senates am 1.12.2008

Abstract

The aim of this bachelor thesis is to cover a dynamic calculating model for truss structures. This method allows to calculate and plot, the movement and deflection, the variation in length as well as the forces within the truss members, with the assistance of matlab. The assumptions taken, like the linearization of the movement and the concentration of the element masses in the nodes, and the resulting model are depicted in the following thesis. The input of the truss parameters such as nodes, elements or bearings and the solution procedure of the resulting system of differntial equations take place in a Matlab script which also generates the wanted figures and animations and saves them as png, pdf or avi-video format. In order to demonstrate and review the implemented method, three examples are calculated and then compared to the solutions of other modells.

Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit wird eine dynamische Modellierungsvariante von Fachwerken behandelt. Diese ermöglicht es unter Zuhilfenahme von Matlab die Bewegung und damit einhergehende Durchbiegung sowie die linearisierte Längenänderung der Fachwerksstäbe und damit die Kraft in den Stäben von Fachwerken zu ermitteln und in Abbildungen und Animationen darzustellen. Die dabei getroffenen Annahmen, wie die Linearisierung der Bewegung und die Konzentration der Stabmassen in den Knoten, sowie das dadurch entstandene Modell werden im Folgenden dargestellt. Die Eingabe der Systemparameter und die nachfolgende Lösung des entstehenden Systems von Differntialgleichungen erfolgt über ein Matlab Script, welches dann die gewünschten Abbildungen und Animationen erzeugt und als png, pdf oder avi-Video sichert. Zur Veranschaulichung und Überprüfung der dargestellten Modellierungsvariante werden abschließend drei Beispiele gerechnet und mit Lösungen einer anderen Betrachtung verglichen.

INHALTSVERZEICHNIS

1 Einleitung **1**

2 Mechanisches Modell **3**

3 Lösung des Gleichungssystems **9**

4 Funktionen **11**
4.1 Massematrix 11
4.2 Belastungsfunktion Beispiel 2 12

5 Beispiele **15**
5.1 Beispiel 1 15
5.2 Beispiel 2 20
5.3 Beispiel 3 28

6 Conclusio **35**

1. EINLEITUNG

Dieses Bachelorprojekt hat das Ziel eine Modellierungsvariante für die dynamische Berechnung von Fachwerken zu untersuchen. Dabei werden Fachwerke als Systeme von Massenpunkten betrachtet, wobei die Massen der Stäbe als in den Knoten konzentriert angenommen werden. Ein Fachwerk besteht hierbei aus Stäben, die beidseitig gelenkig an einen Knoten angeschlossen sind. Die aus der Trägheit der Stäbe resultierenden Biegemomente und Querkräfte in den Stäben werden bei dieser Variante vernachlässigt. Hierdurch herrschen in den Stäben, wie bei statischen Berechnungen üblich, nur mehr Druck- oder Zugnormalkräfte.

2. MECHANISCHES MODELL

Die als in dem jeweiligen Knoten i als konzentriert angenommene Masse der angeschlossenen Stäbe folgt zu m_i. Als $\mathbf{x}_i$ wird der Ortsvektor des betrachteten Knoten i bezeichnet. Dabei ist zu beachten dass $\mathbf{x}_i$ eine vektorielle Größe darstellt. Die zweifache Ableitung nach der Zeit, beziehungsweise die Beschleunigung des Knoten i stellt sich als $\ddot{\mathbf{x}}_i$ dar.
Die Bewegungsgleichung des Knoten i ergibt sich damit zu

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}_i = \sum \mathbf{F}_i, \tag{2.1}$$

wobei $\sum \mathbf{F}_i$ die vektorwertige Summe der angreifenden Kräfte ist, welche sich aus den von Außen auf das System, beziehungsweise den Knoten wirkenden Kräften $\mathbf{F}_{i,ext}$, den inneren Kräften des Systems $\mathbf{F}_{i,int}$, welche aus den in den an den Knoten i angeschlossenen Stäben herrschenden Druck- oder Zugkräften resultieren sowie aus der Gewichtskraft der im den Knoten i konzentrierten Masse $m_i g$ zusammensetzt.
Hierbei ist anzumerken dass der Gewichtskraft $m_i g$ nur bei der Betrachtung der statischen Ruhelage Beachtung geschenkt werden muss, diese allerdings für die dynamische Betrachtung einer Schwingung nicht von Relevanz ist.
Würde man das Gesamtsystem betrachten, würde sich aus

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_{i,ext} + \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{i(j),int} = \sum_i \mathbf{F}_{i,ext}, \tag{2.2}$$

wegen $\mathbf{F}_{i(j),int} = -\mathbf{F}_{j(i),int}$ und damit $\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{i(j),int} = \mathbf{0}$ ergeben. [1, Kapitel 3.1] Wobei ein Knoten j ein mit dem betrachteten Knoten i über einen Stab verbundener Knoten ist. Das bedeutet, dass sich bei der Betrachtung eines Systems von Massenpunkten, die inneren, aus Verbindungen der Massenpunkte resultierenden Kräfte aufgrund ihrer entgegengesetzten Wirkungsrichtung aufheben. *„Das lässt sich auch auf das 3. Newton'sche Grundgesetz zurückführen: "Die Kraft $\mathbf{F}_{ij}$, die ein Körper ⓘ auf einen anderern Körper ⓙ ausübt ist gleich groß oder entgegengesetzt gerichtet zur Kraft $\mathbf{F}_{ji}$, mit der der Körper ⓙ auf den Körper ⓘ wirkt. $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ Beziehungsweise actio = reactio.“* [1, Kapitel 2.3]
Im Weiteren werden die system-inneren Stabkräfte $F_{i(j)}$ mit dem Index F_k bezeichnet. Die Kraft F_k welche durch die Normalkraft im jeweiligen Stab k dargestellt wird ergibt sich aus

$$F_k = \frac{E_k A_k}{L_k} \Delta u_k, \tag{2.3}$$

mit

$$E_k = Elastizitätsmodul, \tag{2.4}$$
$$A_k = Querschnittsfläche, \tag{2.5}$$
$$L_k = Auslangslänge, \tag{2.6}$$
$$\Delta u_k = aktuelle\,Länge\,l_k - Ausgangslänge\,L_k, \tag{2.7}$$

des betrachteten Stabes k.
Die exakte Längenänderung Δu_k ergibt sich aus

$$\Delta u_k = |(\mathbf{x}_{k,End} - \mathbf{x}_{k,Start})| - |(\mathbf{X}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,Start})|, \tag{2.8}$$

dabei ist $\mathbf{x}_{k,Start}$ die vektorwertige Position des Startknotens des Stabes k zum Zeitpunkt t und $\mathbf{x}_{k,End}$ die vektorwertige Position des Endknotens des Stabes k zum Zeitpunkt t. $\mathbf{X}_{k,Start}$ / $\mathbf{X}_{k,End}$ sind die vektorwertigen Positionen des Start-/ bzw. Endknotens des Stabes k zum Startzeitpunkt $t = 0$. Die Funktion Δu_k hat somit 2 von der Zeit abhängige Variablen $\mathbf{x}_{k,Start}$ und $\mathbf{x}_{k,End}$.
Die Taylorreihenentwicklung in 2 Variablen ergibt sich zu [3]

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + (f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)) \\ +\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2) \\ +\ldots+\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\delta^n f}{\delta_x^{n-j}\delta_y^j}(x_0,y_0)(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dabei ist $f_x(x_0,y_0)$ die partielle Abletung der Funktion $f(x,y)$ nach x abgeleitet an der Stelle (x_0,y_0). Infolge der vektoriellen Betrachtung wird anstelle der partiellen Ableitung der Gradient $f_{\mathbf{x}}$ eingeführt, welcher aus den Komponenten $\begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \end{pmatrix}$ besteht.
Bricht man die Gleichung (2.9) nach dem zweiten, linearen Term ab und setzt die entsprechenden Variablen sowie die Entwicklungsstelle $\mathbf{x}_{Start}(t=0) = \mathbf{X}_{Start}$, $\mathbf{x}_{End}(t=0) = \mathbf{X}_{End}$ ein ergibt sich die linearisierte Taylorreihenentwicklung zu

$$\begin{aligned} f_{lin}(\mathbf{x}_{k,Start},\mathbf{x}_{k,End}) = f(\mathbf{X}_{k,Start},\mathbf{X}_{k,End}) + (f_{\mathbf{x}_{k,Start}}(\mathbf{X}_{k,Start},\mathbf{X}_{k,End})(\mathbf{x}_{k,Start} - \mathbf{X}_{k,Start}) \\ +f_{\mathbf{x}_{k,End}}(\mathbf{X}_{k,Start},\mathbf{X}_{k,End})(\mathbf{x}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,End})). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Setzt man in die Gleichung (2.10) nun die Zusammenhänge

$$f(\mathbf{X}_{k,Start},\mathbf{X}_{k,End}) = \mathbf{0}, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{x}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,End} = \mathbf{u}_{k,End}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{x}_{k,Start} - \mathbf{X}_{k,Start} = \mathbf{u}_{k,Start} \tag{2.13}$$

und die partiellen Ableitungen

$$f_{\mathbf{x}_{k,Start}} = -\frac{\mathbf{x}_{k,End} - \mathbf{x}_{Start}}{|\mathbf{x}_{k,End} - \mathbf{x}_{k,Start}|}, \tag{2.14}$$

$$f_{\mathbf{x}_{k,End}} = \frac{\mathbf{x}_{k,End} - \mathbf{x}_{k,Start}}{|\mathbf{x}_{k,End} - \mathbf{x}_{k,Start}|}, \tag{2.15}$$

mit der Entwicklungsstelle $\mathbf{X}_{k,Start}, \mathbf{X}_{k,End}$ ein, erhält man

$$f_{lin}(\mathbf{x}_{k,Start}, \mathbf{x}_{k,End}) = \Delta u_{k,lin} = -\frac{\mathbf{X}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,Start}}{|\mathbf{X}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,Start}|}\mathbf{u}_{k,Start} + \frac{\mathbf{X}_{k,Start} - \mathbf{X}_{k,Start}}{|\mathbf{X}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,Start}|}\mathbf{u}_{k,End}. \tag{2.16}$$

Damit errechnet sich die linearisierte Längenänderung $\Delta u_{k,lin}$ zu

$$\Delta u_{k,lin} = \frac{(\mathbf{u}_{k,End} - \mathbf{u}_{k,Start}) \cdot (\mathbf{X}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,Start})}{|\mathbf{X}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,Start}|} = (\mathbf{u}_{k,End} - \mathbf{u}_{k,Start}) \cdot \mathbf{T}_k, \tag{2.17}$$

mit

$$\mathbf{X}_{k,End} = \mathbf{x}_{k,End}(t = 0), \tag{2.18}$$
$$\mathbf{X}_{k,Start} = \mathbf{x}_{k,Start}(t = 0), \tag{2.19}$$
$$\mathbf{u}_{k,End} = \mathbf{x}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,End}, \tag{2.20}$$
$$\mathbf{u}_{k,Start} = \mathbf{x}_{k,Start} - \mathbf{X}_{k,Start} \tag{2.21}$$
$$\mathbf{T}_k = \frac{\mathbf{X}_{k,Start} - \mathbf{X}_{k,Start}}{|\mathbf{X}_{k,End} - \mathbf{X}_{k,Start}|}. \tag{2.22}$$

$\mathbf{T}$ ist der Einheitsvektor des Stabes k zum Zeitpunkt $t = 0$.
Aus dem Zusammenhang

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t) \tag{2.23}$$

ergibt sich nach zweimaligen Ableiten nach der Zeit die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{u}}(t). \tag{2.24}$$

Setzt man nun Gleichung (2.24) in Gleichung (2.1) ein und schreibt dies in Matrix-Vektor Schreibweise für n-Knoten an erhält man für ein ebenes System

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_n & \\ & & & & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{1,x} \\ \ddot{u}_{1,y} \\ \vdots \\ \ddot{u}_{n,x} \\ \ddot{u}_{n,y} \end{bmatrix} = \sum \mathbf{F}, \tag{2.25}$$

mit der Massematrix $\mathbf{M}$ mal dem Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{u}}$ und der Summe aller Kräfte auf der anderen Seite der Gleichung. *Anmerkung: für ein 3-dimensionales Fachwerk wäre dies ein weiterer Eintrag für die Masse eines Knotens i in der Hauptdiagonale und $u_{i,z}$ im Beschleunigungsvektor.*
Setzt man Gleichung (2.17) in Gleichung (2.3) ein ergibt sich in Matrixschreibweise

$$F_k = \frac{E_k A_k}{L_k} \begin{bmatrix} -T_{k,x} & -T_{k,y} & T_{k,x} & T_{k,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,Start,x} \\ u_{k,Start,y} \\ u_{k,End,x} \\ u_{k,End,y} \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Aus Gleichung (2.3) bzw. (2.26) ergibt sich die Gesamtkraft im Stab jedoch nur als skalare Größe. Um im Weiteren damit rechnen zu können ist es jedoch von Vorteil diese als vektorwertige Größe darzustellen. Dies geschieht durch Multiplikation von F_k mit dem Einheitsvektor $\mathbf{T}_k$ aus (2.22) und es folgt der Zusammenhang

$$F_k \mathbf{T}_k = \mathbf{F}_k. \tag{2.27}$$

Die vektorwertige Kraft $\mathbf{F}_k$ ergibt sich somit durch einsetzen von (2.26) in (2.27) zu

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} F_{k,x} \\ F_{k,y} \end{bmatrix} = \frac{E_k A_k}{L_k} \begin{bmatrix} -T_{k,x} & -T_{k,y} & T_{k,x} & T_{k,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,Start,x} \\ u_{k,Start,y} \\ u_{k,End,x} \\ u_{k,End,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{k,x} \\ T_{k,y} \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Multipliziert man $\begin{bmatrix} -T_{k,x} & -T_{k,y} & T_{k,x} & T_{k,y} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} T_{k,x} \\ T_{k,y} \end{bmatrix}$ aus Gleichung (2.28) liefert dies die Transformationsmatrix der Form

$$\begin{bmatrix} -T_{k,x}^2 & -T_{k,x}T_{k,y} & T_{k,x}^2 & T_{k,x}T_{k,y} \\ -T_{k,x}T_{k,y} & -T_{k,y}^2 & T_{k,x}T_{k,y} & T_{k,y}^2 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Für das weitere Vorgehen wird ein Vektor der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k,Start} \\ \mathbf{F}_{k,End} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

benötigt. Dabei gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{k,Start} &= \mathbf{F}_k \\ \mathbf{F}_{k,End} &= -\mathbf{F}_k \end{aligned}, \tag{2.31}$$

was eingesetzt in Gleichung (2.30)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k,Start} \\ \mathbf{F}_{k,End} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k,x} \\ F_{k,y} \\ -F_{k,x} \\ -F_{k,y} \end{bmatrix} = \frac{E_k A_k}{L_k} \begin{bmatrix} -T_{k,x}^2 & -T_{k,x}T_{k,y} & T_{k,x}^2 & T_{k,x}T_{k,y} \\ -T_{k,x}T_{k,y} & -T_{k,y}^2 & T_{k,x}T_{k,y} & T_{k,y}^2 \\ T_{k,x}^2 & T_{k,x}T_{k,y} & -T_{k,x}^2 & -T_{k,x}T_{k,y} \\ T_{k,x}T_{k,y} & T_{k,y}^2 & -T_{k,x}T_{k,y} & -T_{k,y}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,Start,x} \\ u_{k,Start,y} \\ u_{k,End,x} \\ u_{k,End,y} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

ergibt und damit einen Vektor darstellt der zum einen die Kraft am Anfang des Stabes k als ersten und zweiten Eintrag enthält, als auch die Kraft am Ende des Stabes k als dritten und vierten Eintrag. Wobei zu beachten ist dass die Kräfte von Stabanfang und Stabende eine entgegengesetzte Wirkungsrichtung haben.
In Gleichung (2.32) steht nun aber die negative Transformationsmatrix, erkenntlich an den

negativen Vorzeichen in der Hauptdiagonale. Betrachtet man allerdings Gleichung (2.1) und schreibt die Summe auf der rechten Seite aus ergibt sich diese für einen Knoten i zu

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_{i,ext} + \mathbf{F}_{i,int}, \tag{2.33}$$

wobei sich die inneren Kräfte $\mathbf{F}_{i,int}$ wie weiter oben beschrieben aus den Stabkräften ergeben. Für die weitere Berechnung ist es allerdings erforderlich dass die inneren Kräfte auf der anderen, linken Seite der Gleichung stehen, wodurch sich das Vorzeichen dieser und damit der Transformationsmatrix umkehrt.
Die in Gleichung (2.32) ersichtliche Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{s}$, welche sich aus der Transformationsmatrix und der Stabsteifigkeit ergibt, beschreibt die Steifigkeit des betrachteten Stabes k. Will man die für das Lösen des Systems benötigte Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ ermitteln, ist es nötig die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen zu Assemblieren.

> *„Die praktische Assemblierung der Steifigkeitsmatrix erfolgt durch direkte Addition der Elemente der Elementsteifigkeitsmatrizen zu den entsprechenden Elementen der Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur.*
> *Eigenschaften:*
>
> - *Aus der Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen der Stabelemente folgt, dass auch die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur symmetrisch ist.*
> - *Die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur ist in der Regel dünn besetzt, d.h. jede Spalte enthält nur wenige Elemente, die von null verschieden sind." [4, Seite 10-12]*

Setzt man (2.32) in (2.25) ein, erhält man eine Gleichung in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{ext}, \tag{2.34}$$

wobei hier $\mathbf{M}$ die Massematrix, $\ddot{\mathbf{u}}$ der Beschleunigungsvektor, $\mathbf{K}$ die Gesamtsteifigkeitsmatrix, $\mathbf{u}$ der Weggrößenvektor und $\mathbf{F}_{ext}$ der Belastungsvektor ist. Gleichung (2.34) stellt das Gleichungssystem für N Gleichungen dar. Würde man nur eine der N Gleichungen betrachten würde sich diese zu

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i \tag{2.35}$$

ergeben, wobei $\mathbf{f}_i$ die gesamten auf den Knoten wirkenden Kräfte sind.

3. LÖSUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS

Die Lösung des entstanden Systemes von Differentialgleichungen erfolgt über Matlab. Dabei wird der Algorithmus „ode45"(ordinary differntial equation 45) angewandt. Dieser löst eine gewöhnliche DGL erster Ordnung der Form

$$A(t)\dot{x}(t) = b(t), \tag{3.1}$$

basierend auf einem expliziten Runge-Kutta Verfahren. Um eine DGL 2.Ordnung lösen zu können wird der Zusamenhang $v = \dot{u}$ eingeführt und $\dot{x}$ als Vektor mit den Komponenten $\dot{v}$ und $\dot{u}$ definiert. Damit ergibt sich $\dot{x}$ zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Eingesetzt in Gleichung (2.34) ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

welches den oben gennnten Zusammenhang beschreibt und eine Lösung mit ode45 zu ermöglichen.

4. FUNKTIONEN

4.1 Massematrix

Um die Massematrix **M** zu berechnen ist es zuerst nötig die Massen der einzelnen Knoten zu kennen. Diese erhält man durch Addition der Hälfte der Massen der jeweiligen an den Stab angeschlossen Stäbe, da ja nur die Hälfte der Massen der betrachteten Stäbe auch auf den jeweiligen Knoten wirken. Das Zusammenstellen der Matrix erfolgt über zwei in Matlab implementierte Funktionen. Die erste Funktion errechnet die Hälfte der Stabmassen (`dg_get_mi`). Die zweite Funktion addiert die durch `dg_get_mi` errechneten Stabmassen mit den zugehörigen Einträgen der Massematrix, der an den betrachteten Stab angeschlossen Knoten (`dg_get_M`).

```matlab
function [M] = dg_get_M(roh,A,elements,nodes)
%Erzeugt Massematrix
%   Erzeugt spare Matrix mit 2xi Eintragen und besetzt diese ...
    durch Addition mit den halben Stabmassen
M = zeros(length(nodes)*2,1);
mx =zeros(length(nodes)*2,1);
for s= 1:length(elements)
    mx(elements(s,1)*2-1) = dg_get_mi(s,roh,A,elements,nodes);
    mx(elements(s,1)*2) = dg_get_mi(s,roh,A,elements,nodes);
    mx(elements(s,2)*2-1) = dg_get_mi(s,roh,A,elements,nodes);
    mx(elements(s,2)*2) = dg_get_mi(s,roh,A,elements,nodes);
    M = M + mx;
    mx = zeros(length(nodes)*2,1);
end
M=spdiags(M,0,length(nodes)*2,length(nodes)*2);
```

```matlab
function [m] = dg_get_mi(v,roh,A,elements,nodes)
%Errechnet die halbe Stabmasse
t = nodes(elements(v,2),:)-nodes(elements(v,1),:);
l = norm(t);
m = l .* roh(v) .* A(v) /2;
end
```

4.2 Belastungsfunktion Beispiel 2

In Beispiel 2 wird, um die Überfahrt eines Zuges zu simulieren, eine von der Zeit abhängige Belastungsfunktion benötigt, welche die Lasten der Zugachsen linear den an die Stäbe der Fahrbahn angrenzenden Knoten zuteilt. Abbildung 4.1 zeig den Verlauf dieser Funktion für einen Knoten i. Dabei steigt diese Last, mit welcher der Knoten i beaufschlagt wird sobald die Achse den Knoten $i-1$ passiert linear an, bis zum Zeitpunkt an dem die Achse über dem Knoten i steht und die gesamte Last an diesen Knoten übertragen wird. Danach fällt die Last wieder linear ab bis die Achse den Knoten $i+1$ passiert. Dies wird durch die Funktion $f_1^i(t)$ und $f_2^i(t)$ beschrieben welche zu den Zeitpunkten vor der Überquerung von Knoten $i-1$ bzw. nach der Überquerung von Knoten $i+1$ gleich 0 sind und dazwischen wie im nachfolgenden Matlab-Code zu sehen den linearen An- und Abstieg darstellen. x_0 beschreibt den Abstand der betrachteten Achse des Zuges bis zum Knoten $i-1$. y_0 ist ein Vektor der die Abstände der Zugachsen zu der ersten Achse beinhaltet. Der Zeitpunkt an dem die Ache den Knoten $i-1$ überfährt ist gleich dem Zeitpunkt $\frac{x_0}{v}$. Bei gleichen Knotenabständen überfährt die Achse $\frac{l}{v}$ später den nächsten Knoten i und $\frac{2l}{v}$ später den übernächsten Knoten $i+1$. Die in den Gleichungen (4.1) und (4.2) verwendete Funktion $H(x)$ stellt die Heaviside-Funktion dar welche bei $x<0$ 0 und bei $x\geq 0$ 1 zurückgibt. Dadurch wird F in den Gleichungen (4.1) und (4.2), außer in den Bereichen $\frac{x_0}{v}\leq t<\frac{x_0+l}{v}$ für (4.1) und $\frac{x_0+l}{v}\leq t<\frac{x_0+2l}{v}$ für (4.2) mit 0 multipliziert was zum in Abbildung 4.1 dargestellten Verlauf der Funktionen führt.

$$f_1^i(t)=F\left(\frac{v}{l}t-\frac{x_0}{l}\right)\left(H\left(t-\frac{x_0}{v}\right)-H\left(t-\frac{x_0+l}{v}\right)\right) \tag{4.1}$$

$$f_2^i(t)=F\left(-\frac{v}{l}t+2+\frac{x_0}{l}\right)\left(H\left(t-\frac{x_0+l}{v}\right)-H\left(t-\frac{x_0+2l}{v}\right)\right) \tag{4.2}$$

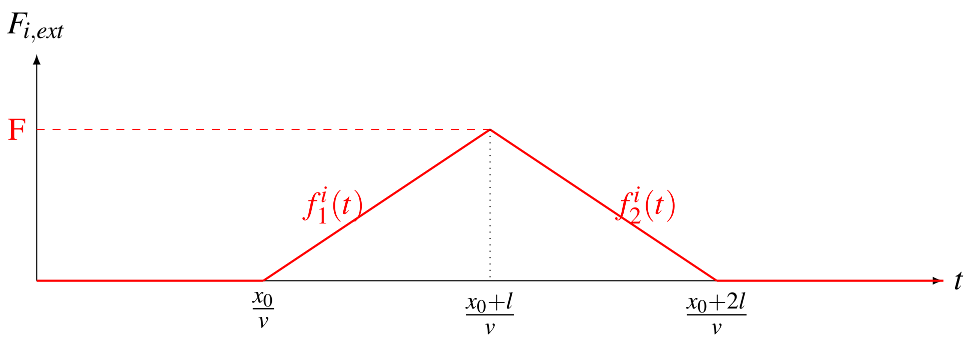

Abbildung 4.1: Funktion für einen Knoten i

```
function [Load] = loadbridge(L,y0,v,F,t,nodes)
%Lastfuktion Brucke
%   Erstellt die von t abhangige Belastung fur das Beispiel 2, ...
    Brucke.
Load = zeros(numel(nodes),1);
for y=1:length(y0)
    for i=2:4
        x0=(i-2)*L+y0(y);
        f_1=(v*t/L-x0/L)*F*(heaviside(t-x0/v)-heaviside(t-(x0+L)/v))
        f_2=(-v*t/L+(1+(x0+L)/L))*F ...
            *(heaviside(t-(x0+L)/v)-heaviside(t-(x0+2*L)/v))
        Load(2*i) = Load(2*i)+f_1+f_2;
    end
end
end
```

5. BEISPIELE

5.1 Beispiel 1

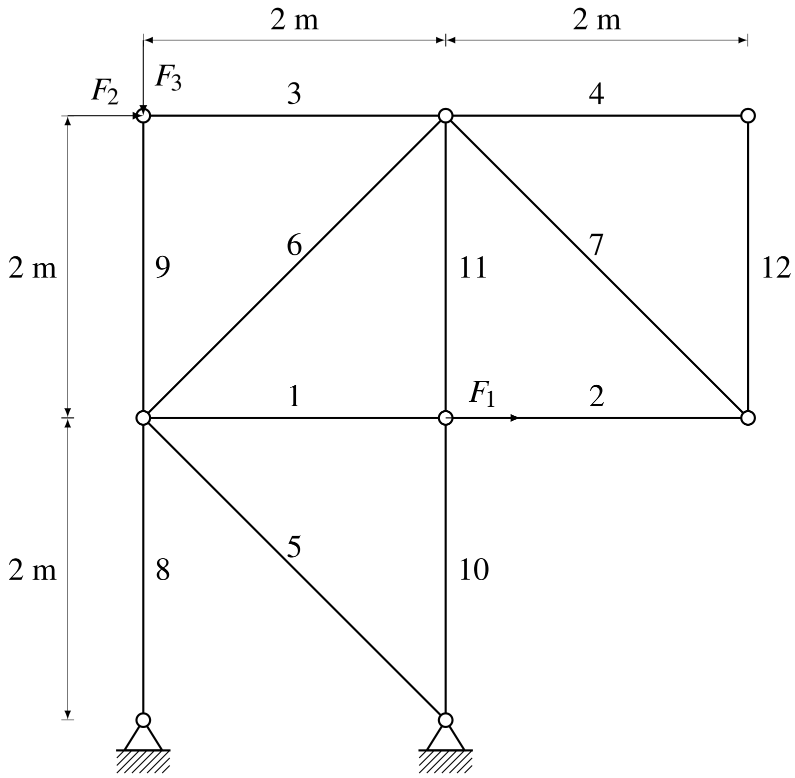

Abbildung 5.1: Beispiel 1: Mechanisches System

$$E = 500\,Pa \tag{5.1}$$

$$E_3 = 1000\,Pa,\ E_8 = 200\,Pa \tag{5.2}$$

$$A = 10\,m^2 \tag{5.3}$$

$$\rho = 10\,kgm^{-3} \tag{5.4}$$

$$F_1 = -30\,N,\ F_2 = -0.25\,N,\ F_3 = -0.40\,N \tag{5.5}$$

$$\tag{5.6}$$

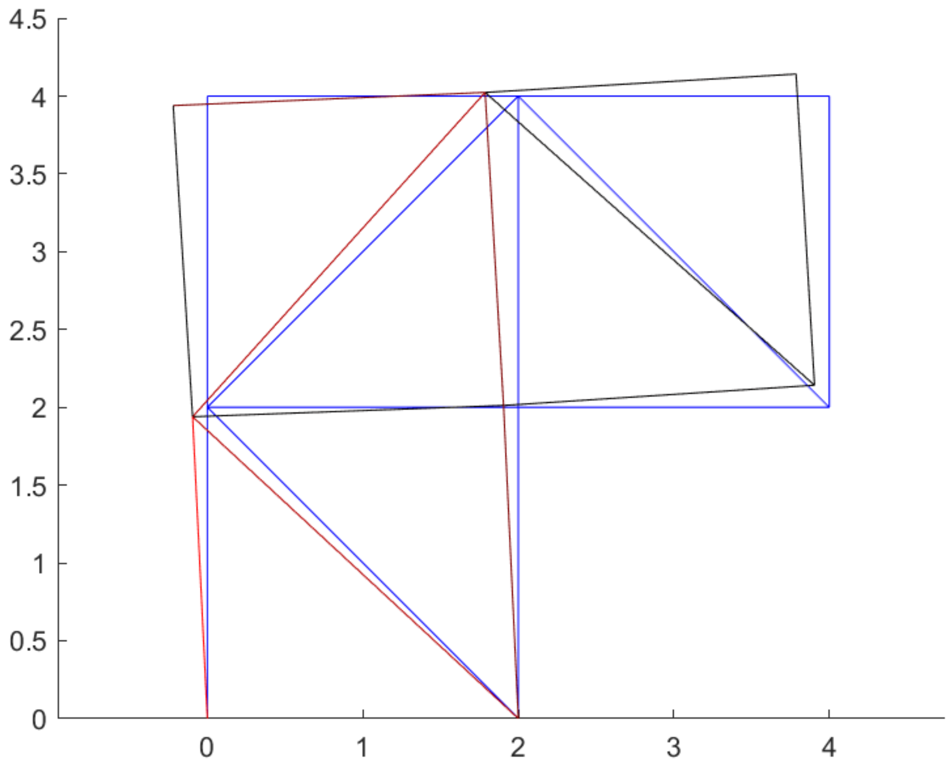

Abbildung 5.2: Beispiel 1: Statische Ruhelage des belasteten Systems

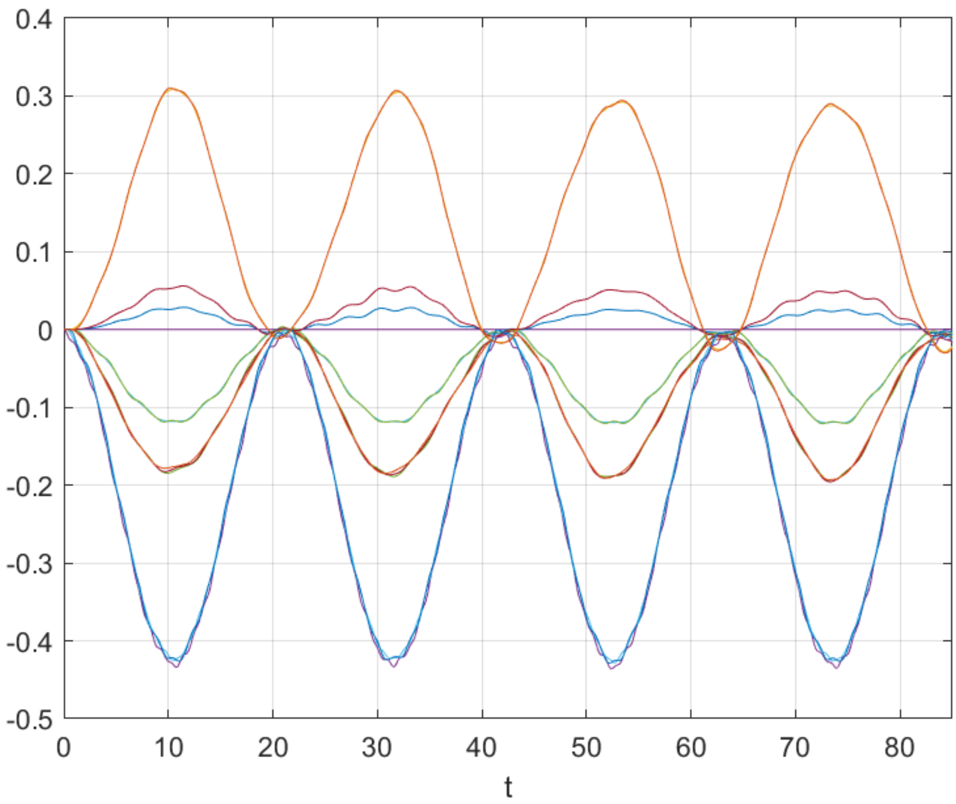

Abbildung 5.3: Beispiel 1: Lösung der DGL Bewegung der Knoten

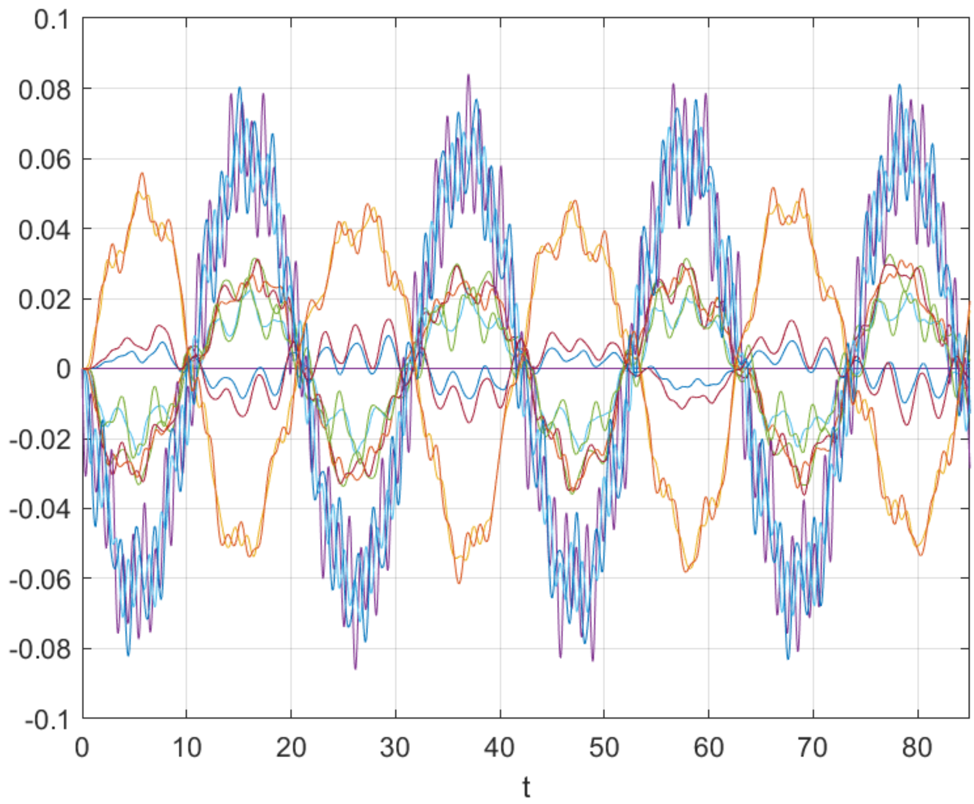

Abbildung 5.4: Beispiel 1: Lösung der DGL Geschwindigkeiten der Knoten

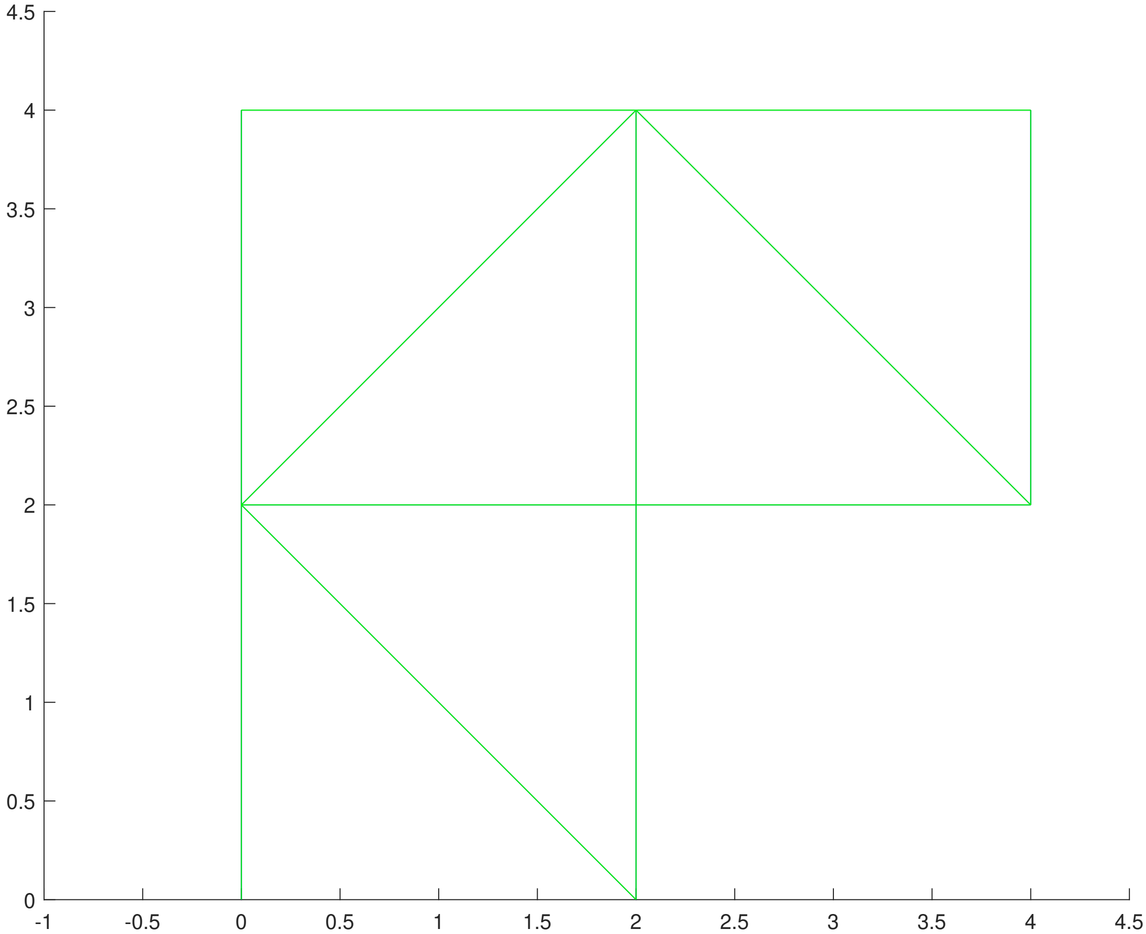

Abbildung 5.5: Beispiel 1: Animation

5.2 Beispiel 2

Im nachfolgenden Beispiel wird Beispiel „**IV Bridge**“aus einem Paper „Wave propagation in elastic trusses: An approach via retarded potentials“ [2, Seite 33] nachgerechnet.

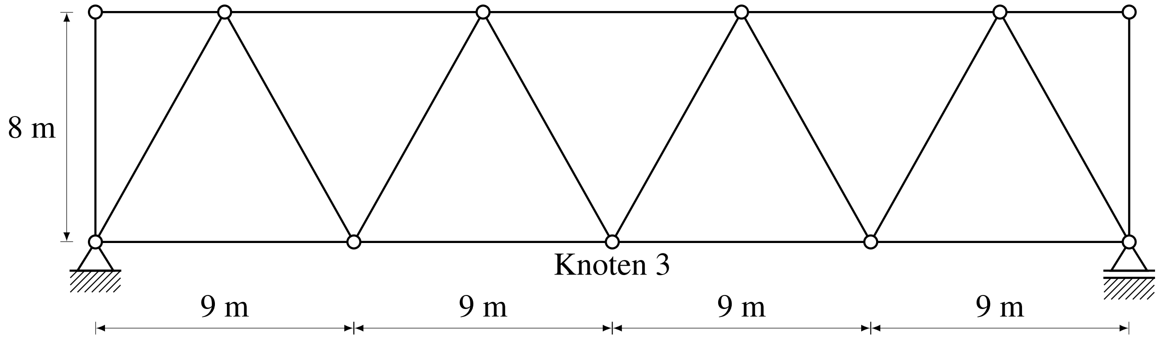

Abbildung 5.6: Beispiel 2: Mechanisches System [2, vgl. Seite 33]

„In the final example, we direct our attention towards a traditional problem encountered in structural engineering. We consider a short bridge, whose main girder is illustrated in Abbildung 5.6. It shall serve as typical example for steel railway bridges. All members are equipped with the same material parameters usual for structural steel

$$E = 200 * 10^9\, Pa, \rho = 7850\, kgm^{-3}, A = 0.01\, m^2. \qquad (5.7)$$

and consequently the wave velocity in each member is $c \approx 5047.5\, ms^{-1}$. Our goal is to simulate the crossing of a small freight train. The configuration of the considered model train is depicted in Abbildung 5.7. Each wagon is assumed to have a mass of $m_w = 20 * 10^3\, kg$. Hence, the force at each wheel which is defined by

$$\mathbf{f}_w := -\frac{m_w g}{4}\mathbf{e}_2 \qquad (5.8)$$

has a magnitude of $50 * 10^3\, N$, where we used the gravitational acceleration $g = 10\, ms^{-2}$ common in structural engineering. The train moves at a constant velocity of $25\, ms^{-1}$. The rails are founded on a deck which is assumed to be rigid, such that the load of each wheel is distributed linearly by distance to the (at most) two neighbouring truss nodes.
In the considered simulation, we fix $T = 3\, s$ and limit the train to three wagons. Due to this choice, the rear axis of the last wagon leaves the truss shortly after the simulation ends and a complete passage of the train is observed.“ [2, Seite 33-35]

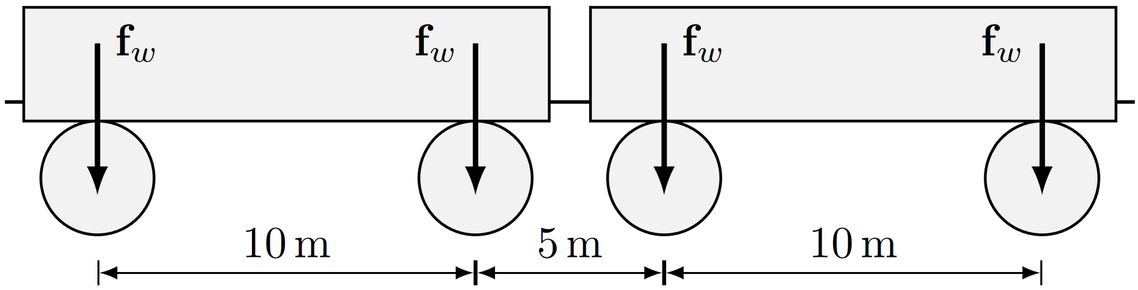

Abbildung 5.7: Beispiel 2: Konfiguration des die Brücke überfahrendes Wagens [2, Seite 35]

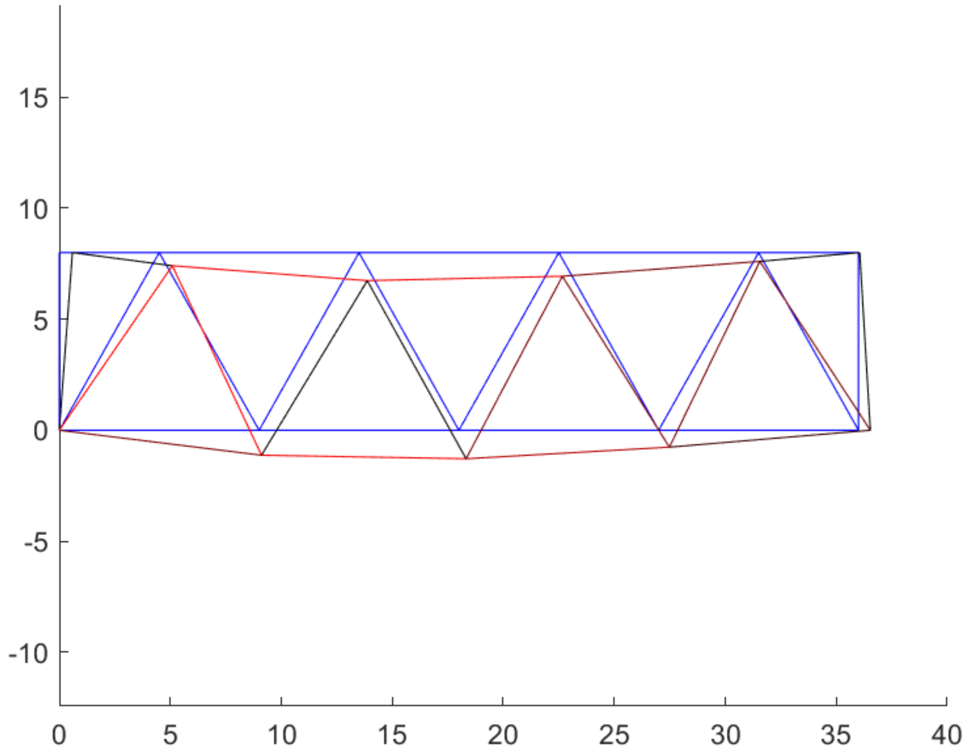

Abbildung 5.8: Beispiel 2: Statische Ruhelage des Systems mit der Belastung zum Zeitpunkt t=0.5 (Lastfaktor 1000)

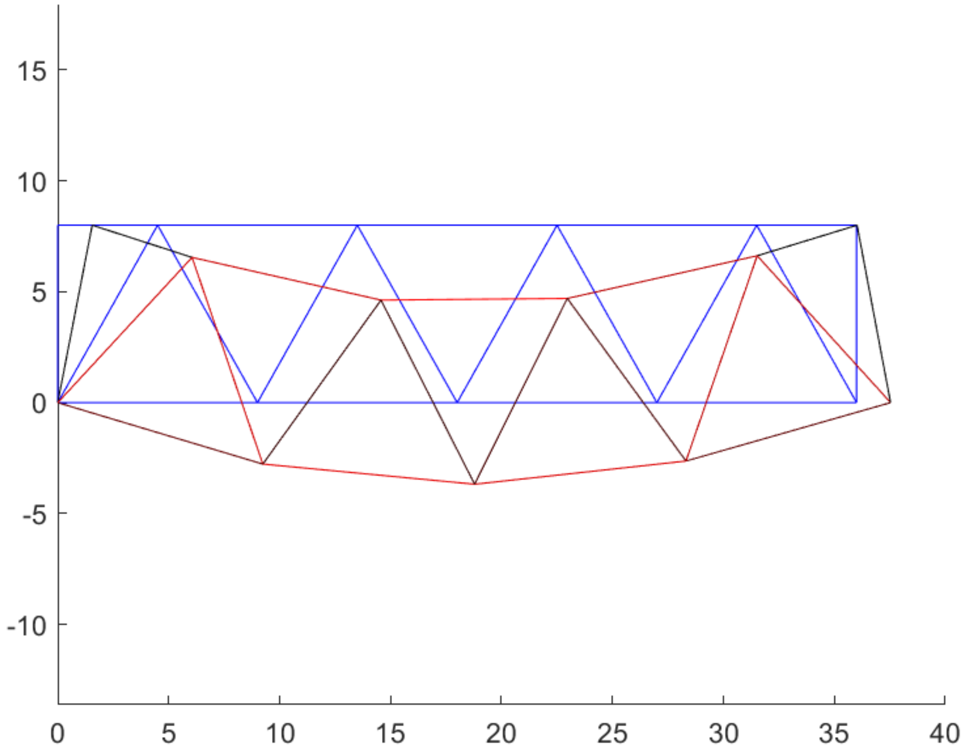

Abbildung 5.9: Beispiel 2: Statische Ruhelage des Systems mit der Belastung zum Zeitpunkt t=1.4 (Lastfaktor 1000)

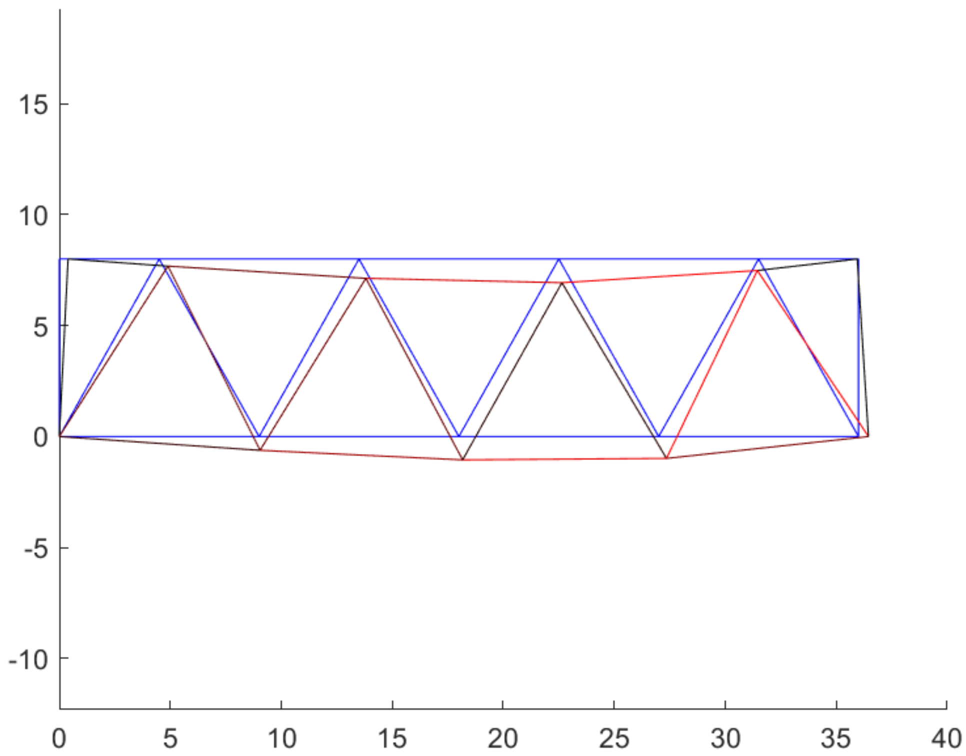

Abbildung 5.10: Beispiel 2: Statische Ruhelage des Systems mit der Belastung zum Zeitpunkt t=2.6 (Lastfaktor 1000)

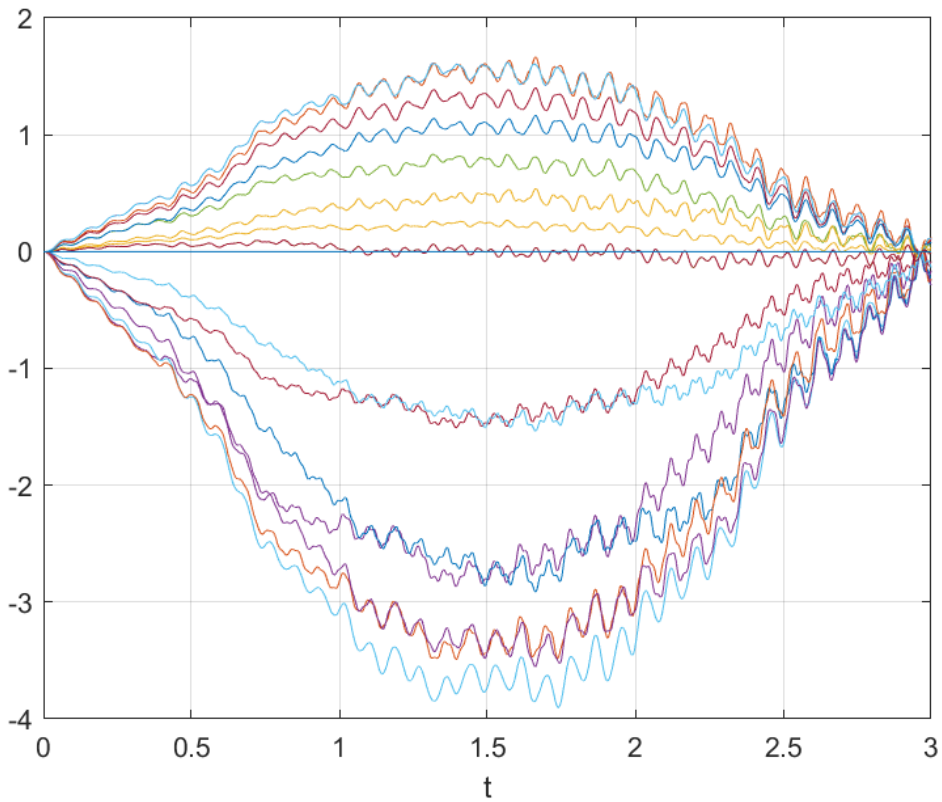

Abbildung 5.11: Beispiel 2: Lösung der DGL Bewegung der Knoten

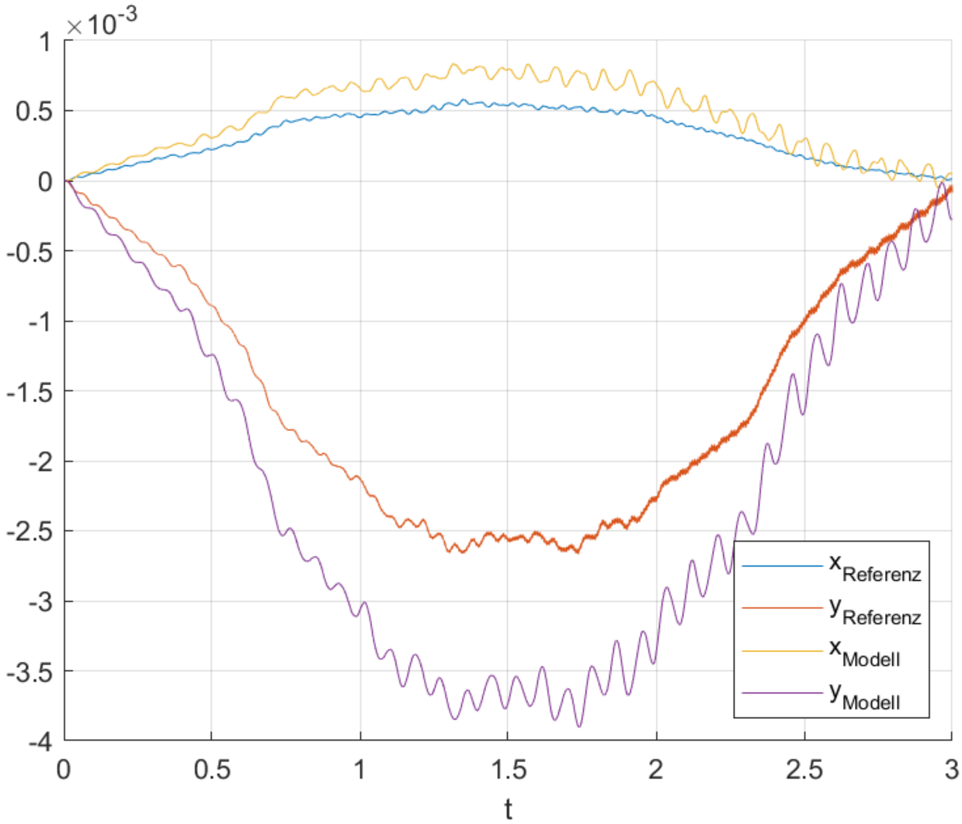

Abbildung 5.12: Beispiel 2: Vergleich der Durchbiegung des Knotens 3 mit der Referenzlösung

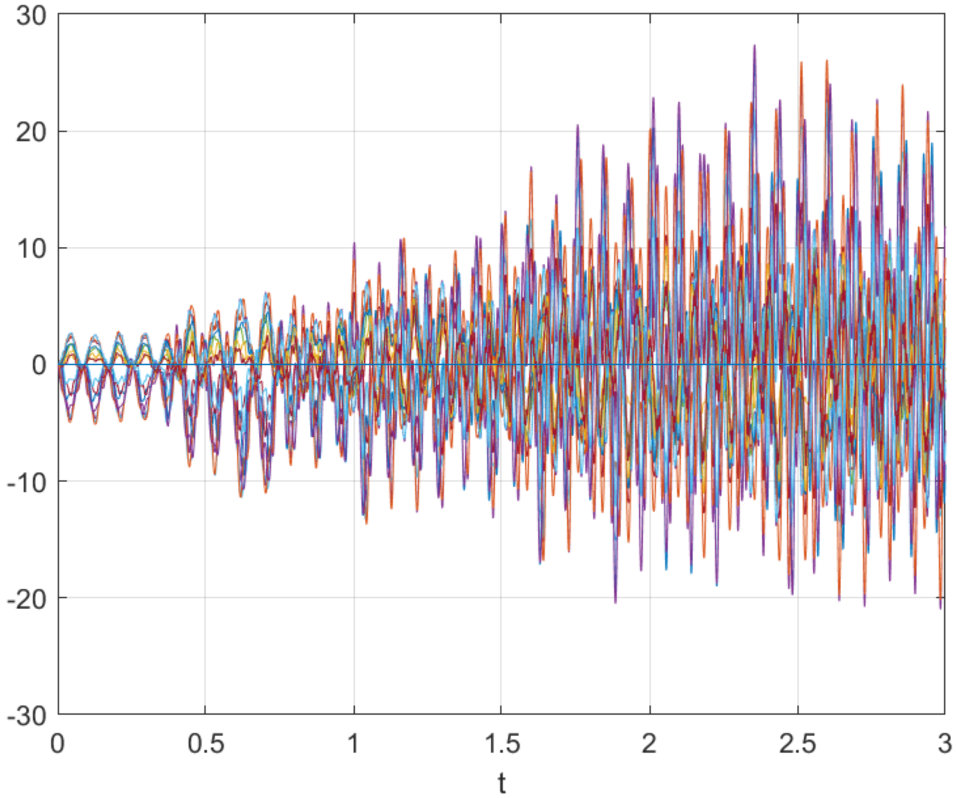

Abbildung 5.13: Beispiel 2: Lösung der DGL Geschwindigkeiten der Knoten

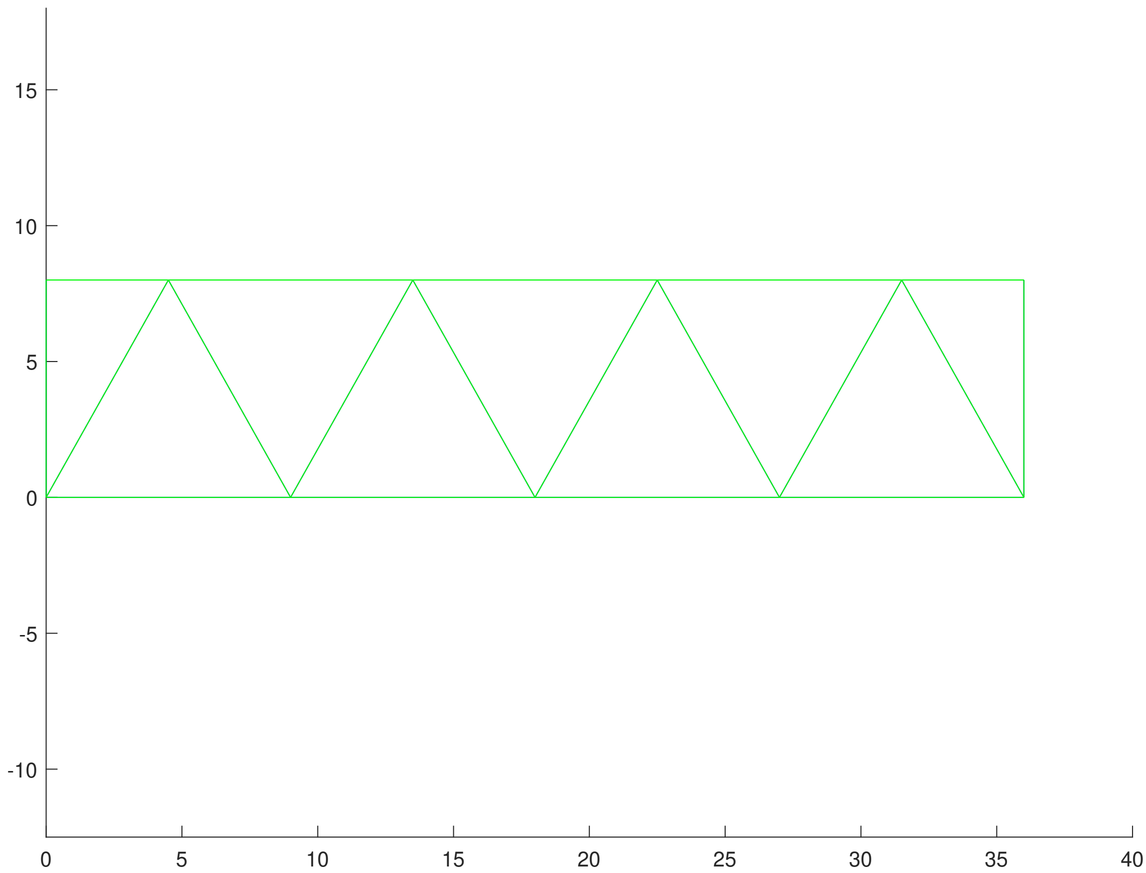

Abbildung 5.14: Beispiel 2: Animation (Lastfaktor 1000)

5.3 Beispiel 3

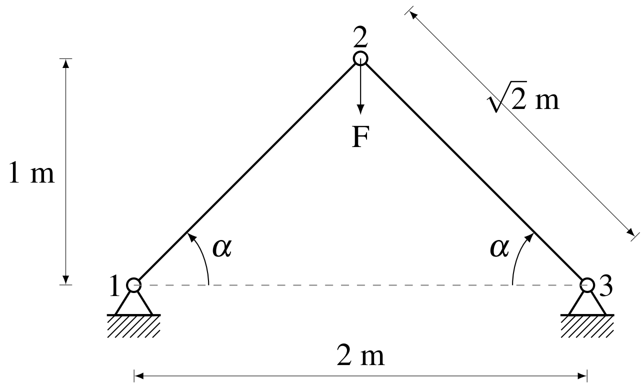

Abbildung 5.15: Beispiel 3: Mechanisches System

$$E = 1\,Pa \tag{5.9}$$
$$A = 1\,m^2 \tag{5.10}$$
$$\rho = 1\,kgm^{-3} \tag{5.11}$$
$$\alpha = 45 \tag{5.12}$$

Die Kraft F

$$F = -(H(t) - H(t-1.))/100 \tag{5.13}$$

ist hierbei eine reine Erregerkraft, welche den Knoten bis zum Zeitpunkt $t = 1$ beschleunigt.
Bei Beispiel 3 wird ein Zweibein Fachwerk untersucht, welches durch die Annahme der Konzentration der Stabmassen in den Knoten zu einem Masse-Feder System wird. Die durch das Modell in Knoten 2 konzentrierte Masse errechnet sich zu

$$m_2 = \sqrt{2}\,kg. \tag{5.14}$$

Die Eigenfrequenz ω errechnet sich aus [1, vgl. Seite 56]

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}. \tag{5.15}$$

„Zwischen der Federkraft Fc und der Längenänderung l der Feder besteht der lineare Zusammenhang:

$$F_c = cl. \tag{5.16}$$

Der Proportionalitätsfaktor c wird als Federkonstante bezeichnet.“ [1, Seite 55]
Um die Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Durchbiegung in Kraftrichtung darstellen zu können, ist es nötig die Gleichung (2.3), welche das Verhältnis aus (5.16) für einen Fachwerksstab mit

$$c_k = \frac{E_k A_k}{L_k} \tag{5.17}$$

darstellt, auf das Gesamtsystem umzustellen. Dabei gilt

$$F_k = F_{ges} * sin(\alpha) \tag{5.18}$$

da bei Annahme der Linearisierung der Bewegung nur der Kraftanteil in Federrichtung für die Feder wirksam wird. Des Weiteren ist

$$\Delta l_k = \frac{\Delta l_{ges}}{sin(\alpha)} \tag{5.19}$$

da wir ja an die Verschiebung in Kraftrichtung abbilden wollen. Setzt man nun die Gleichungen (5.16) und (5.19) in Gleichung (2.3) ein ergibt sich für das betrachtete Beispiel mit zwei im Winkel $\alpha = 45$ geneigten Stäben eine Ersatzsteifigkeit von

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} J. \tag{5.20}$$

Wodurch sich für Beispiel 3 ein Eigenfrequenz von

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{s} \tag{5.21}$$

ergibt. Die Frequenz f beziehungsweise Periodendauer T ergeben sich aus [1, Seite 56]

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{5.22}$$

$$T = \frac{1}{f} \tag{5.23}$$

zu

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{1}{s} \tag{5.24}$$

$$T = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.886\, s. \tag{5.25}$$

Die in Matlab numerisch errechneten Schwingungsparameter ergeben sich zu:

$$Amplitude = 9.830 * 10^{-3}\, m \tag{5.26}$$

$$T_M = 8.888\, s \tag{5.27}$$

In Abbildung 5.19 wird der Verlgeich zu einem Referenzmodell gezeigt, bei dem die Massen nicht im Knoten konzentriert, sondern realitätsnah über den Stab verteilt sind. Dies führt dazu, dass es zu einem Plateau bei der Amplitute der Bewegung des Knotens und zu einer anderen Schwingungsdauer kommt.

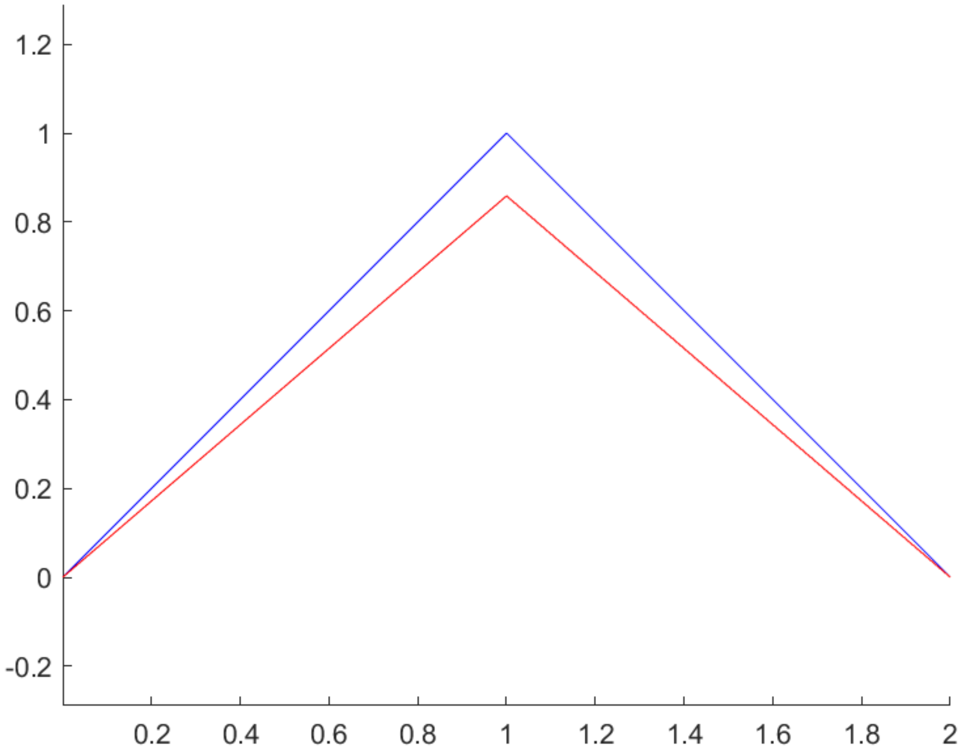

Abbildung 5.16: Beispiel 3: Statische Ruhelage des Systems mit $F = 0.1N$

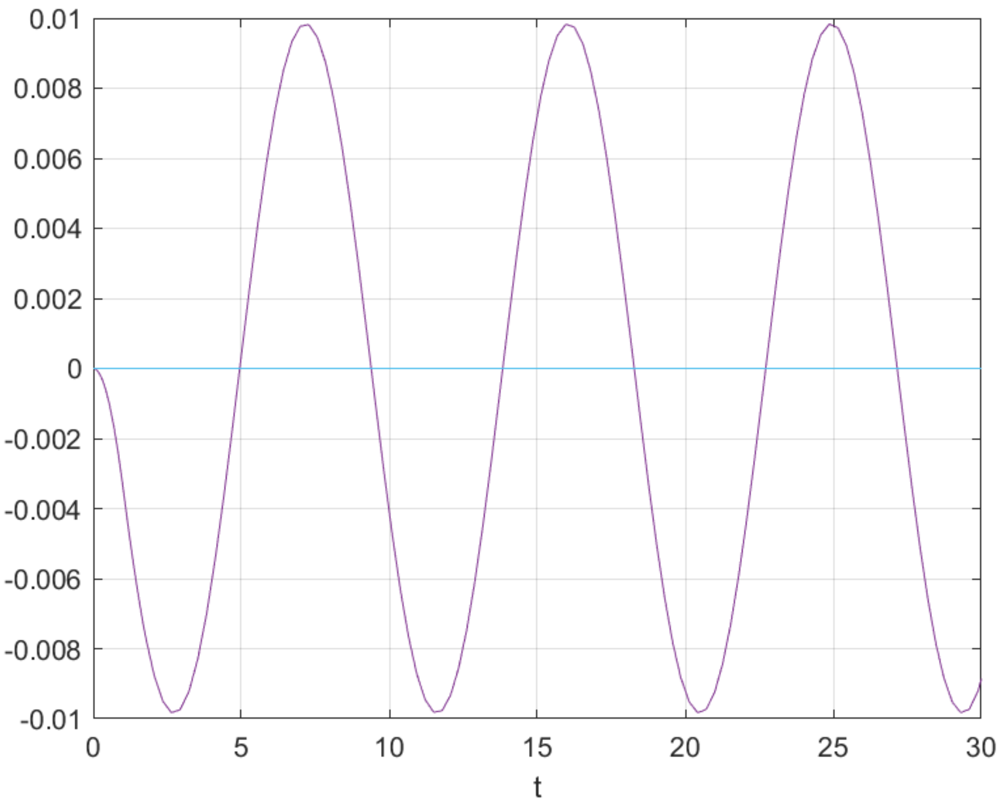

Abbildung 5.17: Beispiel 3: Lösung der DGL Schwingung

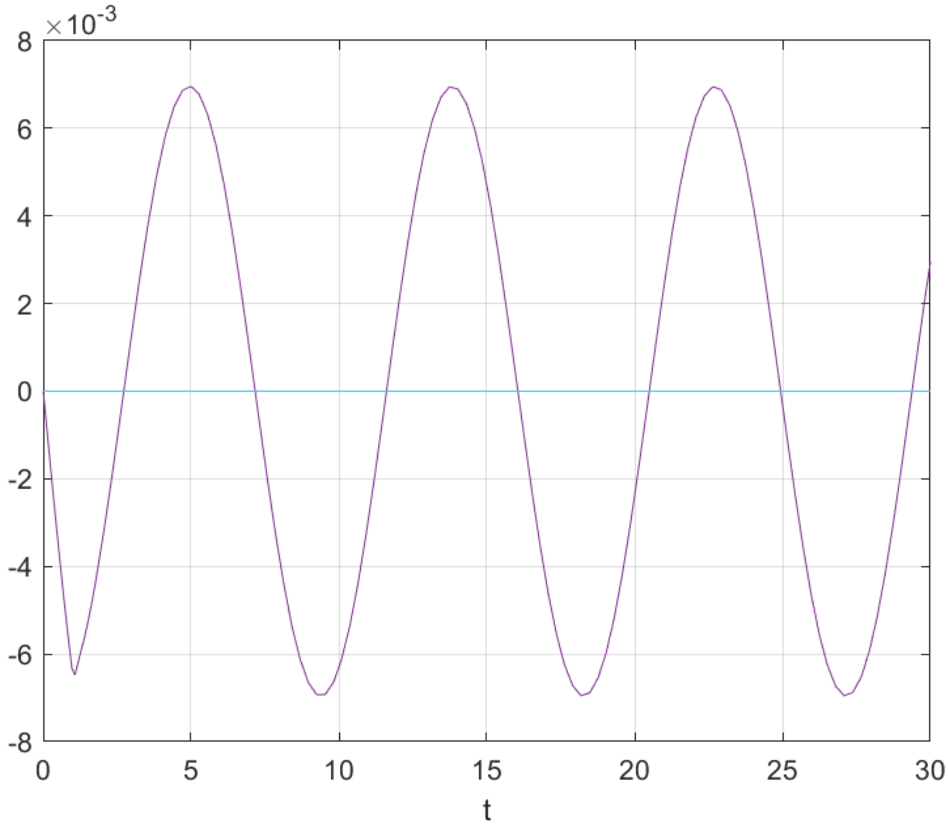

Abbildung 5.18: Beispiel 3: Lösung der DGL Geschwindigkeit

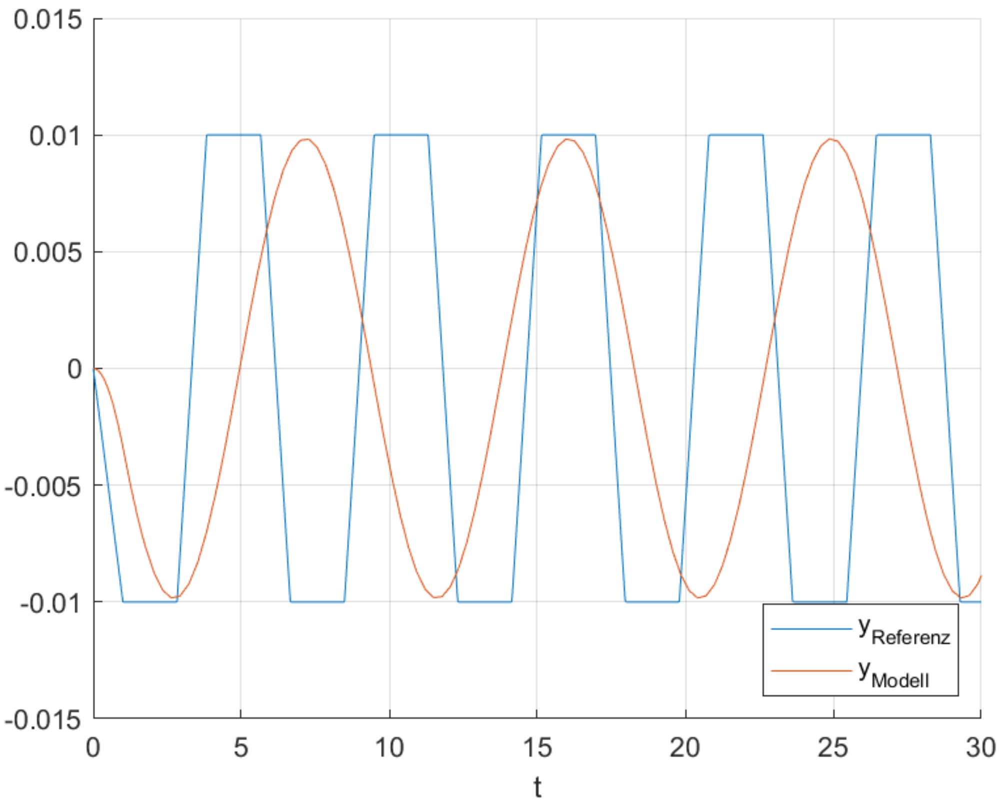

Abbildung 5.19: Beispiel 3: Vergleich der Schwingung mit der Referenzlösung

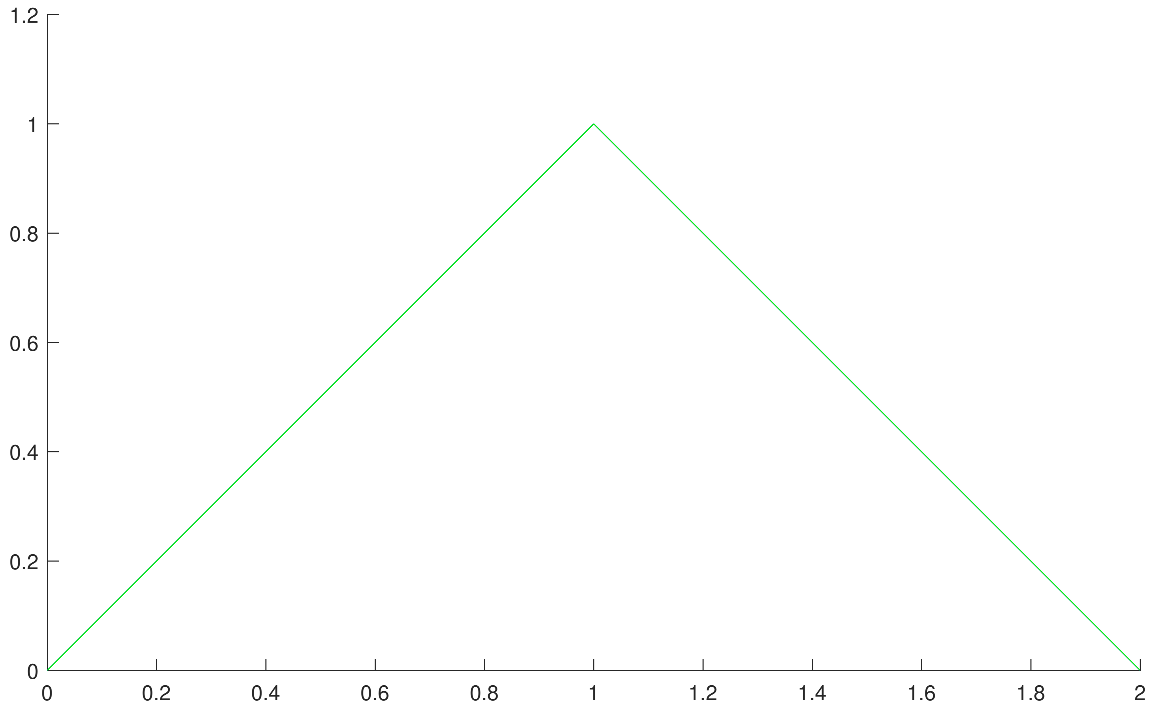

Abbildung 5.20: Beispiel 3: Animation

6. CONCLUSIO

Ziel dieser Bachelorarbeit war es ein Modell zu entwickeln, welches es ermöglicht die durch die dynamische Bewegung von Fachwerken entstehenden Gleichungssysteme relativ einfach zu lösen. Die dadurch entstehenden Bewegungsgleichungen wurden dann in Matlab implementiert und über die Steifigkeitsmatrix gelöst. Vereinfachende Annahmen waren unter anderem die Verteilung der Stabmassen und Belastungen auf die Knoten und die Linearisierung der Bewegung der Knoten. Im Vergleich mit anderen Berechnungsmodellen, welche etwa die Stabmasse nicht in den Knoten annehmen, erkennt man, dass in Beispiel 2 die Durchbiegung überschätzt wird und die Periodendauer der Schwingung von Beispiel 3 von dem näher an der Realität liegenden Modell abweicht. Dies sollte vor einer weiterführenden Betrachtung der Modellvariante näher untersucht werden.
Zur Verbesserung des Modells wäre es denkbar die Stabmassen nicht auf die Knoten zu verteilen um damit auch Querkräfte und Momente, entstehend durch die Massenträgheit der Stäbe darstellen zu können. Dadurch könnte auch eine Betrachtung der Stäbe als Euler-Bernoulli oder Timoshenko-Balken sinnvoll werden, um auch die Darstellung einer Belastung und damit Durchbieng der Balken zu ermöglichen. Allerdings würde dies die Rechenmodelle deutlich verkomplizieren was eine elegante Lösung über einen einfachen und kurzen Matlab-Code nicht mehr möglich machen würde. Eine weitere sinnvolle Erweiterung für das Matlab-Programm wäre eine Eingabemaske welche es ermöglicht Knoten, Stäbe, Bealstungen und Materialkennwerte einfach und schnell einzugeben.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

4.1 Funktion für einen Knoten i 12

5.1 Beispiel 1: Mechanisches System 15
5.2 Beispiel 1: Statische Ruhelage des belasteten Systems 16
5.3 Beispiel 1: Lösung der DGL Bewegung der Knoten 17
5.4 Beispiel 1: Lösung der DGL Geschwindigkeiten der Knoten 18
5.5 Beispiel 1: Animation 19
5.6 Beispiel 2: Mechanisches System [2, vgl. Seite 33] 20
5.7 Beispiel 2: Konfiguration des die Brücke überfahrendes Wagens [2, Seite 35] 21
5.8 Beispiel 2: Statische Ruhelage des Systems mit der Belastung zum Zeitpunkt t=0.5 (Lastfaktor 1000) 21
5.9 Beispiel 2: Statische Ruhelage des Systems mit der Belastung zum Zeitpunkt t=1.4 (Lastfaktor 1000) 22
5.10 Beispiel 2: Statische Ruhelage des Systems mit der Belastung zum Zeitpunkt t=2.6 (Lastfaktor 1000) 23
5.11 Beispiel 2: Lösung der DGL Bewegung der Knoten 24
5.12 Beispiel 2: Vergleich der Durchbiegung des Knotens 3 mit der Referenzlösung 25
5.13 Beispiel 2: Lösung der DGL Geschwindigkeiten der Knoten 26
5.14 Beispiel 2: Animation (Lastfaktor 1000) 27
5.15 Beispiel 3: Mechanisches System 28
5.16 Beispiel 3: Statische Ruhelage des Systems mit $F = 0.1N$ 30
5.17 Beispiel 3: Lösung der DGL Schwingung 31
5.18 Beispiel 3: Lösung der DGL Geschwindigkeit 32
5.19 Beispiel 3: Vergleich der Schwingung mit der Referenzlösung 33
5.20 Beispiel 3: Animation 34

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Erich Ao.Univ.-Prof.i.R. Dipl.-Ing. Dr.techn. Bauer. *Vorlesungsbehelf aus Baumechanik 3*. Institute of Applied Mechanics, Graz University of Technology, 2017.

[2] M. Schanz D. Pölz, M. H. Gfrerer. Wave propagation in elastic trusses: An approach via retarded potentials. 2019.

[3] Stephan Dipl.-Ing. Dr.techn. Gast.-Prof. Wagner. Taylorpolynome in mehreren variablen. `https://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi6w979j_TyAhWhg_0HHSMBAWgQFnoECAMQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.math.tugraz.at%2F~wagner%2FTaylor.pdf&usg=AOvVaw1bczYqmLhGLCxxg9K0hmM6`.

[4] Johannes Prof. Dr.-Ing. Wandinger. 2. die steifigkeitsmatrix. `https://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwilvPjcj_TyAhUq_7sIHec3Df4QFnoECAQQAQ&url=https%3A%2F%2Fwandinger.userweb.mwn.de%2FLA_FEM%2Fv1_2.pdf&usg=AOvVaw0MnCG2T02x1fNv0EeN3nH9`.