

# NUMERISCH STABILES THERMISCHES GEBÄUDEMODELL FÜR DIE ELEKTRISCHE SIMULATION VON NIEDERSPANNUNGSNETZEN

Hannes Hanse, Ines Hauer

Hannes Hanse\*, Technische Universität Clausthal, Institut für Elektrische Energietechnik und Energiesysteme, Leibnizstraße 28 38678 Clausthal-Zellerfeld, 05323 72-2595, hannes.hanse@tu-clausthal.de, iee.tu-clausthal.de

Prof. Dr.-Ing. Ines Hauer, Technische Universität Clausthal, Institut für Elektrische Energietechnik und Energiesysteme, Leibnizstraße 28 38678 Clausthal-Zellerfeld, 05323 72-2176, ines.hauer@tu-clausthal.de, iee.tu-clausthal.de

**Kurzfassung:** Die zunehmende Elektrifizierung der Wärmeversorgung durch Wärmepumpen macht eine genaue und rechnerisch effiziente thermische Gebäudemodellierung für die Simulation und Optimierung von Niederspannungsnetzen unerlässlich. Herkömmliche thermische RC-Modelle nutzen häufig zeitinvariante Diskretisierungsverfahren oder die explizite Euler-Diskretisierung, was bei Zeitschritten von mehr als etwa 5 Minuten zu numerischen Instabilitäten führt. In diesem Artikel wird ein neuer Modellierungsansatz auf Basis der Crank-Nicolson-Methode vorgestellt, der deutlich größere Zeitschritte bei gleichzeitig hoher Genauigkeit ermöglicht. Des Weiteren wurde eine Python-Bibliothek entwickelt, um die Implementierung und Simulation beliebiger RC-Systeme mit verschiedenen Diskretisierungsmethoden zu erleichtern. Ein Vergleich zwischen expliziter Euler-, impliziter Euler- und Crank-Nicolson-Methode zeigt, dass durch den vorgeschlagenen Ansatz deutlich größere Zeitschritte bei höherer Modellgenauigkeit möglich sind. Damit eignet sich die Methode zur effizienten Simulation größerer Quartiersstrukturen unter Berücksichtigung des dynamischen thermischen Gebäudeverhaltens.

**Keywords:** Sektorenkopplung, Wärmepumpe, Thermische Flexibilität, Thermisches RC-Modell, Crank-Nicolson

## 1 Einleitung

Durch die fortschreitende Elektrifizierung der Wärmeversorgung in Wohnquartieren, z.B. durch Wärmepumpen, wird die Bedeutung der thermischen Gebäudemodellierung für die Simulation und Optimierung elektrischer Niederspannungsquartiere zunehmend relevanter [1]. Da neue Märkte für elektrische Flexibilitäten entstehen und in Wohngebäuden eine zeitliche Entkopplung von Stromverbrauch und Wärmebereitstellung möglich ist, gewinnt der flexible Betrieb von Wärmepumpen und damit auch die thermisch komplexe Simulation von Gebäuden inklusive Betrachtung von thermischen Speichern und Trägheiten für Untersuchungen am elektrischen Energiesystem zusätzlich an Bedeutung.

### 1.1 Problem

Bei der simulativen Darstellung moderner Prosumer-Haushalte ist neben der Simulation des thermischen Systems auch die Modellierung immer komplexer werdender

Energiemanagementsysteme notwendig. Zur Begrenzung der Rechenzeit ist der gesamte Simulationsaufwand auf ein notwendiges Minimum zu reduzieren. Das impliziert unter anderem die Begrenzung der zeitlichen Auflösung auf ein notwendiges Minimum, mit dem dennoch alle dynamischen Effekte abgebildet werden. Für herkömmliche Simulationsansätze sind bei komplexer thermischer Simulation nur wenige Minuten große Zeitschritte möglich, um numerische Probleme oder starke Ungenauigkeiten zu vermeiden.

## 1.2 Methodischer Ansatz

Dieses Paper schlägt einen neuen Simulationsansatz für die Modellierung von thermischen RC-Modellen vor, in dem die zeitliche Diskretisierung der Differenzialgleichungen (DGL) durch das numerisch stabile Crank-Nicolson-Verfahren erfolgt. Diese Methode erlaubt deutlich größere Zeitschritte bei höherer Modellgenauigkeit im Vergleich zu herkömmlichen Modellierungsansätzen. Da die Simulation mit dem Crank-Nicolson-Verfahren nur in Matrixform erfolgen kann, die aufwendig zu implementieren ist, stellt dieses Paper außerdem eine selbst entwickelte Python-Bibliothek vor, die die Modellierung, Simulation und Auswertung thermischer RC-Modelle mit verschiedenen Diskretisierungsverfahren deutlich vereinfacht.

## 2 Literatur und Abgrenzung

Zur thermischen Simulation von Gebäuden gibt es verschiedene Modellierungsansätze unterschiedlichster Komplexität. [2] gibt einen ausführlichen Überblick über verschiedene Simulationsansätze und eine gute Übersicht über aktuelle Veröffentlichungen.

Ein etabliertes Verfahren zur Abbildung thermischer Gebäudeeigenschaften ist die Modellierung in thermischen RC-Modellen [2], [3], [4], [5], [6]. Dabei kommen oft Grey-Box-Modelle zum Einsatz, deren RC-Struktur den physikalischen Eigenschaften des Gebäudes in vereinfachter Form entspricht. Die Parameter der einzelnen Modellkomponenten werden anschließend beispielsweise anhand von Messdaten identifiziert oder optimiert [3].

Zur Lösung der DGL der Wärmeübertragung, die in den RC-Modellen auftreten, sind dabei in der Literatur verschiedene Lösungsansätze vertreten. Grundsätzlich ist zwischen zeitinvarianten und zeitvarianten Modellen zu unterscheiden. Während zeitinvariante Modelle über den Zeitraum der Simulation keine Änderung von Eigenschaften und Parametern zulassen, sind diese Änderungen bei zeitvarianten Modellen zulässig.

Zur Simulation größerer Quartiersstrukturen und längerer Zeiträume, wie es auch die Problemstellung dieser Arbeit verlangt, werden häufig zeitinvariante Systeme verwendet. Ein mögliches Verfahren ist die Lösung im Frequenzbereich auf Basis einer Übertragungsfunktionsmethode (englisch: transfer function method, TFM), wie sie auch in der VDI 6007 in Form von Kettenmatrizen und daraus abgeleiteten Ersatzmodellen verwendet wird [7]. Verfahren, die auf der TFM basieren, wie [4] oder [7], berechnen relevante Zielgrößen rekursiv aus den vorherigen Zeitschritten. Dabei ergeben sich zwei Vorteile: Sie sind häufig robuster gegenüber größeren Zeitschritten als einfache numerische Integrationsverfahren. Sie können außerdem so formuliert werden, dass nur relevante Zielgrößen berechnet werden, was die Simulation zusätzlich effizienter macht. [4]

Ein anderer Lösungsansatz basiert auf einer analytischen Lösung des RC-Differentialgleichungssystems im Bildbereich. Dabei werden zeitdiskrete Eingangszeitreihen als stückweise konstante Funktionen (zero-order hold) interpretiert. Auf dieser Grundlage lässt sich das RC-Modell analytisch integrieren und so in eine diskrete Zustandsraumbeschreibung überführen. [6]

Bei dem gegebenen Problem dieser Arbeit muss während der Simulation aktiv in das Verhalten des thermischen Modells eingegriffen werden. Dadurch verändern sich im Modell u. a. Massenströme im Simulationszeitraum. Damit ist das System nicht mehr zeitinvariant und die bisher vorgestellten Ansätze können nicht verwendet werden.

Herkömmliche zeitvariante Ansätze sind das explizite sowie das implizite Euler-Verfahren. Diese Verfahren bieten eine möglichst direkte Lösung des DGL-Systems, die in jedem Schritt durchgeführt werden kann. So wird in der ISO-Norm 52016-1 [5] das implizite Euler-Verfahren verwendet. In der Norm wird die Wärmeversorgung des Gebäudes jedoch nicht simuliert. Dadurch sind alle auftretenden thermischen Kapazitäten so groß, dass stündliche aufgelöste Simulationen mit vertretbarem Fehler möglich sind. Andere Arbeiten wie [8] lösen die DGL numerisch nach dem expliziten Euler-Verfahren, was in der Umsetzung deutliche Vorteile bringt. Durch den expliziten Ansatz können die Wärmeübertragungen zwischen einzelnen Kapazitäten unabhängig voneinander implementiert werden. Dies vereinfacht die Implementierung deutlich und führt dazu, dass die physikalischen Zusammenhänge im Modell erkennbar bleiben. Durch das explizite Verfahren entsteht jedoch die Gefahr numerischer Instabilitäten bei zu großer Zeitschrittgröße.

In diesem Paper wird ein numerisches, matrizenbasiertes Lösungsverfahren vorgestellt, das für beliebige, zeitvariante thermische RC-Systeme angewendet werden kann. Es basiert auf dem numerisch stabilen Crank-Nicolson-Verfahren. Außerdem wird eine Python-Bibliothek vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde und die Implementierung beliebiger thermischer RC-Systeme mit verschiedenen numerischen Methoden deutlich vereinfacht.

### 3 Methodik und Modell

Ziel des thermischen Modells ist die Simulation des dynamischen Verhaltens von Gebäuden und Wärmespeichern zur Modellierung der elektrischen Wärmeversorgung von Wohngebäuden. Gängige Praxis ist dabei die Simulation des Verhaltens in RC-Modellen.

#### 3.1 Thermisches RC-Modell

Die Verwendung des elektrischen Ersatzmodells zur thermischen Simulation basiert auf der mathematischen Äquivalenz der DGL für elektrischen Strom  $I$  und thermischen Fluss  $\dot{Q}$ :

$$\dot{Q}(t) = C_{\text{th}} \frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{\text{ext}}}{R_{\text{th}}} \quad (1)$$

$$I(t) = C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} \quad (2)$$

Verschiedene Temperaturniveaus  $T$  werden in dieser Analogie durch elektrische Potentiale bzw. Spannungen  $U$  dargestellt, Wärmespeicher mit gegebener thermischer Kapazität  $C_{\text{therm}}$

entsprechen elektrischen Kapazitäten  $C$ . Ein Wärmestrom  $\dot{Q}$  entsteht dann durch unterschiedliche thermische Potenziale über einem thermischen Widerstand  $R_{th}$  in Analogie zum elektrischen Widerstand  $R$ .

Diesen Zusammenhang hat bereits [9] in 1936 genutzt, um an einer elektrischen Ersatzschaltung Vorgänge zu messen, die in der thermischen Anwendung nicht gemessen werden konnten.

Heute bleibt in der Simulation der Vorteil der leicht verständlichen Größen und einfachen grafischen Darstellbarkeit. Die Verwendung raumdiskreter thermischer Kapazitäten (auch Lumped Parameter Model) ermöglicht außerdem eine gute Darstellung dynamischen Verhaltens bei überschaubarem Rechenaufwand [9].

Für die folgenden Gleichungen müssen einige Annahmen getroffen werden. Es wird von temperaturunabhängigen Dichten  $\rho$  und spezifischen Wärmekapazitäten  $c_{p,F}$  von Fluiden ausgegangen. Außerdem ist Voraussetzung, dass die thermischen Kapazitäten, bzw. Massen der einzelnen thermischen Kapazitäten konstant bleiben. Wird durch einen Massenstrom Wärme in eine Kapazität eingetragen, muss somit ein gleich großer Massenstrom die Kapazität verlassen. Für die gespeicherte Wärme  $Q$  einer Kapazität mit der Temperatur  $T$  und der absoluten Wärmekapazität  $C_p$  gilt:

$$Q = T \cdot C_p \quad (3)$$

Relevante Mechanismen der Wärmeübertragung sind vor allem Wärmeleitung und freie sowie erzwungene Konvektion. Wärmeleitung von einer thermischen Kapazität  $C_1$  (mit der Temperatur  $T_1$  und der Kapazität  $C_{p,1}$ ) zu einer zweiten thermischen Kapazität  $C_2$  (mit  $T_2$  und  $C_{p,2}$ ) lässt sich über die folgende DGL beschreiben [10, S. 19]:

$$\begin{aligned} Q_{\text{cond},1 \rightarrow 2} &= (T_1 - T_2) \cdot \frac{\lambda_F}{l} \cdot A_{\text{cond}} \\ &= \left( \frac{Q_1}{C_{p,1}} - \frac{Q_2}{C_{p,2}} \right) \cdot \frac{\lambda_F}{l} \cdot A_{\text{cond}} \end{aligned} \quad (4)$$

Wobei  $\lambda_F$  der Wärmeleitwert,  $l$  die Länge und  $A_{\text{cond}}$  die Querschnittsfläche der Wärmeleitung ist. Bei gegebenen Dimensionen lassen sich diese drei Größen zu einem Wärmeleitwert  $Y_{\text{cond},1 \rightarrow 2}$  zusammenfassen:

$$Y_{\text{cond},1 \rightarrow 2} = \frac{\lambda_F}{l} \cdot A_{\text{cond}} \quad (5)$$

Bei der erzwungenen Konvektion strömt ein Massenstrom  $\dot{m}_{\text{conv}}$  mit der Temperatur  $T_1$  in eine Kapazität mit der Temperatur  $T_2$ . Aufgrund der Annahme konstanter Volumina der Kapazitäten verlässt ein gleich großer Massenstrom mit der Temperatur  $T_2$  die Kapazität. Die Änderung der in der Kapazität gespeicherten Wärme ist über den Wärmestrom  $\dot{Q}_{\text{conv}}$  vom strömenden Fluid in die Kapazität beschrieben [10, S. 219]:

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = (T_1 - T_2) \cdot \dot{m}_{\text{conv}} \cdot c_{p,F} \quad (6)$$

Neben erzwungener Konvektion, in der zum Beispiel durch eine Pumpe ein Massenstrom vorgegeben wird, ist bei der Simulation von geschichteten Speichern (Stratified Storages) auch freie Konvektion zwischen zwei übereinander liegenden Fluidschichten möglich, falls die

Temperatur  $T_1$  der unteren Schicht höher ist als die Temperatur  $T_2$  der oberen Schicht. Diese ergibt sich nach Gleichung (7):

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{\text{conv,free},1\rightarrow 2} &= (T_1 - T_2) \cdot \dot{m}_{\text{conv,free}} \cdot c_{p,F} \\ &= \left( \frac{Q_1}{C_{p,1}} - \frac{Q_2}{C_{p,2}} \right) \cdot \dot{m}_{\text{conv,free}} \cdot c_{p,F}\end{aligned}\quad (7)$$

Mit dem Massenstrom  $\dot{m}_{\text{conv,free}}$  der freien Konvektion nach Gleichung (8), der zwischen den beiden Schichten zirkuliert:

$$\dot{m}_{\text{conv,free}} = \begin{cases} \dot{m}_{\text{conv,free}} & \text{wenn } T_1 > T_2 \\ 0 & \text{wenn } T_1 \leq T_2 \end{cases}\quad (8)$$

### 3.2 Numerisch stabile Diskretisierung

Bei der Diskretisierung von DGL mit dem expliziten Euler-Verfahren berechnen sich die Wärmeströme des aktuellen Zeitschritts  $t$  aus den Temperaturen, bzw. Wärmehalten des vorherigen Zeitschritts  $t - 1$ . Für die Berechnung der Wärmeströme im Zeitschritt  $t$  gelten dann die Gleichungen (9) und (10):

$$\dot{Q}_{\text{cond,expl},1\rightarrow 2,t} = \left( \frac{Q_{1,t-1}}{C_{p,1}} - \frac{Q_{2,t-1}}{C_{p,2}} \right) \cdot Y_{\text{cond},1\rightarrow 2},\quad (9)$$

$$\dot{Q}_{\text{conv,expl},1\rightarrow 2,t} = (T_1 - T_2) \cdot \dot{m}_{\text{conv},t-1} \cdot c_{p,F}.\quad (10)$$

Diese Diskretisierung hat den Vorteil, dass die Gleichungen der Wärmeübertragungen unabhängig voneinander implementiert werden können. Im Anschluss kann der neue Wärmehalt  $Q_{i,t}$  jeder Kapazität  $C_i$  aus den alten Wärmehalten  $Q_{i,t-1}$  und den Wärmeströmen zum Speicher  $i$  ( $\dot{Q}_{k\rightarrow i,t}$ ) und vom Speicher  $i$  ( $\dot{Q}_{i\rightarrow k,t}$ ) berechnet werden:

$$Q_{i,t} = Q_{i,t-1} + \left( \sum_k \dot{Q}_{k\rightarrow i,t} - \sum_k \dot{Q}_{i\rightarrow k,t} \right) \cdot \Delta t\quad (11)$$

mit der Größe des Zeitschritts  $\Delta t$ .

Ist eine numerisch stabile Diskretisierung notwendig, können beispielsweise das implizite Euler-Verfahren oder das Crank-Nicolson-Verfahren verwendet werden. In beiden Verfahren sind zur Berechnung der Wärmeströme des Zeitschritts  $t$  bereits die Energieinhalte der Wärmekapazitäten des Zeitschritts  $t$  notwendig. Durch diesen Kreisbezug ist eine schrittweise Berechnung wie oben beschrieben nicht mehr möglich und es muss ein Matrix-Gleichungssystem aufgestellt werden, das alle Wärmeübertragungen gleichzeitig berechnet.

Ein Vektor  $\mathbf{Q}$  fasst hier die thermischen Kapazitäten zusammen:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}\quad (12)$$

Die allgemeine Form der zeitlichen Änderung der Wärmehalte der Kapazitäten in DGL-Form ist in Gleichung (13) beschrieben:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{b} \quad (13)$$

Dabei werden alle Wärmeflüsse zwischen Kapazitäten durch die Übergangsmatrix  $\mathbf{M}$  ausgedrückt und alle Wärmeübergänge über die Systemgrenze werden durch den Vektor  $\mathbf{b}$  dargestellt.

In zeitdiskreter Form berechnen sich nach dem expliziten Euler-Verfahren die Wärmekapazitäten  $\mathbf{Q}_t$  des Zeitschritts  $t$  nach Gleichung (14):

$$\mathbf{Q}_t = (\mathbf{I} + \mathbf{M} \cdot \Delta t) \cdot \mathbf{Q}_{t-1} + \Delta t \cdot \mathbf{b}_{t-1} \quad (14)$$

Das in der ISO-Norm 52016 verwendete implizite Euler-Verfahren berechnet sich nach Gleichung (15) [5]:

$$(\mathbf{I} - \Delta t \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}_{t-1} + \Delta t \cdot \mathbf{b}_t \quad (15)$$

Als stabiles und präziseres Diskretisierungsverfahren wird in dieser Arbeit das Crank-Nicolson-Verfahren verwendet. Dieses lässt sich in Matrixform nach Gleichung (16) beschreiben:

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}\right) \cdot \mathbf{Q}_t = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}\right) \cdot \mathbf{Q}_{t-1} + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{b}_t + \mathbf{b}_{t-1}) \quad (16)$$

Das explizite sowie das implizite Euler-Verfahren werden im Folgenden zur Einordnung des Crank-Nicolson-Verfahrens für die gegebene Anwendung verwendet.

### 3.3 Thermisches Gebäudemodell

Da die hier vorgestellte, stabile Diskretisierungsmethode für thermische RC-Systeme entwickelt wurde, um das elektrische Verhalten von modernen Prosumer-Haushalten zu modellieren, erfolgt die Auswertung der Methode in Kapitel 5 an dem thermischen Modell eines Einfamilienhauses. In diesem Abschnitt folgt eine Beschreibung des verwendeten thermischen Modells.

#### 3.3.1 Gebäude

Das thermische Verhalten eines Einfamilienhauses wird durch ein Greybox-RC-Modell dargestellt und folgt dem Vorgehen in [8]. Das Modell basiert auf dem 3R2C-Modell (ein RC-Modell mit drei Widerständen und zwei Kapazitäten) von [11], das für den vollständigen Innenraum und die Außenwand je eine Kapazität und für die Wärmeverluste durch Außenwand und Lüften insgesamt drei Widerstände besitzt. [11] zeigt, dass dieses Modell für richtig gewählte Parameter bei der notwendigen Heizleistung Abweichungen von unter 10 % gegenüber einer komplexeren TRNSYS-Simulation aufweist. Auch das dynamische Verhalten entspricht hinreichend genau komplexerer Simulation sowie Messwerten aus einem tatsächlichen Gebäude [11]. Ergänzt wird das thermische Gebäudemodell gegenüber [11] zur Anbindung an die Wärmeversorgung durch weitere Kapazitäten für Fußboden und Heizkreisfluid.

Abbildung 1 (links) zeigt das entsprechende RC-Modell grafisch.

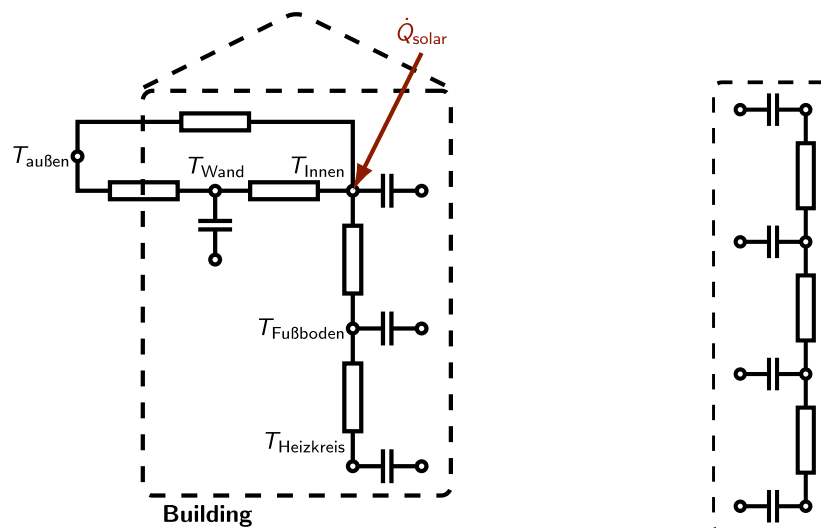


Abbildung 1: Darstellung des verwendeten RC-Modells für ein Einfamilienhaus nach [8] basierend auf [11] (links) und Darstellung der verwendeten RC-Ersatzschaltung für geschichtete thermische Speicher (rechts)

### 3.3.2 Thermischer Speicher

Die thermischen Wasserspeicher für Heizung und Trinkwarmwasser werden im Modell in diskreten Temperaturschichten simuliert, wie es auch in ISO 15316-5 gemacht wird [12]. Verwendet wird ein Modell mit 4 Schichten, da so ein guter Kompromiss zwischen Rechenzeit und Darstellung des dynamischen Verhaltens erzielt werden kann [13].

Abbildung 1 (rechts) zeigt den schematischen Aufbau.

### 3.4 Modellvalidierung

Das Modell wurde gegen die Modelle aus [8] und [14] validiert, die unter Verwendung von umfangreichen, realen Messdaten aus Einfamilienhäusern parametrisiert und validiert wurden [14]. Außerdem wurde das Modell in [14] mit dem Type 56 aus TRNSYS mit gleichen Parametern verglichen. Abbildung 2 (links) zeigt den Vergleich zwischen dem Gebäudemodell dieser Arbeit und dem Modell aus [14]. Abbildung 2 (rechts) zeigt die Validierung des Modells aus [14] gegen reale Messdaten.

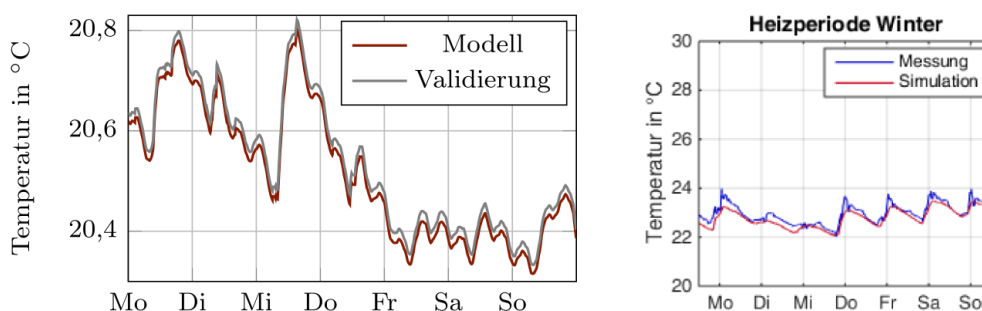


Abbildung 2: Vergleich des ThermoBuilPy-Gebäudemodells mit dem Validierungsmodell aus [14] (links) und Validierung des Modells aus [14] gegen reale Messdaten (rechts) [14]

## 4 Python-Bibliothek

Da die händische Implementierung des Crank-Nicolson-Verfahrens aufwändig und fehleranfällig ist, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein open source Python Package entwickelt,

welches das Aufstellen, Berechnen und Auswerten des Matrix-Gleichungssystems für beliebige thermische RC-Systeme übernimmt. Dabei muss nur eine formale Definition der im System vorhandenen Kapazitäten und Arten der Wärmeübertragung aufgestellt werden und Schrittgröße sowie Anzahl der Simulationsschritte vorgegeben werden. Das entsprechende Package *ThermoBuilPy* wurde im *Python Packaging Index* veröffentlicht und eine vollständige Dokumentation befindet sich auf *GitHub* [15]. *ThermoBuilPy* ermöglicht neben dem Crank-Nicolson-Verfahren außerdem die Diskretisierung der DGL-Systeme nach dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren.

Das Package bietet außerdem eine Schnittstelle zum Python-Package *MilPython*, mit dem gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsprobleme (MILP) aufgestellt und über gängige Solver gelöst werden können [16]. So kann ein thermisches RC-System in *ThermoBuilPy* formuliert und direkt in eine MILP-Zeitreihen-Optimierung eines übergeordneten Energiesystems integriert werden.

## 5 Ergebnisse und Diskussion

Für den Vergleich der Diskretisierung thermischer RC-Modelle mit dem Crank-Nicolson-Verfahren werden das explizite und implizite Euler-Verfahren verwendet. Angewendet werden alle Verfahren auf das gleiche Einfamilienhaus und einen Zeitraum von einem Monat.

Abbildung 3 (links) zeigt den relativen Fehler abhängig von der Diskretisierungsmethode und der Zeitschrittgröße der Simulation bezogen auf die Simulation mit einmütiger Zeitauflösung. Die Überlegenheit des Crank-Nicolson-Verfahrens ist für alle Schrittgrößen zu erkennen. Dabei wird das explizite Euler-Verfahren vollständig unbrauchbar, sobald bei einer Schrittgröße von 8 min numerische Instabilitäten auftreten und das implizite Euler-Verfahren weist bereits bei einer Zeitschrittgröße von 5 min einen relativen Fehler von größer 25 % auf und ist damit unbrauchbar. Der Fehler des Crank-Nicolson-Verfahrens bleibt auch bei einer Zeitschrittgröße von 15 min unter 5 %. Anzumerken ist hier die starke Abhängigkeit des Fehlers von der konkreten Problemstellung. Bei dem gezeigten Gebäudemodell ist die Fehlergröße zum Beispiel stark von der Größe des Heizwasser-Speichers abhängig. Der Vorteil des Crank-Nicolson-Verfahrens gilt jedoch für alle Modelle.

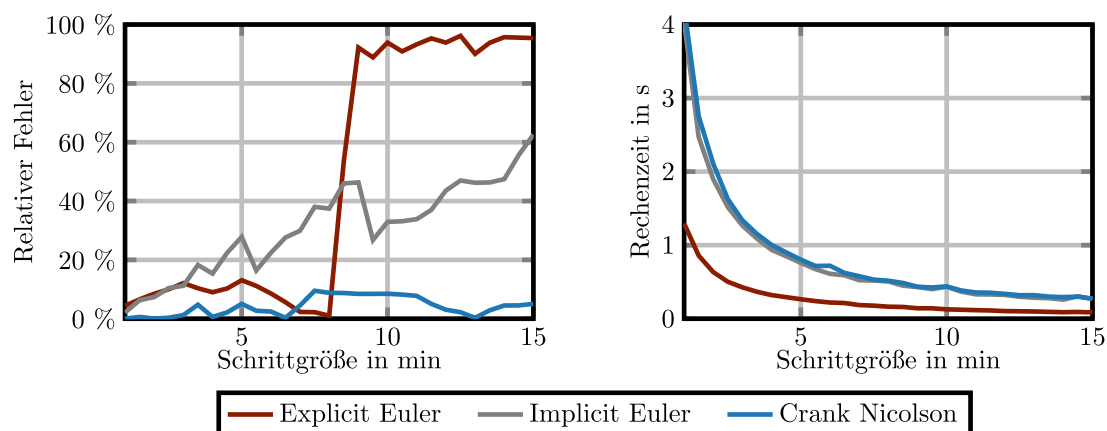


Abbildung 3: Relativer Fehler des Energiebedarfs eines Einfamilienhauses bei verschiedenen Diskretisierungsmethoden abhängig von der Zeitschrittgröße (links) und (rechts) absolute Berechnungsdauer für die Simulation eines Monats für ein Einfamilienhaus abhängig von der Zeitschrittgröße und der Diskretisierungsmethode

Abbildung 3 (rechts) zeigt die absolute Dauer der Simulation des thermischen Modells eines Einfamilienhauses für einen Monat abhängig von der Schrittgröße und der Diskretisierungsmethode. Während der Rechenaufwand für impliziten Euler und Crank-Nicolson-Verfahren bei gleicher Schrittgröße höher ist als beim expliziten Euler-Verfahren, kann die Rechenzeit insgesamt um 80 % gesenkt werden, wenn anstelle des expliziten Euler-Verfahrens mit einer Schrittgröße von 1 min das Crank-Nicolson-Verfahren mit einer Schrittgröße von 15 min verwendet wird. Zu erwähnen ist hier außerdem, dass der eigentliche zeitliche Vorteil nicht durch die Zeitersparnis im thermischen Modell, sondern durch andere Komponenten entsteht, die dann ebenfalls mit einer größeren Zeitschritten simuliert werden können.

Aus der Betrachtung des Verhaltens des Fehlers und der Rechenzeit geht außerdem hervor, dass das implizite Euler-Verfahren keine Vorteile liefert und bei Möglichkeit immer das Crank-Nicolson-Verfahren verwendet werden sollte. Auch bei kleinen Schrittgrößen sollte die Verwendung des Crank-Nicolson-Verfahrens aufgrund des kleineren Fehlers in Betracht gezogen werden.

Die Verwendung des hier dargestellten Python-Packages bietet neben der einfacheren und fehlerresistenteren Implementierung von thermischen RC-Modellen den Vorteil, dass das Diskretisierungsverfahren nicht vor der Implementierung ausgewählt werden muss, sondern dass Zeitschrittgröße und Diskretisierungsmethode nach Implementierung am jeweiligen Beispiel flexibel getestet und ausgewählt werden können.

## 6 Ausblick und weitere Forschung

Zukünftig ist mit dem erarbeiteten Modell die Untersuchung der Netzbelastung durch Prosumer-Haushalte geplant, die ihre thermische und elektrische Flexibilität im Rahmen verschiedener Optimierungsziele nutzen.

## 7 Danksagung

Diese Arbeit wurde im Rahmen des Vorhabens „WQeff Effiziente Wärmepumpenquartiere – Effizienter, erneuerbarer und netzdienlicher Betrieb von Wärmepumpenquartieren; Teilvorhaben: Effizienzüberwachung, Betriebsoptimierung und Planungsunterstützung für Wärmepumpenquartiere“ (FKZ 03EN3070E) durch das Bundesministerium für Wirtschaft und Klimaschutz aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages gefördert. Die Autor:innen danken dem BMWK für die finanzielle Förderung.

## 8 Literatur

- [1] H. Hanse und I. Hauer, „Untersuchung der Sensitivität der Netzbelastung bezüglich der Durchdringung dynamischer Stromtarife“, in *ETG Kongress 2025; Voller Energie – heute und morgen.*, Mai 2025, S. 345–352. Zugegriffen: 24. November 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/11202005>
- [2] J. Romání, A. De Gracia, und L. F. Cabeza, „Simulation and control of thermally activated building systems (TABS)“, *Energy Build.*, Bd. 127, S. 22–42, Sep. 2016, doi: 10.1016/j.enbuild.2016.05.057.

- [3] F. Belić, Ž. Hocenski, und D. Slišković, „Thermal modeling of buildings with RC method and parameter estimation“, in *2016 International Conference on Smart Systems and Technologies (SST)*, Okt. 2016, S. 19–25. doi: 10.1109/SST.2016.7765626.
- [4] J. E. Seem, „Modeling of Heat Transfer in Buildings“, University of Wisconsin--Madison, 1987.
- [5] *DIN EN ISO 52016-1:2018-04, Energetische Bewertung von Gebäuden\_ - Energiebedarf für Heizung und Kühlung, Innentemperaturen sowie fühlbare und latente Heizlasten\_ - Teil\_1: Berechnungsverfahren (ISO\_52016-1:2017); Deutsche Fassung EN\_ISO\_52016-1:2017*. doi: 10.31030/2577376.
- [6] L. Rouvel, „Berechnung des wärmetechnischen Verhaltens von Räumen bei dynamischen Wärmelasten“, Institut für Energiewirtschaft, TU München, München, Nr. 6, Juni 1972. Zugriffen: 9. Oktober 2025. [Online]. Verfügbar unter: [https://www.gebsimu.de/Rouvel\\_Berechnung\\_des\\_waermetechnischen\\_Verhaltens\\_von\\_Raumen\\_bei\\_dynamischen\\_Waermelasten\\_BWK\\_1972\\_6.pdf](https://www.gebsimu.de/Rouvel_Berechnung_des_waermetechnischen_Verhaltens_von_Raumen_bei_dynamischen_Waermelasten_BWK_1972_6.pdf)
- [7] *VDI 6007 Blatt 1 - Berechnung des instationären thermischen Verhaltens von Räumen und Gebäuden - Raummodell*. 2015. Zugriffen: 20. Oktober 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.vdi.de/mitgliedschaft/vdi-richtlinien/details/vdi-6007-blatt-1-berechnung-des-instationaeren-thermischen-verhaltens-von-raeumen-und-gebaeuden-raummodell-1>
- [8] T. Dr. Ohrdes u. a., „Abschlussbericht EnEff:Stadt Verbundvorhaben: Wind-Solar-Wärmepumpen-Quartier - Erneuerbar betriebene Wärmepumpen zur Minimierung des Primärenergiebedarfs (WPuQ)“, Aug. 2021.
- [9] C. L. Beuken, „Wärmeverluste bei periodisch betriebenen elektrischen Öfen, : Eine neue Methode zur Vorausbestimmg nicht-stationärer Wärmeströmungen, / vorgelegt von Clemens Louis Beuken“, Sächsische Bergakademie Freiberg, Freiberg, 1936.
- [10] P. Von Böckh und T. Wetzel, *Wärmeübertragung: Grundlagen und Praxis*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011. doi: 10.1007/978-3-642-15959-6.
- [11] F. Koene, L. Bakker, D. Lanceta, und S. Narmsara, „Simplified Building Model of Districts“, gehalten auf der BauSim Conference 2014, in *BauSim Conference*, vol. 5. IBPSA-Germany and Austria, 2014, S. 152–159. Zugriffen: 14. Oktober 2025. [Online]. Verfügbar unter: [https://publications.ibpsa.org/conference/paper/?id=bausim2014\\_1128](https://publications.ibpsa.org/conference/paper/?id=bausim2014_1128)
- [12] D.-N. Heiz, „DIN EN 15316-5, Energetische Bewertung von Gebäuden –Verfahren zur Berechnung der Energieanforderungen und Nutzungsgrade der Anlagen –Teil 5: Raumheizung und Speichersysteme für erwärmtes Trinkwasser (keine Kühlung), Modul M3-7, M8-7; Deutsche und Englische Fassung prEN 15316-5:2024“.
- [13] E. M. Kleinbach, W. A. Beckman, und S. A. Klein, „Performance study of one-dimensional models for stratified thermal storage tanks“, *Sol. Energy*, Bd. 50, Nr. 2, S. 155–166, Feb. 1993, doi: 10.1016/0038-092X(93)90087-5.
- [14] E. Schneider, M. Littwin, M. Knoop, P. Pärish, O. Kastner, und T. Ohrdes, „Entwicklung und messwertbasierte Parametrierung eines vereinfachten Gebäudemodells für die Quartiersmodellierung“.
- [15] H. Hanse, *ThermoBuilPy*. Python. Zugriffen: 15. Oktober 2025. [OS Independent]. Verfügbar unter: <https://github.com/hanneshanse/ThermoBuilPy>
- [16] H. Hanse, *MilPython*. (8. Mai 2025). Python. Zugriffen: 21. Januar 2026. [Online]. Verfügbar unter: <https://github.com/hanneshanse/MilPython>