Power Flow Calculation Methods: A Comprehensive Review

Leonard Schulte, Albert Moser

IAEW Elektrische Anlagen & Netze, Digitalisierung & Energiewirtschaft | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Agenda

Einleitung

Grundlagen – Leistungsflussproblem

Übersicht Leistungsflussalgorithmen

Ergebnisse / Key Takeaways

Zusammenfassung

Einleitung – Warum Leistungsfluss?

Anforderungen an und Anzahl von Leistungsflussberechnungen wird steigen

- Grundlage für alle (technischen) Analysen des Elektrizitätsversorgungssystems
  - Langfristige Netzausbauplanung
  - Kurzfristige Netzbetriebsplanung
  - Dynamische Netzberechnungen

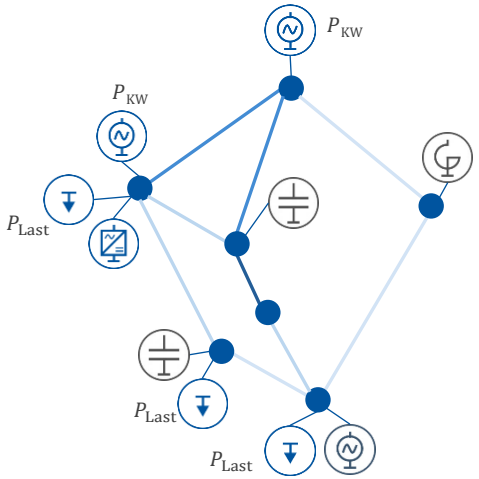
NEWS ANNOUNCEMENT | 1 October 2025 | Directorate-General for Energy | 2 min read

EU electricity trading in the day-ahead markets becomes more dynamic

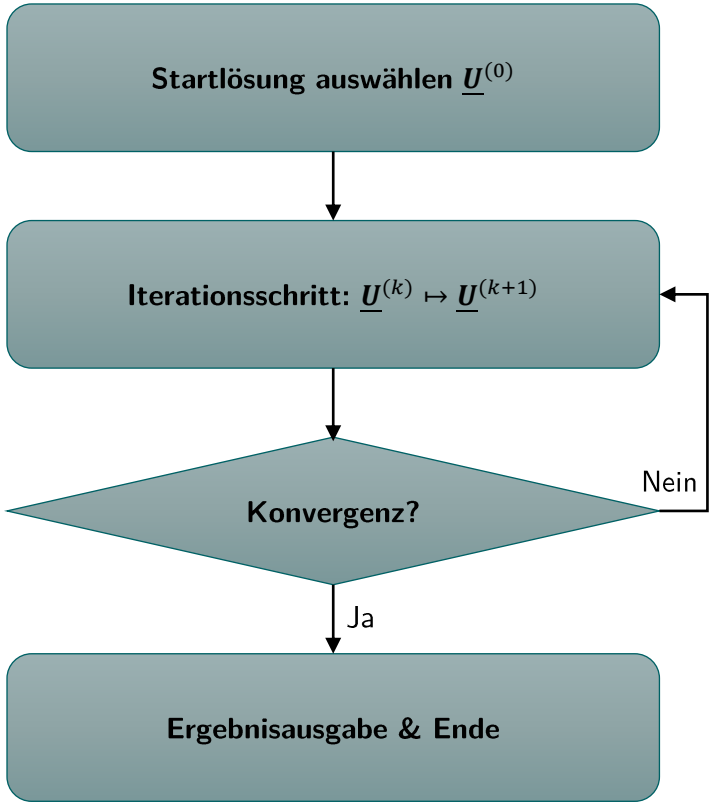
Pressemitteilung der Europäischen Kommission zur Umstellung der Market Time Unit von 1h auf 15min

Grundlagen – Leistungsflussproblem

Berechnung von Knotenspannungen bei bekannter Last- und Einspeisesituation



- $\underline{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{U}} \odot \underline{\boldsymbol{I}}^* = \underline{\boldsymbol{U}} \odot (\underline{\mathbf{Y}}^* \underline{\boldsymbol{U}}^*)$
  - Nichtlineares Gleichungssystem in $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\phi}$
  - ➢ (Iteratives) numerisches Lösungsverfahren erforderlich
  - Wesentlicher Unterschied zwischen verschiedenen Lösungsalgorithmen: Iterationsschritt $\underline{\boldsymbol{U}}^{(k)} \mapsto \underline{\boldsymbol{U}}^{(k+1)}$



Fundamentaler Ablauf iterativer Leistungsflussalgorithmen

Übersicht Leistungsflussalgorithmen

Fixpunktmethoden

- Admittanzmatrix
- Impedanzmatrix

Newton- & Quasi-Newton-Methoden

- Newton-Raphson-Methode
- Schneller, entkoppelter Leistungsfluss
- Broyden-Methode

Übersicht Leistungsflussalgorithmen

Fixpunktmethoden

Admittanzmatrix

Impedanzmatrix

Newton- & Quasi-Newton-Methoden

Newton-Raphson-Methode

Schneller, entkoppelter Leistungsfluss

Broyden-Methode

$$\underline{\boldsymbol{U}}^{(k+1)} = \underline{\boldsymbol{U}}^{(k)} + (\underline{\boldsymbol{S}}^{*} \oslash \underline{\boldsymbol{U}}^{(k)*} - \underline{\boldsymbol{Y}}\underline{\boldsymbol{U}}^{*}) \oslash \underline{\boldsymbol{Y}}_{diag}$$

- Lösungsupdate nur abhängig von Netzadmittanzen und Lösung aus vorheriger Iteration
- Iterationsvorschrift erfordert nur Vektor-Vektor- bzw. Matrix-Vektor-Operationen

➢ Einzelne Iterationen typischerweise sehr schnell

➢ Lineare Konvergenz

Übersicht Leistungsflussalgorithmen

Fixpunktmethoden

Admittanzmatrix

Impedanzmatrix

Newton- & Quasi-Newton-Methoden

Newton-Raphson-Methode

Schneller, entkoppelter Leistungsfluss

Broyden-Methode

$$\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Y}}^{-1}$$
$$\underline{\boldsymbol{U}}^{(k+1)} = \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\boldsymbol{S}} \oslash \underline{\boldsymbol{U}}^{(k)})^*$$

- Lösungsupdate nur abhängig von Netzadmittanzen und Lösung aus vorheriger Iteration
- Iterationsvorschrift erfordert nur Vektor-Vektor- bzw. Matrix-Vektor-Operationen

➢ Einzelne Iterationen typischerweise sehr schnell

➢ Bessere Konvergenzeigenschaften als Admittanzmatrix-Fixpunktiteration

➢ Aber: Einmalige Matrixinversion $\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Y}}^{-1}$ notwendig

Übersicht Leistungsflussalgorithmen

Fixpunktmethoden

Admittanzmatrix

Impedanzmatrix

Newton- & Quasi-Newton-Methoden

Newton-Raphson-Methode

Schneller, entkoppelter Leistungsfluss

Broyden-Methode

$$\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}} = \underline{\boldsymbol{U}} \odot \underline{\mathbf{Y}}^{*} \underline{\boldsymbol{U}}^{*} - \underline{\boldsymbol{S}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\phi} \\ \Delta\boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k)}$$

$$-\mathbf{J}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\phi} \\ \Delta\boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}}) \\ \mathrm{Im}(\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}}) \end{bmatrix}^{(k)}$$

- Jede Iteration erfordert Berechnung der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$ und Lösung eines linearen Gleichungssystems
- ➢ Einzelne Iterationsschritte deutlich langsamer als bei Fixpunktmethoden
- ➢ Quadratische Konvergenz

Übersicht Leistungsflussalgorithmen

Fixpunktmethoden

Admittanzmatrix

Impedanzmatrix

Newton- & Quasi-Newton-Methoden

Newton-Raphson-Methode

Schneller, entkoppelter Leistungsfluss

Broyden-Methode

$$\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}} = \underline{\boldsymbol{U}} \odot \underline{\mathbf{Y}}^{*} \underline{\boldsymbol{U}}^{*} - \underline{\boldsymbol{S}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\phi} \\ \Delta\boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k)}$$

$$(\mathbf{B}')\Delta\boldsymbol{\phi}^{(k)} = \mathrm{Re}\left(\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{R}}^{(k)}\right) \oslash \boldsymbol{U}^{(k)}$$

$$(\mathbf{B}'')\Delta\boldsymbol{U}^{(k)} = \mathrm{Im}\left(\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{R}}^{(k)}\right) \oslash \boldsymbol{U}^{(k)}$$

- Lineares Gleichungssystem zerfällt in 2 getrennte Systeme mit konstanten Matrizen $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$
- ➢ Jacobi-Matrix muss nicht jedes mal neu bestimmt werden
- ➢ $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ müssen nur einmal faktorisiert werden
- ➢ Beschleunigung der einzelnen Iterationsschritte
- ➢ Superlineare Konvergenz

Übersicht Leistungsflussalgorithmen

Fixpunktmethoden

Admittanzmatrix

Impedanzmatrix

Newton- & Quasi-Newton-Methoden

Newton-Raphson-Methode

Schneller, entkoppelter Leistungsfluss

Broyden-Methode

$$\underline{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{R}} = \underline{\boldsymbol{U}} \odot \underline{\mathbf{Y}}^{*} \underline{\boldsymbol{U}}^{*} - \underline{\boldsymbol{S}} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\phi} \\ \Delta\boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k)}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\phi} \\ \Delta\boldsymbol{U} \end{bmatrix}^{(k)} = -\left(\mathbf{J}^{(k)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}) \\ \mathrm{Im}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}) \end{bmatrix}^{(k)}$$

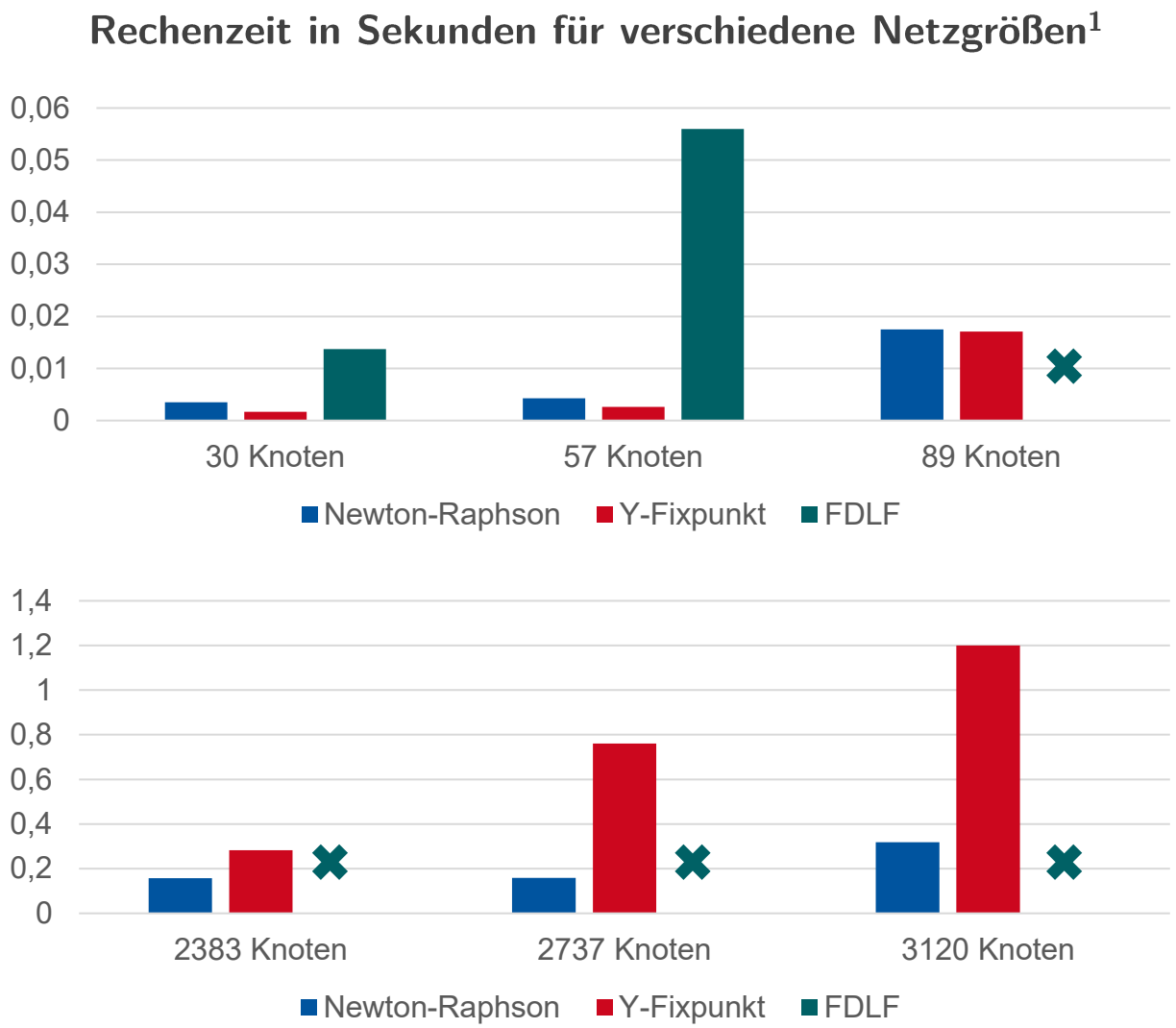
$$\left(\mathbf{J}^{(k)}\right)^{-1} = \boldsymbol{f}\left(\left(\mathbf{J}^{(k-1)}\right)^{-1}, \boldsymbol{U}^{(k-1)}\right)$$

- Erlaubt explizite Bestimmung von $\left(\mathbf{J}^{(k)}\right)^{-1}$ aus $\left(\mathbf{J}^{(k-1)}\right)^{-1}$
- Einmalige Inversion von $\mathbf{J}^{(0)}$ erforderlich

➢ Iterationsschritte erfordern nicht mehr die Lösung eines linearen Gleichungssystems, nur noch Vektor-Vektor- und Vektor-Matrix-Operationen

➢ Superlineare Konvergenz

Ergebnisse und Key Takeaways – Algorithmen performen je nach Netzgröße unterschiedlich gut

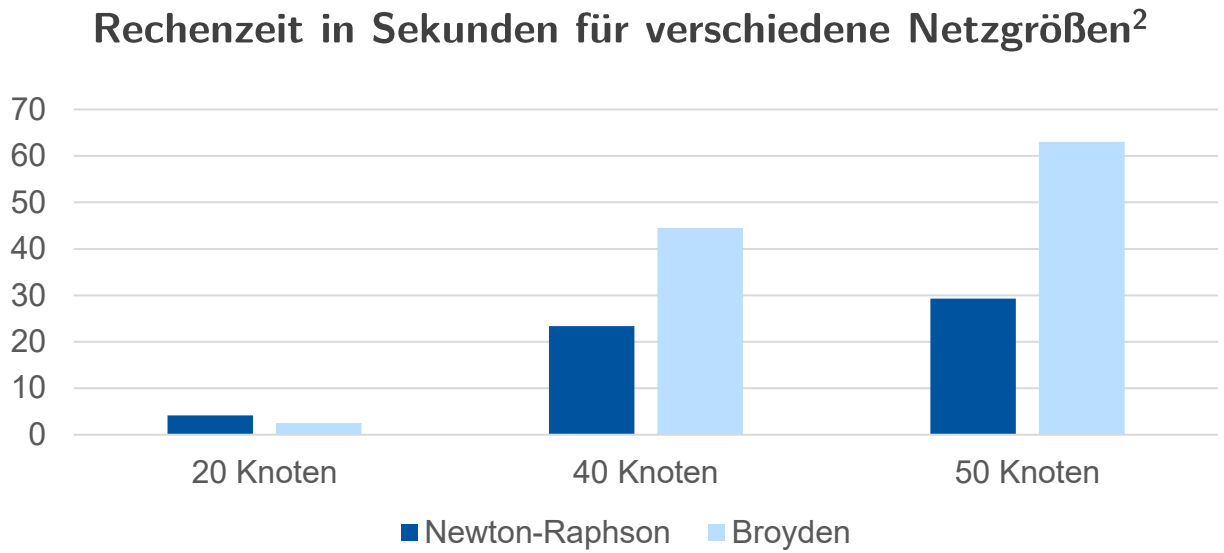


- Auf kleinen Netzen (< 100 Knoten) schlägt die Admittanzmatrix-Fixpunktmethode den Newton-Raphson-Algorithmus.
- Auf großen Netzen (> 1000 Knoten) verhält es sich umgekehrt.
- „Schneller“, entkoppelter Leistungsfluss (FDLF) ist auf kleinen Netzen nicht kompetitiv und weist Konvergenzprobleme auf großen Netzen auf.

➢ Quasi-Newton-Methoden bringen nicht die erhofften Laufzeitvorteile.

[1]Sauter et al., 2017

Ergebnisse und Key Takeaways – Aussagekräftige Ergebnisse erfordern umfangreiche Tests



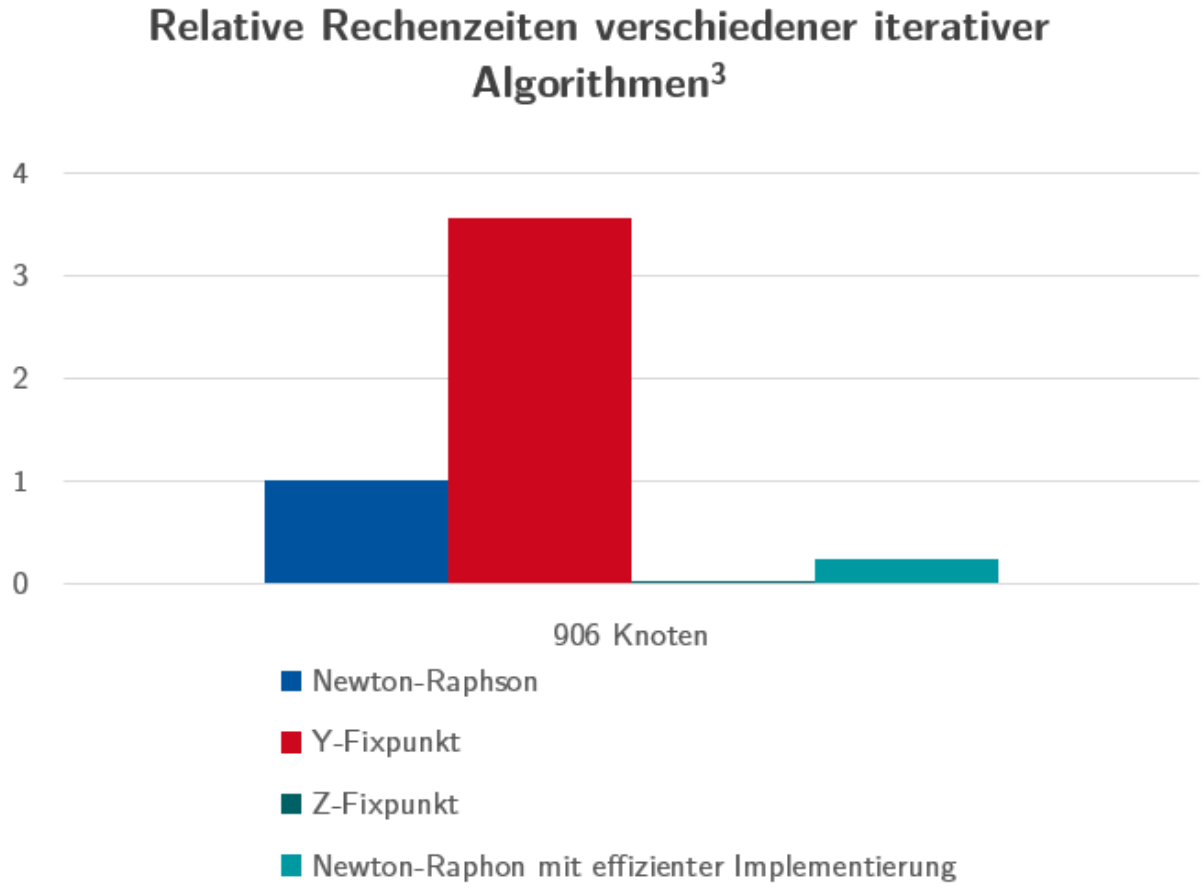
- Ergebnisse suggerieren: Broyden-Methode nicht kompetitiv
- Aber: Performance-Verhältnisse zwischen Methoden können sich mit steigender Netzgröße umkehren

➢ Verwendete Testnetze zu klein

➢ Quasi-Newton-Methoden bringen nicht die erhofften Laufzeitvorteile.

[2]Sangadiev et al., 2020

Ergebnisse und Key Takeaways – Moderne Computer machen Fixpunktmethoden effizient



- Fixpunktmethoden bereits in 50er- und 60er-Jahren vorgeschlagen und untersucht
- Impedanzmatrix-Fixpunktmethode aufgrund von Speicher- und CPU-Begrenzungen der damaligen Computer verworfen
- Jüngere Untersuchungen suggerieren: Impedanzmatrix-Fixpunktmethode sehr kompetitiv
- Aber: Begrenzter Untersuchungsrahmen erschwert Verallgemeinerung
- Außerdem: Unterschiedliche Varianten der Implementierung des selben Algorithmus weisen signifikante Performanceunterschiede auf

[3]Kattmann, 2022

Zusammenfassung

- Algorithmen performen je nach Netzgröße unterschiedlich gut (im Vergleich miteinander).
  - ➢ Generalisierbare Aussagen erfordern umfangreiche Tests auf unterschiedlich großen Netzen, idealerweise mit einer Vielzahl von Last- und Einspeiseszenarien.
- Quasi-Newton-Methoden bringen (bei Anwendung auf das Leistungsflussproblem) nicht unbedingt die erhoffte Performanceverbesserung.
- Moderne Computer- und CPU-Architektur macht ggf. veraltete Methoden wieder kompetitiv.
- Eine CPU-gerechtere Implementierung kann (für ein und dieselbe Methode) signifikante Laufzeitvorteile bedeuten.

➢ **Untersuchungen zur Performance von Leistungsflussalgorithmen sind zwischen verschiedenen Arbeiten nur schwer (oder gar nicht) vergleichbar.**

Vielen Dank
für Ihre Aufmerksamkeit